PIZZOFALCONE

NAZIONALE
B. Prov.
VI
230
NAPOLI
BIBLIOTECA
VITT. EM. III

BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio
Palchetto
Num.° d' ordine

OPERE

DEL CONTE

JACOPO RICCATI

NOBILE TREVIGIANO.

Tomo Terzo.

NAPOLI

IN LUCCA MDCCLXIV.

APPRESSO JACOPO GIUSTI.

CON LICENZA DE' SUPERIORI.

Digitized by Google

SCHEDIASMI
FISICO-MATEMATICI.

Digitized by Google

PREFAZIONE
DELL' EDITORE.

SI contengono nel preſente Tomo terzo XXXIX. Schediaſmi Fiſico-Matematici del Conte Jacopo Riccati, i quali trattine alcuni, che o nei Giornali d'Italia, o ne' loro Supplementi, o negli Atti di Lipſia, o nei Comentarj di Bologna, o in qualche altra Opera furono già ſtampati, eſcono ora in pubblico la prima volta. Gli ho ſcelti da un numero molto maggiore, eſcludendo quelli, che o dall'Autore dopo aver riformate varie ſue opinioni, erano ſtati rifiutati, o che erano rimaſi imperfetti, o che verſavano intorno ſubbietti di poca importanza, o che finalmente col totale loro ſpoglio avevano ſomminiſtrata materia alle maggiori ſue Opere. S' è per me giudicato ſommamente importante il determinare a un di preſſo il tempo, in cui ogni Schediaſma è ſtato compoſto, ed eſſendo la mia diligenza relativamente a quaſi tutti felicemente riuſcita, ho notata queſta circoſtanza al principio dei nominati Schediaſmi, non tralaſciando altresì di mentovare l'Opera, in cui ſono ſtati impreſſi, quando per l'addietro ſieno comparſi alla pubblica luce. Una Diſſertazione compoſta al principio di queſto ſecolo meritava certamente più ſtima di quella, che le ſarebbe dovuta, ſe foſſe ſtata ſcritta cinquant' anni dopo, mentre che le Fiſico-Matematiche Diſcipline ſono ſtate arricchite

di

di tanti nuovi discoprimenti. Gli Schediasmi XI, XII, XIII scritti l'anno 1705., o in quel torno da un giovane, che non giungeva ai trent'anni, mostrano a chiaro lume il suo straordinario valore.

Nella Prefazione al Trattato della Separazione delle indeterminate nelle equazioni differenziali ho conghietturato, che l'Opera dell'acutissimo Signor Gabbriello Manfredi *De constructione aquationum differentialium primi gradus* uscita in Bologna l'anno 1707. gli abbia servito di stimolo per vie più internarsi nel Calcolo integrale. La citata Prefazione contiene la storia dei suoi felici ritrovamenti, ed in questo Tomo si leggono gli Schediasmi, in cui c'entrano le dette scoperte, i quali non enumererò partitamente avendone dei principali nel ricordato luogo parlato, ed essendo non pochi quelli, che in se racchiudono i commendati artificj. Fa uso l'Autore di un metodo di sua invenzione nello Schediasma XXXI. *Sopra le leggi delle resistenze, con le quali i mezzi fluidi ritardano il moto de' corpi solidi*, e questo metodo lo conduce ad una elegantissima costruzione. Ma non potendo essa a cagione delle quantità immaginarie abbracciare il caso, quando la resistenza s'eguaglia alla velocità u moltiplicata nella costante $2b$, la cui metà b sia minore della unità, ho con una opportuna Annotazione supplito nel detto caso alla soluzione del Problema: *Determinare nella Cicloide il moto d'un Pendolo, a cui si resista dal mezzo in ragione della velocità*. Non passerò sotto silenzio lo Schediasma V. *De' Polinomj* inserito dalla Dottissima Signora Contessa D. Maria Agnesi nelle sue Instituzioni Analitiche. In esso il Conte Jacopo insegna un metodo, che sarebbe generale, se non venisse frequentemente reso inutile dalle quantità immaginarie; col di cui mezzo si riducono alle note quadrature i Polinomj differenziali: Meritano pure d'essere distintamente nominati gli Schedia-

diaſmi, VII. *Animadverſiones in æquationes differentiales ſecundi gradus*, VIII. *Appendix ad Animadverſiones in æquationes differentiales ſecundi gradus*, che ci additano la regola generale per diſtinguere, ſe ad una equazione differenziodifferenziale ſi poſſa giungere aſſumendo, o non aſſumendo una prima differenza ſiccome coſtante. Ne parla con molta lode il Sig. Niccolò Bernoulli nella ſua Riſpoſta al Sig. Conte Gilio Carlo de Fagnani ſtampata nel Tomo IX. dei Supplementi degli Atti di Lipſia, Sezione III., Pag. 98.

Avendo il Conte Riccati inſerito nell' Opera del Saggio intorno il Siſtema dell'Univerſo le ſue ſcoperte Aſtronomiche Lib. II., Parte I., Cap. V., VI., e VII., ci ſono rimaſte ſu queſto argomento le *Riſleſſioni intorno le forze centrali tanto nel voto, quanto nel pieno* contenute nello Schediaſma IV, il Capo V. *De Trajectoriis deſcriptis a viribus centralibus in vacuo* dello Schediaſma XVI. *Scientiæ Dynamicæ Elementa*, e gli Schediaſmi XVII. *In pleno tempora, quibus arcus trajectoriæ deſcribuntur, non poſſunt eſſe arcis a radio vectore factis proportionalia*, XVIII. *Del Siſtema Ticonico*, XIX. *Riſleſſioni ſopra un principio uſato dal Bradley per iſpiegare l' aberrazione delle ſtelle fiſſe*. Gli oſſervi attentamente il Lettore, e vi ſcoprirà per entro degli originali penſamenti.

Non dobbo laſciar d' avvertire, che per determinare nello Schediaſma XX. ſcritto l' anno 1735. la lunghezza d' un pendolo ſemplice iſocrono ad un dato compoſto, ſi vale del metodo delle azioni, cioè a dire delle forze applicate agli ſpazj, fondamento principaliſſimo della Meccanica, che poſcia è ſtato meſſo nel vero ſuo lume dal P. Vincenzo Riccati Figlio dell' Autore nel Dialogo delle forze vive, e della azione delle forze morte.

Delle ſpeculazioni del Conte Jacopo intorno le comunicazioni del moto ne ho informato il Lettore nella Pre-

fa-

fazione ai Principj, ed ai Metodi della Fiſica. Reſta da dir qualche coſa degli Schediaſmi XXI, XXII, che trattano della ſteſſa materia. Conſiderò egli nello Schediaſma XXI. le comunicazioni del moto, che ſi fanno per via di attrazione, collocando un elaſtro fra due corpi, e ſupponendo, che il corpo agente tiri col mezzo dell' elaſtro il corpo paziente, e ciò coll'unica mira di far toccare con mano, che conſumandoſi fuor di dubbio una porzione della forza viva del corpo agente nello ſtirare l'elaſtro, non può ſuſſiſtere la ſentenza Carteſiana, che le forze vive ſieno proporzionali alle quantità di moto, la quale ci guida neceſſariamente alla conſeguenza, che nella diſtenſione della molla nulla di forza viva ſi ſpenda. Per l' addietro i Fiſico-Matematici anno rintracciate le leggi delle comunicazioni del moto fra i corpi o molli, o elaſtici perfettamente. Il noſtro Autore ha moſſo un paſſo di più nello Schediaſma XXII, determinando i canoni della comunicazione del movimento in qualunque ſuppoſizione, o ſieno ambo i corpi perfettamente molli, o perfettamente elaſtici, o di natura media fra le due eſtreme.

Somminiſtrano la materia ai quattro ſeguenti Schediaſmi le corde, o fibre elaſtiche. Gran lavoro ha coſtato all' Autore lo Schediaſma XXIII. *Veræ & germanæ virium elaſticarum leges ex phænomenis demonſtratæ*. Chi lo leggerà colla dovuta applicazione, lo troverà pregno di coſe tutte maſſiccie, e ſommamente importanti. Totalmente nuova è l' idea dello Schediaſma XXVI. *Della proporzione, che paſſa fra le affezioni ſenſibili, e la forza degli obbietti eſterni, da cui vengon prodotte*. Ecco ciò, che ne dice il P. D. Giovanni Crivelli nella Parte prima de' ſuoi Elementi di Fiſica, pag. 174. *L' acutiſſimo Sig. Conte Riccati è il ſolo, ch' io ſappia, che ſiaſi propoſto d' inveſtigare la proporzione fra le affezioni de' noſtri ſenſi, e la forza degli oggetti eſterni*. Concioſſiachè

nei due lodati Schediaſmi il Conte Jacopo ſi appiglia a certe troppe riſtrette ſuppoſizioni, ho preſa riſoluzione di trattare più ampiamente in due Annotazioni gli ſteſſi argomenti.

Ho tenuto diſcorſo nella Prefazione al Saggio intorno il Siſtema dell' Univerſo delle fruttuoſe meditazioni del noſtro Autore in riguardo alle Reſiſtenze. Si maneggia una tale materia negli Schediaſmi XXVII., XXVIII., XXIX., XXX., XXXI., XXXII., e XXXIII. Mentre il fluido ſcacciato di luogo non retroceda, ma o sfugga prontamente dai lati, o ſeguiti la direzione del corpo, che in eſſo ſi muove, ha dimoſtrato il Conte Riccati, che le reſiſtenze naſcenti dalla inerzia della materia ſtanno nel primo caſo come il quadrato, e nel ſecondo come il cubo dell' attuale velocità. Che ſe il fluido ritorna in dietro, e col ſuo urto ritarda vie più il movimento del ſolido, le reſiſtenze ſono regolate da leggi molto diverſe. Valendoſi il Conte Jacopo degli eſperimenti fatti dal Cavalier Nevvton con maſſima accuratezza ſopra i pendoli, che ſi vibrano nell' aria, ha trovato nello Schediaſma XXX., che i due limiti delle reſiſtenze vengono determinati per una parte negli archi grandi da un contraſto proporzionale al quadrato della velocità, e per l'altra in quell'arco minimo, ed ultimo, che ſia di mezzo fra i confini del moto, e della quiete, da una oppoſizione, che ſi può prendere per coſtante.

Succedono tre Schediaſmi, vale a dire il XXXIV. *Oſſervazioni ſopra il moto de' corpi ſolidi ne' mezzi fluidi*, il XXXV. *Delle preſſioni, e degli equilibrj de' fluidi*, il XXXVI. *Difeſa del Corollario II. della Propoſizione XXXVI. del Libro II. dei Principj Matematici della Filoſofia naturale del Cavaliere Iſacco Nevvton*. Gli Schediaſmi XXXIV, e XXXVI ci pongono ſotto gli occhi due controverſie, l'una col P. Ab. D. Guido Grandi, l'altra primieramente col Sig. Pie-

rantonio Michelotti, e poſcia col Sig. Daniele Bernoulli. S'accordavano l'Autore, ed il P. Grandi nel determinare la forza, che ſtimola al moto, eguale alla differenza fra i peſi del volume ſolido, e di un pari volume di fluido; ma poi ſi appigliavano a differenti opinioni, mentre ſi trattava di ſtabilire la maſſa poſta in moto, mettendoſi a computo dall'Ab. Grandi il ſolo corpo ſolido, e ſoſtenendo il Conte Jacopo, che al corpo ſolido ſi doveſſe aggiungere un egual volume di fluido. Miſe queſti così in chiaro nella ſua ſeconda Scrittura la verità della ſua propoſizione, che il P. Grandi con ingenuità ben degna d'un vero Filoſofo ſi dichiarò pienamente convinto. Non ſi può negare frattanto, che il P. Abate con acutezza da ſuo pari nella Riſpoſta alle Oſſervazioni dell'Autore, non ponga la ſua cauſa in quell'aſpetto, ch'era il più favorevole. Un eſito egualmente felice ebbe la ſeconda controverſia; imperciocchè il Signor Daniele Bernoulli, che da prima negava coſtantemente la verità del Corollario Nevvtoniano difeſa dal Conte Riccati, avendo poſcia più poſatamente meditato ſopra la teorica dell'acqua, che ſcaturiſce da un vaſo, confeſsò ſinceramente nella ſua Idrodinamica, che nella ipoteſi del Nevvton quando l'acqua è pervenuta ad una equabile velocità, la forza, che ſtimola l'acqua ſteſſa ad uſcir dal foro, s'eguaglia al peſo non della colonna fluida ſopraſtante al buco, come per l'addietro avea ſoſtenuto, ma bensì d'una colonna di doppia altezza, come aſſieme col Nevvton avea il Conte Jacopo dimoſtrato. Non ſarà diſcaro a chi legge, che nella Annotazione, che vien dietro allo Schediaſma XXXVI., ſi ponga da me in maggior lume la verità del Corollario Nevvtoniano, facendo ricorſo al metodo infallibile delle azioni. Egli è fuor di dubbio, che dalla azione della gravità dell'acqua contenuta nel vaſo proviene la forza viva, e conſeguentemente la velocità di quella parte di

flui-

fluido, che ſpiccia fuori pel buco. Dalla predetta azione per tanto io deduco e la velocità, colla quale eſce l'acqua, e la forza libera e non impedita, che ſarebbe atta ad imprimerle il detto moto, la quale quando la velocità è divenuta equabile, giunge alla miſura aſſegnatale dall'incomparabile Sig. Nevvton. Colla ſteſſa occaſione ſi determina da me la figura del gorgo, che forma la Natura in vicinanza del foro, affine di paſſare per gradi dalla picciola celerità, che ha l'acqua dentro del vaſo, a quella molto maggiore, che acquiſta, mentre ſcaturiſce pel buco.

Allo ſtudio della Diottica s'era molto il noſtro Autore applicato. Scrive egli nel Lib. III. Cap. III. dei Principj, e dei Metodi della Fiſica, che in compagnia di un ſuo dotto Amico, cioè a dire del Sig. Conte Giovanni Rizzetti, avea ſoddisfatto a parecchi ardui, ed eleganti Problemi, ed in particolare al ſeguente fra tutti il più malagevole. Data qualunque lente compoſta di due ſegmenti di cerchio, data la proporzione fra le forze refrangenti dei due mezzi fluido, e ſolido, e dato il punto lucido nell' aſſe della lente, tirare una linea, limite dei raggi refratti, e rifleſſi, di modo che tutti i raggi, che urtano nella lente fra l'aſſe, e la detta linea, ſi rifrangano, e quelli che urtano al di fuori della linea ſteſſa, ſi riflettano. Fra le ſue carte non ſi ſono in tale materia trovati, ſalvo che gli Schediaſmi XXXVII, e XXXVIII, i quali per altro fanno vedere quanto egli foſſe penetrato addentro in sì fatte ſpeculazioni. E' curioſa la proprietà della ſfera dimoſtrata nello Schediaſma XXXVIII. Tutti i raggi, che paſſando per un mezzo più raro urtano nella ſuperficie d'una ſfera più denſa con una direzione parallela all'aſſe della ſteſſa, patiſcono una doppia rifrazione; di maniera che neſſun raggio ſi riflette, mentre ſta per far tranſito dalla ſfera più denſa al mezzo più raro.

Chiudono la ſerie dei XXXIX. Schediaſmi otto lettere, quattro del P. D. Giovan Bernardo Piſenti C. R. S., ed altrettante del noſtro Autore, che trattano *dell'Analogia fra i ſuoni, ed i colori, e del vero metodo di filoſofare in Fiſica*. Non ſapea il Conte Jacopo condeſcendere alla ſoverchia indulgenza del Padre Piſenti verſo le iporeſi, ſtandogli ſempre a mente, che giuſta il detto del Galileo ſono belle ed ingegnoſe, ma per lo più non dimoſtrate, ne dimoſtrabili.

IN-

Digitized by Google

INDICE
DEGLI
SCHEDIASMI.

Schediasma I. *Soluzione generale del Problema inverso intorno a' raggi osculatori, cioè data in qualsisia maniera per l' ordinata l' espressione del raggio osculatore, determinare la curva, a cui convenga una tal espressione.* Pag. 1.

Schediasma II. *Data in qualsivoglia modo per la curva, che descrivesi, l' espressione del raggio combaciante, determinare la curva medesima.* p. 8.

Schediasma III. *Risposta ad alcune opposizioni fatte dal Sig. Giovanni Bernoulli alla soluzione del Problema inverso delle forze centrali nel voto in ragione reciproca de' quadrati delle distanze, pubblicata dal Sig. Jacopo Ermanno nel secondo Tomo del Giornale de' Letterati d' Italia Articolo XV.* p. 20.

Annotazioni *del Sig. Niccolò Bernoulli Nipote del Sig. Giovanni sopra lo Schediasma del Sig. Co. Jacopo Riccato pubblicate nel Tomo decimonono del Giornale de' Letterati d' Italia Articolo VII. Coll' annessa Soluzione propria del Problema inverso delle forze centrali agenti in un mezzo non resistente, dedotta da' principj medesimi del Sig. Newton.* p. 29.

Schediasma IV. *Contrarisposta alle Annotazioni del Sig. Niccolò Bernoulli inserite nel XX. Giornale d' Italia Articolo XIII., con un metodo di separare le indeterminate nell' equazioni differenziali, e con alcune riflessioni intorno le forze centrali tanto nel voto, quanto nel pieno.* p. 42.

Risposta del Sig. Niccolò Bernoulli Nipote del Sig. Giovanni a quelle cose, che il Sig. Conte Jacopo Riccato inserì nel Tomo XXI. del Giornale de' Letterati d' Italia all' Articolo VIII. p. 59.

Sche-

Schediaſma V. *De' Polinomj.* p.71.
Schediaſma VI. *De recta ratione analytice exprimendi lineolam interceptam inter tangentem, & curvam.* p.79.
Schediaſma VII. *Animadverſiones in æquationes differentiales ſecundi gradus.* p.83.
Danielis Bernoullii Joh. Fil. Med. Cand. Notata in præcedens Schediaſma Ill. Co. Jacobi Riccati. p.88.
Schediaſma VIII. *Appendix ad Animadverſiones in æquationes differentiales ſecundi gradus.* p.90.
Danielis Bernoullii explanatio Notationum ſuarum, qua extant Supplem. Tom. VIII., Sect. II. p.97.
Schediaſma IX. *Della quadratura della Poſt-evoluta della Cicloide.* p.99.
Schediaſma X. *Della conneſſione, che paſſa tra la coſtruzione dell' equazioni Analitiche, e la quadratura d' infinite curve Algebraiche.* p.112.
Schediaſma XI. *De ſolutione æquationum Analyſticarum, & Problematum Geometricorum per curvas ſimpliciſſimas.* p.119.
Schediaſma XII. *De modo conſtruendi non inelegantes Problemata pluſquam ſolida.* p.127.
Schediaſma XIII. *De analogia inter æquationes analyticas, & poteſtates logarithmicas.* p.149.
Schediaſma XIV. *Theoria proportionum per exponentes.* p.152.
Schediaſma XV. *De Organica Curvarum Trajectoriæ, atque Logarithmicæ Conſtructione a Viro Celeberrimo Joanne Poleno inventa.* p.161.
Schediaſma XVI. *Scientiæ Dynamicæ Elementa.* p.163.
Schediaſma XVII. *In pleno tempora, quibus arcus trajectoriæ deſcribuntur, non poſſunt eſſe areis a radio vectore factis proportionalia.* p.198.
Schediaſma XVIII. *Del Siſtema Ticonico.* p.199.
Schediaſma XIX. *Rifleſſioni ſopra un principio uſato dal Bradley, per iſpiegare l' aberrazione delle ſtelle fiſſe.* p.205.
Schediaſma XX. *Determinare la lunghezza d' un pendolo ſemplice iſocrono ad un dato compoſto.* p.208.
Schediaſma XXI. *Delle comunicazioni del moto, che ſi fanno per via di attrazione.* p.213.
Schediaſma XXII. *Dei limiti, da' quali reſtano determinate le leg-*

leggi della comunicazione del moto in qualunque ipoteſi. p.228.
Schediaſma XXIII. *Veræ, & germanæ virium elaſticarum leges ex phænomenis demonſtratæ.* p.239.
Annotazione dell' Editore. p.258.
Schediaſma XXIV. *Sopra alcune proprietà delle corde elaſtiche.* p.276.
Schediaſma XXV. *Confutazione dell' ipoteſi, che due corpi dotati di eguali quantità di moto urtando in due corde del tutto eguali, le ripiegbino per eguali ſaette.* p.284.
Schediaſma XXVI. *Della proporzione, che paſſa fra le affezioni ſenſibili, e la forza degli obbietti eſterni, da cui vengono prodotte.* p.287.
Annotazione del Sig. Ab. Co. Girolamo Lioni. p.297.
Annotazione dell' Editore. p.299.
Schediaſma XXVII. *Delle Reſiſtenze.* p.323.
Schediaſma XXVIII. *Della Forza, colla quale i corpi fluidi urtano nei ſolidi, o ſia della Reſiſtenza, con cui i mezzi fluidi s' oppongono al moto dei ſolidi.* p.343.
Schediaſma XXIX. *Data in qualſivoglia modo la forza centripeta per la diſtanza dal centro, e meſſa la reſiſtenza in ragione compoſta della velocità attuale duplicata, e della denſità del fluido, inveſtigare le leggi della diſceſa d' un grave.* p.349.
Schediaſma XXX. *Del moto dei pendoli a cicloide, poſta la reſiſtenza del mezzo in ragione duplicata dell' attuale velocità.* p.357.
Schediaſma XXXI. *Sopra le leggi delle reſiſtenze, con le quali i mezzi fluidi ritardano il moto de' corpi ſolidi.* p.376.
Annotazione del Sig. Ab. Co. Girolamo Lioni. p.386.
Annotazione dell' Editore. p.387.
Schediaſma XXXII. *Determinare il moto d' un pendolo a cicloide, ſuppoſta coſtante la reſiſtenza del mezzo.* p.396.
Schediaſma XXXIII. *Determinare il moto d' un pendolo a cicloide, ſuppoſta coſtante la reſiſtenza, che ſi oppone alle diſceſe, ed agli aſcendimenti verticali.* p.402.
Schediaſma XXXIV. *Oſſervazioni ſopra il moto de' corpi ſolidi ne' mezzi fluidi.* p.405.

Sche-

Schediaſma XXXV. *Delle preſſioni, e degli equilibrj de' fluidi.* p.413.
Schediaſma XXXVI. *Difeſa del Corollario II. della Propoſizione XXXVI. del Libro II. dei Principj Matematici della Filoſofia naturale del Cavalier Iſacco Newton.* p.425.
Annotazione dell' Editore. p.449.
Schediaſma XXXVII. *De' fochi primarj, e ſecondarj delle lenti ſferiche.* p.470.
Schediaſma XXXVIII. *Omnes radii paralleli in ſphæram incites duplicem refractionem patiuntur.* p.478.
Schediaſma XXXIX. *Dell' analogia fra i ſuoni ed i colori, e del vero metodo di filoſofare in Fiſica.* p.479.

SCHEDIASMA I. (a)

Soluzione generale del Problema inverſo intorno a' raggi oſculatori, cioè, data in qualſiſia maniera per l'ordinata l'eſpreſſione del raggio oſculatore, determinar la curva, a cui convenga una tal eſpreſſione.

LE ordinate dalla curva ACD (Fig. 1.) partano tutte dal punto B, e ſia BC $= y$, la ſua differenza $= dy$, il minimo arco CI $= dx$, e CD elemento della curva $= ds$.

Suppoſto che il raggio oſculatore CG $= r$ ſia dato in qualſivoglia ſorma per l'applicata BC, di modo che la relazione di r ad y poſſa eſprimerſi con una nota equazione; ſi prenda come coſtante la differenziale CI $= dx$, ed in queſto caſo il valore del raggio oſculatore verrà determinato dall'equazione $r = \frac{yds^3}{dxds^2 - ydx\,ddy}$, ovvero $\frac{yds^3}{v} = dxds^2 - ydx\,ddy$, la qual formula mi ſò lecito di prendere ad impreſtito dal Sig. Marcheſe dell'Oſpitale; mentre eſſendo notiſſima a' Geometri, non giudico neceſſario dedurla dal metodo diretto degl'infiniti.

Per liberare la premeſſa formula dalle ſeconde differenze, condotta all'ordinata BC la perpendicolare BF, chiamo p la ſubnormale BF, e q la normale CF, dalla qual denominazione ſi cavano le ſeguenti analogie.

$$\left.\begin{array}{l} CB : BF :: CI : ID \\ y : p :: dx : dy \end{array}\right\} \text{ dunque } \frac{pdx}{y} = dy,\ \frac{ydy}{p} = dx.$$

$$\left.\begin{array}{l} BC : CF :: CI : CD \\ y : q :: dx : ds \end{array}\right\} \text{ dunque } \frac{qdx}{y} = ds.$$

Già che dunque $\frac{pdx}{y} = dy$, preſe di nuovo le differenze in ordine alla prima ipoteſi, ſuppoſta coſtante dx, avremo $\frac{pdvdx}{yy} - \frac{dpdx}{y} = -ddy$, e ſo-

(a) *Queſto Schediaſma è ſtato pubblicato l'anno 1712. nel Tomo undecimo del Giornale de' Letterati d'Italia, Articolo ottavo.*

2
ſtituito queſto valore nella formula generale, ſarà $\frac{ydz^2}{v} = dxdz^2 + \frac{pdydx^2}{y}$ $- dpdx^2$: ma $dz = \frac{qdx}{y}$; dunque $\frac{q^2dx}{r} = q^2dx - pydy - y^2dp$, ed eſſendo $dx = \frac{ydy}{p}$, ſarà in conſeguenza $\frac{q^2dy}{r} = q^2dy + p^2dy - ypdp$. Trattanto ſi trova eſſere $p^2 = q^2 - y^2$, e $pdp = qdq - ydy$. e fatte le ſoſtituzioni, $\frac{q^2dy}{r} = 2qdy - ydq$, cioè moltiplicando tutti i termini per y, e dividendoli per q^2, $\frac{ydy}{r} = \frac{2qydy - y^2dq}{qq}$, ed integrata l' equazione,

$$\int \frac{ydy}{r}) \pm b = \frac{y^2}{q}.$$

Tirata poi dal polo B alla CF la perpendicolare BK, ſaranno in proporzione continua le rette CF, CB, CK; dunque $\frac{y^2}{q} = CK$, ch'io chiamerò t, e conſeguentemente $\int \frac{ydy}{r} = t \pm b$.

Altra Soluzione.

Così, o in ſimil maniera avrebbe a procederſi, quando ſi ſtimaſſe proprio di valerſi delle formule già ritrovate, o pure la noſtra Analiſi ci conduceſſe ad una eſpreſſione implicata con le ſeconde differenze; giacchè non è ſempre conceſſo nello ſcioglimento d'una queſtione lo ſcoprire a prima viſta la ſtrada più facile. Per altro ſeguitando i veſtigj ed il metodo del dottiſſimo Sig. Jacopo Ermanno indicato nel ſettimo Giornale d' Italia pag. 194., in due parole ſi ſoddisfarà al Problema propoſto.

Condotta dal punto B alla DG la normale BN infinitamente proſſima alla BK, ſtante il parallelismo delle due rette CM, BK perpendicolari alla retta CG per la coſtruzione, e dell'altre due CD, BN normali alla linea DG, l'angolo MCD ſarà eguale all'angolo KBL, e di più al CGD per la proprietà de' raggi oſculatori; dunque ſaranno ſimili i due ſettori BKL, GCD, e così GC: CD:: BK: KL: ma CD: DI:: CB: BK; dunque ex æquo perturbate GC, r: DI, dy:: CB, y: KL, dt cioè $\frac{ydy}{r} = dt$.

CO-

COROLLARIO I.

Stimo ſuperfluo l'avvertire, che l'accennata equazione può ſempre ridurſi ad una differenziale del primo grado, in cui ſono ſeparate le indeterminate; imperocchè ſi hà almeno traſcendentemente per y, e le coſtanti la ſommatoria $\int \frac{ydy}{r}$, ed eſſendo queſta più, o meno la coſtante $b = t = \frac{y^2}{q}$, ſarà $q = \frac{y^2}{t}$, cioè $q^2 = p^2 + y^2 = \frac{y^4}{t^2}$, e $p = \frac{\sqrt{y^4 - t^2y^2}}{t} = \frac{ydy}{dx}$, o pure $dx = \frac{tdy}{\sqrt{y^2 - t^2}}$, il che ec.

COROLLARIO II.

Se poi ſi deſſe in qual ſi ſia modo per y, e le coſtanti la linea CH intercetta fra il punto della curva C, e la normale tirata dal centro oſculatore G all'ordinata CB, ſi ſcioglierà facilmente il problema nella infraſcritta maniera. Poſta CH $= z$, è manifeſto dalla premeſſa ſoluzione eſſere $\frac{ydy}{r} = dt$, e verificandoſi l'analogia CB, y: CK, t:: GC, r: CH, z, ſarà $\frac{zy}{t} = r$ e ſoſtituito in luogo di r queſto valore, avremo $\frac{dy}{z} = \frac{dt}{t}$, ed integrando ec.

COROLLARIO III.

Ma quando le curve cercate aveſſero relazione al loro aſſe, in quel caſo ripetendo la noſtra formula generale $\frac{q^2dy}{r} = 2qdy - ydq$, dalla ſeconda parte dell'equazione dovrebbe ſottrarſi la quantità qdy; onde l'eſpreſſione premeſſa ſi riduce alla ſeguente $\frac{q^2dy}{r} = qdy - ydq$, o pure $\frac{dy}{r} = \frac{qdy - ydq}{qq}$, la quale ſommata da $\int \frac{dy}{r} = \frac{y}{q} \pm b$. Similmente nelle curve all'aſſe data in qualunque forma per y la retta CH $= z$, ſarà $\frac{dy}{z} = \frac{dy}{y} - \frac{dq}{q}$.

SCOLIO I.

Se bene il Problema, a cui ho ſoddisfatto, è generale tanto per la ſua eſtenſione, quanto per l'uſo; con tutto ciò molto più generale dello ſteſſo Problema ſi è la maniera di ſcioglierlo, al progreſſo della quale fatta la debita refleſſione, ſi ſcoprirà, che poſte le differenze delle coordinate d'una curva eguali a dx, dy, e preſa la prima come coſtante, eſſendo variabile la ſeconda, il che può farſi in qual ſi ſia caſo; ſe ſi combineranno in qualunque forma poſſibile le grandezze date per y, e le differenziali dx, dy, ddy, e di più le loro dignità, o prodotti, purchè nella formula non v'entri l'indeterminata x, o le quantità per eſſa date, ſempre l'equazione differenziale del ſecondo grado potrà ridurſi ad una del primo, valendoſi delle normali, e ſunnormali, tangenti, e ſuttangenti, o d'altre rette analoghe, conforme richiederà la facilità del calcolo, e la maggior ſemplicità della ſoluzione. Fatta poi la riduzione, ſuppoſto che in ogni incontro non ſieno ſeparabili le indeterminate non ſarà queſto diſetto del metodo ſpiegato; ma piuttoſto del metodo inverſo delle differenziali del primo ordine, che non è per anche ridotto all'intiera ſua perfezione.

Eccone un'eſempio de' più compoſti. Nel tentare un Problema di cui per ora darò la ſola finteſi, riſerbandomi ad altra congiuntura di pubblicarne l'analiſi, mi ſono incontrato nella ſeguente equazione d'una curva riferita al ſuo aſſe $yddy + dy^2 + dydx = \frac{ydy\sqrt{dx}}{\sqrt{dy}}$. Sia p la ſunnormale della curva, e per le coſe di ſopra eſpoſte avremo $yddy = dpdx - \frac{pdydx}{y}$. Fatta pertanto la ſoſtituzione, $dpdx - \frac{pdydx}{y} + dy^2 + dydx = \frac{ydpdx - pdydx}{y\sqrt{dy}}.\sqrt{dx}$: ma $ydy = dx$; dunque fatta ſvanire la di$\frac{}{p}$ferenziale dx, $\overline{dp + dy}.\sqrt{py} = ydp - pdy$. A fine di ſeparar le indeterminate dell'ultima equazione, ſia $\sqrt{y} = z$, e $\sqrt{p} = u$, e fatta l'operazione, $udu + zdz = zdu - udz$, la qual eſpreſſione può ridurſi col metodo del Sig. Beraulli; imperocchè poſta $u = zt$, e fatta ſparire con l'equazione ſuſſidiaria la quantità u, ſarà $\frac{dz}{z} = \frac{\overline{a-t}.\,dt}{a^2 + t^2}$, e la coſtruzione dipenderà dalla quadratura del circolo, e dell' iperbola Apolloniana.

Ma

Ma forſe ſi ridurrà l'equazione $udu + zdz = zdz = zdu - udz$ più elegantemente nel modo infraſcritto. S' intenda deſcritta la curva MBC (Fig. 2.), e pongaſi AE $= u$, ed EB normale ad AE $= z$, indi traſportata l'equazione della curva all'aſſe ad un'altra equazione riferita al punto A, ſi oſſervi eſſere il membro $zdu - udz =$ al trilineo differenziale ABD $= mdn$, chiamata AB m, e dn il minimo arco BD; dunque $udu + zdz = mdn$: ma $udu + zdz = mdm$, ed in conſeguenza $mdm = mdn$, ovvero $dm = dn$. ſarà pertanto la curva MBC una logaritmica ſpirale. Preſa dunque fra l'unità, e l'abſciſſa AE la media proporzionale AI, e fra l'unità, e la BE la media IF, per il punto F, ed altri determinati in ſimil maniera paſſi la curva LGF, e finalmente ſi deſcriva una nuova curva, la cui ſunnormale ſia data per l'applicata, come l'abſciſſa AI è data per l'ordinata IF, il che non ſarà difficile agli Analiſiſti, e ſi avrà fatto quanto doveva farſi.

SCOLIO II.

Reſta, che ſi metta in chiaro la coſtruzione di tutte le curve, che rimirano un punto fiſſo, quando però ſiano ſeparate l'indeterminate; giacchè per quelle, che anno relazione all'aſſe, la coſa è per ſe ſteſſa facile, e piana. Io mi ſervo di queſto modo meccanico. Suppongo, che la curva da deſcriverſi ſia riferita al ſuo aſſe, e la coſtruiſco colle regole note; indi ſtando rigide le applicate reſtringo tutta la lunghezza dell'aſſe in un punto, di modo che ſi generi la convoluta: dico, che queſta ſarà la curva cercata.

Io non mi eſtendo in iſpiegare più diligentemente sì fatta ſorte di coſtruzione, perchè molti Geometri, fra' quali Jacopo Gregorio, ed il Barovvio, anno parlato a baſtanza di queſto genere di convoluzione: aggiungo bensì, che con l'occaſione di eſaminar la materia, ho ſciolto il ſeguente Problema, cioè: trovare una curva all'aſſe, che convoluta reſtituiſca ſe medeſima, ed ho ſcoperto eſſere queſta una proprietà mirabile della Parabola ordinaria.

Sia la Parabola AC (Fig. 3.), il cui vertice A l'aſſe AF, ed il foco B, e preſa nell' aſſe prolungato AD $=$ AB, s'intenda condotta la perpendicolare DE. Dal punto C ſegnato ad arbitrio nella periferia della Parabola ſi tiri l'ordinata CE, e la CB al foco: dico, che fatta la convoluzione della figura DACE, ſi traſformerà queſta nel trilineo ACB. Quanto è ſtato difficile lo ſcoprire l'accennata verità col mezzo dell'analiſi, altrettanto riuſcirà facile il dimoſtrarla per via di ſinteſi.

Facendo poi paſſaggio dalla coſtruzione meccanica alla geometrica, ſia la curva MBC (Fig. 2.) riferita al punto fiſſo A, la di cui ordinata AB $= y$, e l'arco infinitamente picciolo BD $= dx$, e ſi eſprima la natura della curva con l'equazione $z dy = dx$, nella quale z ſi ſuppone data in qualſiſia modo per y, e le coſtanti. La linea AEL rappreſenti l'aſſe della curva, e fatto centro in A, deſcrivaſi alla diſtanza arbitraria AL eguale all'unità, o a qualche altra retta cognita, conforme alle

con-

condizioni della curva, l'arco di circolo L G F, e fatta la preparazione come nella Figura, pongaſi l'elemento dell'arco L G, cioè G F $= du$.

Perchè i ſettori A B D, A F G ſono ſimili, ſarà A B, y : B D, dr :: A F, a : F G, du; dunque $dx = y\,du$; ma $dx = z\,dy$; dunque $\frac{z\,dy}{y} = du$,

ed integrando, $\int \frac{z\,dy}{y} = u$. Si raccoglie dalla premeſſa ſoluzione, che ſe la retta A I verrà poſta $= m$, il minimo arco F G $= du$ potrà eſprimerſi in un' altra forma, e ſarà $du = \frac{dm}{\sqrt{a^2 - m^2}}$. Se dunque l'altro membro $\frac{z\,dy}{y}$ con le debite ſoſtituzioni potrà ridurſi alla formula $\frac{dm}{\sqrt{a^2 - m^2}}$,

o ad altra equivalente, la curva M B C ſarà ſempre Algebraica, ed in ogni altro caſo traſcendente.

ESEMPIO I.

La curva M B C abbia la ſua ſottangente coſtante $= a$; dunque $\frac{a\,dy}{y} = dx$, ed $\frac{a\,dy}{yy} = du$, e ſommata l'equazione, $a^2 - yu$, cioè

$u : a :: a : y$.

Coſtruzione. Sia la retta A L raggio dell'arco L F data di poſizione, e tirata ad arbitrio la linea A F, ſia come l'arco F L al ſemidiametro A L, così la ſteſſa A L ad A B, ed il punto B ſarà nella curva cercata.

ESEMPIO II.

Sia propoſta l'equazione della curva M B C $\frac{y\,dy}{\sqrt{2ay - y^2}} = dx$, o pure

$\frac{dy}{\sqrt{2ay - y^2}} = du = \frac{dm}{\sqrt{a^2 - m^2}}$. Fatta pertanto $y = a - n$, ſi avrà

$\frac{dy}{\sqrt{2ay - y^2}} = \frac{-dn}{\sqrt{a^2 - n^2}} = \frac{dm}{\sqrt{a^2 - m^2}}$; dunque $n = m = a - y$.

Coſtruzione. Pongaſi F B $=$ A I, ed il punto B ſarà nella curva deſiderata. La curva M C B è la più ſemplice fra l'Epicicloidi, e ſi gene-

nora quando un circolo ſi rivolge ſopra un'altro circolo eguale, eſſendo il punto A principio della rotazione. Nello ſteſſo tempo ſi rifletta, che ſe ſi foſſe deſcritta una curva all'aſſe con l'equazione $dx = \frac{ydy}{\sqrt{2ay-y^2}}$, queſta ſarebbe ſtata la più ſemplice fra le Cicloidi, dal che ne ſegue, che l' Epicicloide ſuddetta è la convoluta della Cicloide ordinaria.

La curva del primo eſempio verrebbe deſcritta da un mobile, che ſi portaſſe al ſuo centro con una forza in proporzione reciproca triplicata della diſtanza; quantunque in queſta ipoteſi poteſſe aver il ſuo luogo anche la ſpirale longaritmica: ma ſe un corpo con relazione al ſuo centro deſcriveſſe l'epicicloide del ſecondo eſempio, la forza centrale ſarebbe reciprocamente come il quadrato-quadrato della diſtanza, ed il centro ſarebbe il punto A principio della rotazione.

Queſta proporzione reciproca quadruplicata, che fin'ora non è ſtata conſiderata da' Matematici, non è arbitraria, o geometrica, ma reale, e fiſica, non meno dell'altra tanto famoſa, in vigor della quale anelano i corpi al loro centro con una legge, che ſerba la ragione reciproca de' quadrati. L'illuſtre Sig. Newton, ed alcuni altri Matematici Ingleſi anno fatta rifleſſione, che certi corpi, come i magnetici, vengono attratti dal centro, o per dir meglio, vengono ſpinti verſo il centro con una proporzione maggiore della reciproca triplicata; e ſe non mi tradiſcono alcune ſperienze da me fatte con tutta la poſſibile diligenza, poſſo dire con coraggio, che ſi verifica la legge ſopra eſpoſta, e che di più ſono tali, e tante le circoſtanze, che la confermano, ch'io non poſſo ragionevolmente metterla in dubbio.

Ma già che s' è fatta menzione delle forze centrali, gioverà forſe per dar un ſaggio del noſtro metodo, ſciogliere il decantato Problema inverſo delle forze predette nel voto. Sia data in qualſivoglia modo per l'ordinata y la forza centrale $f = \frac{ds^2-yddy}{y^3dx^2}$, mentre ſuppongaſi dx come coſtante. Aſſunta poſcia la ſuttangente della curva $= z$, col mezzo dell' equazione $ydx = zdy$, fatta ſparire in primo luogo la ſeconda differenziale ddy, indi la dx, ſi perverrà all'equazione $fdy = \frac{dy}{y^3} + \frac{dz}{z^3}$, la quale integrata, non omeſſa l'addizione delle coſtanti, darà la formula generale eſpreſſa con le ſue differenze, non diſſimile alle altre, che vanno per le mani degli eruditi.

SCHE-

SCHEDIASMA II.

Data in qualſivoglia modo per la curva, che dee deſcriverſi, la eſpreſſione del raggio combaciante, determinare la curva medeſima.

QUando mi cadde in penſiero di eſporre in pubblico nel Tomo undecimo del Giornale de' Letterati d'Italia pag 204. la mia ſoluzione del problema inverſo intorno i raggi oſculatori, altra mira non ebbi, ſalvo che di ſpianare un ſentiero a coloro, che non ſi erano per anco internati ne' più profondi miſterj del calcolo degl'infiniti; acciocchè poteſſero giugnere felicemente a ſoddisfare alle più ardue quiſtioni della pura, e della miſta Geometria. Mi piacque allora di proporre il problema ſotto la forma più ſemplice, e che più viene ad uſo, ſupponendo, che il valore del ſemidiametro combaciante foſſe dato in qualſia maniera per una, o per l'altra delle coordinate: ma perchè bene ſpeſſo può intervenire, che la funzione del raggio diaſi per le toccanti, per le normali, e per altre rette analoghe, e qualche fiata per la curva medeſima, che ha da coſtruirſi; ho meco ſteſſo diviſato per compimento della materia d'aggiugnere alla prima un'altra diſſertazione.

PROBLEMA PRIMO.

S'intenda dunque deſcritta (Fig 4.) la curva ACE, che abbia relazione al ſuo aſſe AB, ed il cui raggio oſculante EG ſia dato in qualunque maniera per l'arco AC. Pongo conforme il ſolito l'aſſiſſa AB$=x$, l'applicata BC$=y$, e la curva AC$=s$, ed in conſeguenza i tre elementi CF, FE, CE ſaranno dx, dy, ds. Appreſſo ſia il raggio EG$=r$ dato per AC, cioè a dire per s, la toccante HC$=t$, e la ſuttangente HB$=p$.

Primieramente egli è certo eſſere la formula eſprimente il valore del raggio oſculatore, ſuppoſta ds coſtante $\frac{dx\,ds}{ddy} = r$, la quale maneggiata

Si raccoglie da una lettera del Sig. Bernardino Zendrini de' 18. Febbrajo 1715. diretta all'Autore, e da una copia di quel tempo del preſente Schediaſma II, che dovea queſto inſerirſi nel Tomo ventеſimo del Giornale de' Letterati d'Italia, e formare in eſſo l'Articolo X. Non eſſendoſi allora ſtampato, è comparſo alla luce tradotto in latino ed arricchito d'una Appendice, ſolamente l'anno 1747. nella Parte terza del Tomo ſecondo de' Comentarj dell'Inſtituto di Bologna. La Dottiſſima Signora Conteſſa Donna Maria Agneſi dà un eſempio eſtratto di queſto Schediaſma, e del ſuperiore al fine del Libro IV. delle ſue Inſtituzioni Analitiche, che uſcirono in Milano l'anno 1748.

ta col metodo ſpiegato nella citata diſſertazione avremo $\frac{yds}{dy} = t$ e preſe le differenze in ordine all'ipoteſi di ds coſtante, $dt = \frac{dy^2ds - ydsddy}{dy^2}$, vale a dire $\frac{dy^2ds - dy^2dt}{yds} = ddy$, o pure $dy^2ds - dy^2dt = \frac{ydxds^2}{r}$.

Ma eſſendoſi meſſa la ſuttangente della curva $= p = \frac{ydx}{dy}$, o $\frac{pdy}{y} = dx$, ſe col mezzo di queſta equazione ſi farà ſparire nella formola principale la fluſſione dx, ſi avrà $dyds - dydt = \frac{pds^2}{r}$, e collocando opportunamente in vece di ds il ſuo valore $\frac{tdy}{y}$, ſarà la premeſſa equazione ridotta alla equivalente $\frac{tdy - ydt}{tp} = \frac{ds}{r}$. Il ſecondo membro $\frac{ds}{r}$ può ſempre ſommarſi almeno traſcendentemente; giacchè nel noſtro caſo r altro non è, ſe non ſe una funzione arbitraria della curva s.

Nel primo poi $\frac{tdy - ydt}{tp} = \frac{tdy - ydt}{t\sqrt{tt - yy}}$, ſurrogato in cambio di p il ſuo valore $\sqrt{tt - yy}$, ſi ſeparano con facilità le variabili; concioſſiachè poſta $q = \frac{y}{t}$, ed iſtituite le debite ſurrogazioni, ſvaniranno ambo le variabili y, t, e reſterà ſemplicemente $\frac{dq}{\sqrt{1 - qq}} = \frac{ds}{r}$.

In oltre ſe nella eſpreſſione $\frac{tdy - ydt}{tp} = \frac{ds}{r}$, per mezzo dell'equazione $pp + yy = tt$, farò che ſi dilegui la ſpezie t, ed in iſcambio che compariſca la p, troverò $\frac{pdy - ydp}{pp + yy} = \frac{ds}{r}$, e fatta $\frac{y}{p} = z$, ne riſulterà la formola libera dalla meſcolanza delle variabili $\frac{dz}{1 + zz} = \frac{ds}{r}$.

Dalle coſe ſin quì dimoſtrate ſi raccoglie, che tanto il valore della curva s, quanto del raggio r, e della ſommatoria $\int \frac{ds}{r}$ ſi vede noto

o algebraicamente, o trascendentemente per z, e di conseguenza, disposta l'equazione come segue $ds = \frac{rdz}{1+zz}$, non si farà qualsifia confusione delle variabili: il che pure dee dirsi dell'altra equazione. $\frac{rdq}{\sqrt{1+q^2}} = ds$.

Ora si sa essere $ds = \frac{tdy}{y}$, e $\frac{y}{t} = q$; dunque $\frac{dy}{q} = \frac{rdq}{\sqrt{1-qq}}$ ovvero $dy = \frac{rqdq}{\sqrt{1-qq}}$. E chi volesse servirsi della formola $z = \frac{y}{p}$, con un picciolo giro di computo scoprirebbe $ds = \frac{\sqrt{pp+yy}.dy}{y} = \frac{\sqrt{1+zz}.dy}{z} = \frac{rdz}{1+zz}$ e finalmente $dy = \frac{rzdz}{\sqrt{1+zz}.\sqrt{1+zz}}$.

Ed eccoci pervenuti a due nuove espressioni libere dalla complicazione delle indeterminate, in cui si ritrova l'elemento dy dell'applicata dato per le funzioni dell'arco s; mentre le tre specie q, z, r, combinate colla curva s formano altrettante equazioni, che si riducono a luoghi conosciuti. Ristringendo per tanto i termini, le formole, che abbiamo per mano, si tramuteranno nella più semplice $dy = \omega ds$, ovvero in un' altra equivalente $udy = ds$; imperciocchè, se l'ordinata y è data per la funzione $\int \omega ds$, ne segue, che la curva s sarà data altresì per una funzione dell'applicata, quale si è $\int udy$; essendosi già scoperta u data in qualche modo per y.

Posta $udy = ds$, sarà $u^2dy^2 = ds^2 = dx^2 + dy^2$; dunque $\sqrt{uu-1}.dy = dz$, espressione generale, che abbraccia tutte le curve delle quali siamo andati in traccia nel problema, di cui si è data la soluzione.

Dee avvertirsi, che ambo le quantità differenziali $\frac{dq}{\sqrt{1-qq}}$, $\frac{dz}{1+zz}$ si riducono alla flussione d'un arco di cerchio esposta o per il seno, o per la toccante. Quinci se l'elemento $\frac{ds}{r}$ sarà algebraicamente sommabile, la rettificazione delle curve cercate, ed in conseguenza il valore del semidiametro combaciante dipenderà dal tetragonismo del circolo, il quale tetragonismo c'entrerà, qualunque volta l'integrale $\int \frac{ds}{r}$ si ridur-

rà ai logaritmi, o a qualche quadratura di genere ſuperiore. Ma ſe la ſommatoria ſuddetta ricade nelle formole proprie degli archi circolari; allora tanto la miſura della curva, quanto il valore del raggio può eſſere algebratico. In tal caſo è fuor di dubbio, che le quantità s, r, q, z, ſi riguardano vicendevolmente con una data relazione analitica: ma che alla quantità u convenga una tal proprietà, è facile a dimoſtrarſi.

Attelochè s, ed r ſi danno in ordine alla ipoteſi algebraicamente a cagion d'eſempio per z, e z per $\frac{y}{p}$, cioè per l'ordinata, e la ſuttangente; ſi ricava ch'eſſendo $p = \frac{ydx}{dy}$, ſarà $\frac{pdy}{y} = dx$. Queſto valore di dx ſi ſurroghi nell'equazione generale delle curve $dx = \sqrt{uu-1}\,.\,dy$, ed abbiaſi $\frac{p}{y} = \frac{1}{z} = \sqrt{uu-1}$, e ſi conchiuda eſſere u data per z, e conſeguentemente per s. Non ſi dee frattanto ſtendere la rifleſſione fino all' applicata y almeno generalmente: ed in fatti la rettificazione delle noſtre curve non ſi dà analiticamente per le coordinate, ſe non ſe in un ſolo incontro; mentre cioè l'equazione $dy = \omega ds$ ammette integrazione algebratica nell'omogeneo di comparazione.

Sia per eſempio s in qualſivoglia forza data algebraicamente per z, ed eſſendo $ds = \frac{tdy}{y}$, e $\frac{t}{y} = \frac{\sqrt{1+zz}}{z}$; dunque $dy = \frac{zds}{\sqrt{1+zz}}$. Pongaſi $s = z$, nel qual caſo ſarebbe il raggio oſculatore $r = 1 + ss$, e l'equazione generale ſi trasformerà nella particolare $dy = \frac{zdz}{\sqrt{1+zz}}$, laonde integrando ommeſſa l'aggiunta della coſtante, $y = \sqrt{1+zz}$. E pure $\sqrt{yy-1} = s = z$, ed $r = yy$. La equazione per tanto della curva per rapporto alle coordinate ſarebbe $\frac{dy}{\sqrt{yy-1}} = dx$, che ſi coſtituiſce ſuppoſta la quadratura della iperbola.

Sia di bel nuovo $ds = z^{n-1}dz$, o ſia $s = \frac{z^n}{n}$, e $dy = \frac{z^n dz}{\sqrt{1+zz}}$. Queſta equazione ſarà analiticamente integrabile, ogniqualvolta l'eſponente n ſia un numero intiero, ed impari: ma ſe foſſe pari, la ſomma-

toria dell'omogeneo di comparazione si avrebbe col mezzo dei logaritmi, o del tetragonismo iperbolico. Negli altri casi, posto cioè l'indice n o negativo, o rotto, l'affetto dal più, o dal meno, rimando il Lettore a quegli Analisti, che delle premesse formole an di proposito ragionato.

Queste osservazioni non sono affatto inutili; conciossiachè ci fanno chiaramente vedere, che bene spesso la espressione del raggio combaciante si riduce dalla funzione della curva a quella dell'ordinata.

COSTRUZIONE.

Espongasi l'indeterminata AB (Fig. 5.), che si chiami s, e ci rappresenti gli archi variabili della curva cercata: e perchè una delle nostre fondamentali equazioni era $dy = \omega ds$, in cui si dimostrava data per s, si metta l'applicata $BC = \omega$, e s'intenda descritta la curva AC; egli è manifesto essere lo spazio curvilineo $CAB = \int \omega ds = y$ coordinata della curva, che dee costruirsi.

Appresso dalla equazione $dy = \omega ds$ si passi all'analogia $\omega : 1 :: dy : ds$: ma s'era già stabilito $ds = u dy$, dunque ω, 1, u saranno tre quantità in proporzione continua. Facciasi pertanto come BC all'unità, così l'unità ad un'altra grandezza $= u$.

Quinci si descriva la curva AF, la di cui assissa AE s'uguagli al mistilineo $ACB = y$, e sia l'applicata $EF = \sqrt{uu-1}$, e conseguentemente l'area AFE uguale alla somma $\int \sqrt{uu-1}.dy = x$. Per la qual cosa le coordinate della curva, di cui andiamo in traccia, si esprimono, una cioè x per lo spazio FAE, e l'altra cioè y per lo spazio ABC.

Resta, che si determini geometricamente la curva AC. Per le cose superiormente dette si ha $\frac{ds}{r} = \frac{dz}{1+zz}$, e per ottenere una più elegante effezione, instituisco la preparazione seguente.

Col raggio IH descrivo il mezzo cerchio HLK (Fig.6.), ed alla estremità H del diametro alzo la normale HUX, che per essere toccante del circolo, sarà $= z$, giusta le specie da me assunte. Quinci passando alle integrazioni, $\int \frac{ds}{r} = \int \frac{dx}{1+zz}$ = all'arco circolare HR: ma quest'arco si può esprimere diversamente; conciossiachè, posta l'assissa $HP = q$, e l'applicata $PR = \sqrt{2q-qq}$, si trova la flussione $RT = \frac{dq}{\sqrt{2q-qq}}$; dunque $\int \frac{ds}{r} = \int \frac{dq}{\sqrt{2q-qq}} = HR$. Conseguentemente per

una

una funzione dell'arco ſteſſo, ovvero dell'aſſiſſa HP $= q$ ſarà data generalmente la curva s, la quale potrà eſponerſi per l'applicata PM d'una curva cognita HMN.

Appreſſo richiamata a memoria l'altra equazione, viene a dire $dy = \omega ds = \frac{rzdz}{1+zz \cdot \sqrt{1+zz}}$, eſſendo $\frac{rdz}{1+zz} = ds$; ſi avrà $\omega ds = \frac{2ds}{\sqrt{1+zz}}$, o pure $\omega = \frac{2}{\sqrt{1+zz}}$. Verificandoſi poi l'analogia

IR $= 1$: RP $= \sqrt{2q-qq}$: : TU $= \sqrt{1+zz}$: UH $= 2$, ſi ſcoprirà $\frac{z}{\sqrt{1+zz}} = \sqrt{2q-qq}$; dunque $\omega = \sqrt{2q-qq} =$ PR. In ordine a ciò paragonando la Figura 6. colla 5. ſi raccoglie, che le rette PM, PR ſaranno le ordinate corriſpondenti della curva AC, cioè PM $=$ all'aſſiſſa AB $= s$, e PR $=$ all'applicata BC $= \omega$: lo che rimaneva ad inveſtigarſi.

Nella coſtruzione generale ſi è ommeſſa l'aggiunta delle coſtanti, laſciando a' Geometri la cura di determinarle ne' caſi particolari.

Soluzione ſeconda.

La formula del raggio oſculante eſpoſta colle ſeconde differenze ſi era $\frac{ds}{r} = \frac{ddy}{dx}$, nella quale veniva aſſunto ſiccome coſtante l'elemento ds della curva, che dee coſtruirſi. Ora coſtituendo un'altra eſpreſſione equivalente, in cui le coſtanti non abbian luogo, ci ſi affaccia la ſeguente $\frac{ds}{r} = \frac{dsddy - dyddy}{ds\,dx}$. Per far iſvanire le ſeconde fluſſioni, ci ſi preſenti l'omogeneo di comparazione ſotto queſt'altro oggetto $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{ddy}{dy} - \frac{dds}{ds}$, indi ſi oſſervi, che le quantità $\frac{ddy}{dy}$, $\frac{dds}{ds}$ ſono integrabili per via de' logaritmi, e la loro ſommatoria ſi è $ldy - lds$, che fatta $= lp$, naſcono le due equazioni $\frac{ddy}{dy} - \frac{dds}{ds} = \frac{dp}{p}$, e $\frac{dy}{ds} = p$. Sarà pertanto $\frac{ds}{r} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dp}{p}$: ma $p = \frac{dy}{ds}$, e $\frac{dy^2}{pp} = ds^2 = dx^2 + dy^2$; dunque

dx

$dx = \frac{\sqrt{1-pp}}{p} \cdot dy$. Fatta opportunamente la ſoſtituzione de' valori, troveremo $\frac{ds}{r} = \frac{dp}{\sqrt{1-pp}}$, e ſcoperta queſta equazione, in cui ſono ſeparate le variabili, ſi proceda come nell'antecedente ſoluzione.

Nella formola $\frac{ds}{r} = \frac{dsddy - dydds}{dxdx}$ preſa per coſtante ds, e meſſa $dy = pds$, dopo le debite operazioni, tornerà in campo la eſpreſſione $\frac{ds}{r} = \frac{dp}{\sqrt{1-pp}}$.

Pongaſi eſpreſſo dy in figura di coſtante, onde abbiaſi $\frac{ds}{r} = -\frac{dydds}{dxds}$, e fatta $ds = qdy$, o $dds = dydq$, e perciò $\frac{ds}{r} = -\frac{dy^2dq}{dxds}$, ed adoperate le convenienti ſoſtituzioni, perchè ſi dilegui col prodotto $dxds$, ſi ſcoprirà $\frac{ds}{r} = -\frac{dq}{\sqrt{qq-1}}$.

Aſſumaſi finalmente un'altra formola de' raggi oſculanti, a cagion d'eſempio $r = \frac{ds^3}{-dxddy}$, ovvero $\frac{ds}{r} = -\frac{dxddy}{ds^3}$, in cui ſi ſuppone coſtante l'elemento dx. ſia $z = \frac{dx}{dy}$, e $dz = -\frac{dxddy}{dy^2}$: di conſeguenza ſarà $\frac{ds}{r} = \frac{dy^2dz}{ds^2}$: ma nella ipoteſi di $dx = zdy$ avraſſi $ds^2 = dx^2 + dy^2 = \sqrt{1+zz} \cdot dy^2$, e ſurrogato in cambio di ds^2 queſto valore, riſulterà $ds = \frac{dz}{1+zz}$.

In qualunque maniera ci adoperiamo ſempre interviene, nè può ſuccedere altrimenti, che l'integrale $\int \frac{ds}{r}$ ha rapporto alla miſura degli archi circolari, la differenza de' quali ci viene eſpreſſa, o per via de' ſeni, o per mezzo della ſecante, o della tangente.

Solu-

Soluzione terza.

Dalle ſoluzioni analitiche paſſo ad una geometrica, che in un ſol colpo tronca il nodo della queſtione, ſenza che ci ſia biſogno di ricorrere alle formole da altri induſtrioſamente ſcoperte.

Nella curva cercata, che ſuppongo deſcritta, ſegno le due porzioni infinitesime, ed uguali AC, CI (Fig.7.), e tiro le due ſecanti infinitamente proſſime LCE, KCI. Le due normali CG, IG alle due corde AC, CI s'uniſcono nel punto G, e conſeguentemente determinano il raggio combaciante CG dato per una funzione della curva. Quinci condotte dai punti C, I le ordinate CB, ID, e di più la fluſſione CF dell'aſſiſſa parallela all'aſſe HD; fatto centro in C alla diſtanza minima CI deſcrivo l'archetto IE, e col ſemidiametro CN eguale ad una qualunque coſtante, l'arco di cerchio NLK, il di cui elemento LK reſterà intercetto dalle due ſecanti CAL, ICK.

Dalla preparazione ſi deſuma eſſere ſimili i due ſettori CGI, KCL ſiccome ſimili al terzo infinitesimo ICE; dunque aſſunto il ſemidiametro CN pari all'unità, ſi avrà $\frac{CI}{CG} = LK$: ma CG ſi ſuppone data per la curva *c*CI; dunque la curva medeſima, ed il raggio combaciante ſarà dato per l'arco LN, cioè, (ſuppoſta la rettificazione della periferia, e delle ſue parti) per il ſeno LM, o pure per CM, e parimenti CI fluſſione della curva per una quantità differenziale dell'arco LN, o dei ſeni corriſpondenti LM, MC. Eſſendo poi ſimili i due triangoli LMC, CFE, o CFI, conformemente che le linee coſtituenti il primo triangolo ſerbano vicendevolmente una nota relazione; così lo ſteſſo dee dirſi delle tre rette infinitamente picciole, che compongono il ſecondo triangolo: laonde abbiamo tutto ciò, ch'era neceſſario per deſcrivere la curva cercata.

E quì ſi noti, che ſebbene il circolo CNL ſi cangia di poſizione, e che il ſuo centro C ſi applica ſucceſſivamente ad ogni punto della curva *c*AI; ciò non oſtante la ſoluzione è libera da qualunque ombra di paralogiſmo. Oltreche il raggio CN è ſempre lo ſteſſo; quello che più importa ſi è, che in qualſivoglia poſitura il punto N ſta ſempre fiſſo, ed è la comune origine di tutti gli archi NL creſcenti, o decreſcenti, aggiunto, o ſottratto, ſe così pare, un arco coſtante; onde la nuova origine ſi traſporti in un altro punto della periferia circolare, ma ſempre ugualmente diſtante dal punto N. Concepiſco, che l'ordinata CB parallela a ſe ſteſſa vada radendo col ſuo punto eſtremo C la curva CA*c*, e traſferiſca con ſeco il cerchio CNL: acquiſtata ch'eſſa abbia la poſizione, per eſempio *cb*; ſuccederà bensì, che le ſecanti *cl*, *ck* taglino l'arco *nl* ne' due punti *l*, *k* diverſi affatto dagli altri due L, K, che gli archi *nl*, NL non ſieno fra loro eguali: ma il punto *c* ſarà in ogni ſito il centro del circolo deſcritto col ſemidiametro *cn* = CN, ed il punto *n* lo

ſteſ-

ſteſſo ſteſſiſſimo coll'altro N; laonde gli archi creſcenti *nl*, NL avranno una comune origine.

COSTRUZIONE.

Il progreſſo del diſcorſo ci guida ad un' altra coſtruzione onninamente diverſa da quella, che ſi è dedotta dalla prima ſoluzione del problema.

Ed in fatti, eſſendo la curva cercata il ſuo raggio combaciante l'arco NL, ed i due ſeni LM, MC tutte quantità date l' una per l'altra, cioè le due prime per la ipoteſi, e le tre altre per il giro della preparazione, e pel raziocinio indi naſcente; ne ſegue, che prolungata, occorrendo, l'ordinata CB, e laſciata cadere ſopra eſſa dal centro G la perpendicolare GP, ci ſi preſenteranno le ſeguenti analogie
CL: LM:: GC: CP:: IC: CF. Ma l'elemento CI della noſtra curva ſi eſprime per il prodotto del ſemidiametro oſculante GC, nella fluſſione circolare LK; dunque CI = GC: LK, e conſeguentemente
CL: LM:: GC: CP:: GC. LK: CF.

Il primo analogiſmo ci fa vedere eſſere il co-raggio CP dato per una funzione dell' arco NL, o la ſeconda proporzione ci dà l'uguaglianza CP. LK = CF.

Con un ſimile andamento pervenuti alle analogie IC: CM:: CG: GP:: CI: IF, e meſſo in vece di CI il valore GC. LK, due illazioni ci ſi preſentano: una, che l'altro co-raggio GP ſi rende noto per una funzione dell'arco NL: la ſeconda, che ſi ha l'equazione GP. IK = FI, e con ciò ſi fanno manifeſti i valori delle due differenze CF, FI, e colle loro ſomme anco quelli delle due coordinate della curva in quiſtione riferita all'aſſe HB.

Stendaſi in una linea retta l'arco NLK, e ſegnato (Fig. 7., e 8.) in eſſa retta il punto *n* analogo al punto N, prendanſi le aſſiſſe *nl*, *nk* uguali agli archi creſcenti NL, NK; e tirate le due normali *lp*, *lq* in figura di ordinate, mettaſi la prima uguale al co-raggio CP, e la ſeconda all'altro co-raggio GP. Per i punti poi *p*, *q*, ed altri infiniti in ſimil maniera determinati deſcrivanſi le due curve *rp*, *sq*; egli è manifeſto, che lo ſpazio elementare *plk*, la di cui ſommatoria ſi è l'area miſtilinea *lnrp*, ſi trova uguale tanto al rettangolo CP. KL, quanto alla differenza CF dell' aſſiſſa ſpettante alla curva cercata cAI: dunque facendo tranſito alle integrazioni, per la menzionata area *lnrp* ſi determinerà la ſuddetta aſſiſſa. Similmente l'area differenziale *q.k* = GP. LK = FI ci dà per via delle ſommatorie da una parte lo ſpazio curvilineo *lnsq*, e dall' altro l'ordinata BC della noſtra curva integrale della fluſſione FI. Per la qual coſa applicati all'unità i due ſpazj *lnrp*, *lnsq*, eſprimono, il primo l'aſſiſſa, ed il ſecondo l'ordinata della curva, di cui ſi va in traccia lo che ec.

PRO-

PROBLEMA SECONDO.

Mentre s'intenda dato in qualunque modo per la curva *c*AC (Fig. 7.) il co-raggio PC, ch'io chiamerò u, si scioglierà agevolmente la quistione, servendosi delle cose premesse. Scelgo ad arbitrio una delle tre formole della seconda soluzione per esempio $\frac{ds}{r} = \frac{-dq}{q\sqrt{qq-1}}$: ma come GC $= r$: CP $= u$:: CI $= ds$: CF $= dx$; dunque $\frac{uds}{dx} = r$, ed in conseguenza $\frac{ds}{u} = \frac{-dqds}{qdx \cdot \sqrt{qq-1}}$. Ma per l'ipotesi $ds = qdy$, e $dx = \sqrt{qq-1}\,dy$; dunque avremo dopo le debite sostituzioni $\frac{ds}{u} = \frac{-dq}{qq-1}$.

Con lo stesso metodo, dato per la curva *c*AC l'altro co-raggio GP, scopriremo, posto GP $= z$, l'equazione $\frac{ds}{z} = \frac{-dq}{\sqrt{qq-1}}$. Quinci conchiuderemo, che siccome l'integrale $\int \frac{ds}{r}$ s'eguaglia ad una espressione dell'arco circolare; così le altre sommatorie $\int \frac{ds}{u}$, $\int \frac{ds}{z}$ si rinvengono eguali a quantità, che ci portano alla quadratura dell'Iperbola, o ai logaritmi.

Nelle quistioni proposte l'espressioni del raggio combaciante, o d'ambo le sottoscolatrici si suppongono date per le funzioni della curva, che dee descriversi, senza che c'entrino le coordinate; è perciò cosa chiara essere indifferente il considerare la nostra curva relativamente all'asse, o al foco. Ho prescelta la prima ipotesi siccome più semplice.

APPENDICE.

Giacchè sto maneggiando le formole differenziali del secondo ordine; piacemi di soggiungere un metodo venutomi in mente, e di cui non credo, che il più generale possa proporsi; perchè si stende a tutte le classi delle fluzioni, ed in ognuna d'esse abbraccia infiniti casi, ristretti però fra certi limiti, ed adempiute alcune condizioni, che io anderò succintamente esponendo. Ad una perfezione troppo eccellente, e superiore forse all'umano intelletto, si ridurrebbe il calcolo integrale,

ſe ci veniſſe fatto di comprendere ſotto un ſolo canone tutte le poſſibili formole.

Dico per tanto, che ſe nell'equazioni differenziali del ſecondo grado, affunto, o non affunto un primo elemento ſiccome coſtante, non ſi rinviene l'una, o l'altra delle variabili finite x, o y colle loro funzioni; la formola è ſempre riducibile alle prime fluſſioni. Gia ſe n'è dato un ſaggio nello ſcioglimento de' premeſſi problemi. Generalmente poi ſi operi, come nel ſeguente eſempio.

L' eſpreſſione de' raggi combacianti, meſſa dy coſtante, ſi è $\frac{-dxds^2}{dydds} = r$. Ora vogliaſi, che il raggio r ſia dato per una qualunque poteſtà della tangente $t = \frac{yds}{dy}$, onde abbiaſi $t^m = \frac{y^m ds^m}{dy^m} = r$, e conſeguentemente $\frac{-dxds^2}{dydds} = \frac{y^m ds^m}{dy^m}$. Prima d'ogni altra coſa egli è manifeſto, che l'equazione è contenuta ſotto il noſtro canone; avvegnachè ſebbene in eſſa ſi ravviſa la ordinata y alzata alla poteſtà indeterminata m; non ci ſi trova però, nè l'aſſiſſa x, nè taluna delle ſue funzioni.

E perchè ſi è preſa coſtante dy, per far ſvanire la ſeconda differenza dds, facciaſi $qdy = ds$, e differenziando, $dqdy = dds$, e meſſa in uſo la ſoſtituzione, $\frac{-dxds^2}{dqdy^2} = \frac{y^m ds^m}{dy^m}$, ovvero $\frac{-dx}{dq} = \frac{y^m ds^{m-2}}{dy^{m-2}}$. In luogo di ds^{m-2} ſi collochi il ſuo valore $q^{m-2} \cdot dy^{m-2}$, ed in vece di dx l'altro valore $\sqrt{qq-1} \cdot dy$, onde ci ſi preſenti la equazione $\frac{-dy \cdot \sqrt{qq-1}}{dq} = \frac{y^m q^{m-2} dy^{m-2}}{dy^{m-2}}$: la quale eſpurgata ci dà $\frac{-dy}{y^m} = \frac{q^{m-2} dq}{\sqrt{qq-1}}$. Perciò l'applicata y della curva da coſtruirſi è data per q, ed a vicenda q data per y: ma $dx = \sqrt{qq-1} \cdot dy$; dunque integrando, la ſpezie x, che ſegna l'aſſiſſa, ſi rende nota per l'ordinata y: lo che ec.

In un caſo particolare meſſo l'eſponente $m = 3$, onde i raggi oſculanti ſieno ſempre come i cubi delle reſpettive tangenti l'eſpreſſione $\frac{-dy}{y^m} = \frac{q^{m-2} dq}{\sqrt{qq-1}}$ ridurraſſi alla ſeguente $\frac{-dy}{y^3} = \frac{qdq}{\sqrt{qq-1}}$, e ſommando, $\frac{1}{2y^2} = \sqrt{qq-1}$. Ommetto la coſtante; perchè con aggiungerla non ſi di-

diverſifica nè punto nè poco la natura della curva. Ma ſi è trovata $dx\sqrt{qq-1}.dy$; collocato dunque in vece di $\sqrt{qq-1}$ il ſuo valore equivalente $\frac{1}{2y}$, ſarà $dx = \frac{dy}{2y^2}$, ed integrando, $x = c - \frac{1}{2y}$, e conſeguentemente $2xy = 2cy - 1$: luogo alla iperbola fra gli aſſintoti, della quale ci ſi affaccia una curioſa proprietà.

Già ſi è veduto, che ſe nelle equazioni differenziali del ſecondo grado non ſi ritrova l'indeterminata x, o l'altra y, c'è un metodo fermo di operare, che ci guida alle prime differenze: ſoggiungo, che in quelle del terzo ordine ſuccede lo ſteſſo, quando mancano amendue, e la equazione è libera dalle variabili finite.

Eccone un'eſempio. Sia $dxdddy + dx^2ddy = dx^4 + dy^4$; e ſia ſtata aſſunta come coſtante dx. Pongo $pdx = dy$; dunque $dpdx = ddy$, e $dxddp = dddy$. Fatte le debite ſoſtituzioni, avremo $dx^3ddp + dx^2dp = dx^4 + dy^4$: ma $dy^4 = p^4dx^4$; dunque $dx^3ddp + dx^2dp = dx^4 + p^4dx^4$, e dividendo per dx^2, ſarà $ddp + dxdp = dx^2 + p^4dx^2$. Così ſiamo giunti ad una eſpreſſione del ſecondo grado compreſa dal canone teſtè ſtabilito. E proſeguendo, metto $qdx = dp$, e differenziando nella ipoteſi di dx coſtante, $dqdx = ddp$, ed in ordine a ciò, $dqdx + dpdx = 1 + p^4 . dx^2$, o pure $dq + dp = \sqrt{1 + p^4} . dx$: ma $dx = \frac{dp}{q}$; dunque $dp + dq = \frac{1 + p^4}{q} . dp$. Speſſe fiate interviene, che le due variabili coſtruenti l'equazione ſieno imbrogliatiſſime, e preſſochè impoſſibili a ſepararſi: ma queſto non è difetto del metodo, che vado eſponendo. L'intoppo naſce dalla teorica delle primarie differenze, che maſſime, riſpetto allo ſviluppamento delle incognite, è lontana aſſai dalla ultima perfezione.

Avvanzo cammino, e dico, che nelle formole differenziali del quarto ordine, per conſeguire generalmente, che ſieno riducibili a quelle del primo, oltre le variabili finite anno da mancare o l'una o l'altra delle prime fluſſioni dx, dy colle loro funzioni. Dalle eſpreſſioni poi del quinto debbono reſtar eſcluſe ambedue. In quelle del ſeſto, oltre le menzionate quantità finite, ed infinitesime, o l'una, o l'altra delle ſeconde differenze ddx, ddy colle loro funzioni, ed ambo in quelle del ſettimo, e così di mano in mano all'infinito.

Eſempio del quarto ordine. Sia $d^4y + dxd^3y - dx^2ddy = 0$, e la coſtante aſſunta dx. Facciaſi conforme il ſolito $pdx = dy$, e conſeguentemente $dpdx = ddy$, $dxddp = d^3y$, $dxd^3p = d^4y$; e ſoſtituendo $dxd^3p + dx^2ddp - dx^3dp = 0$, ovvero $d^3p + dxddp - dx^2dp = 0$. In tal guiſa ſiamo arrivati ad una equazione del terzo grado, in cui non ſi trova alcuna quantità finita variabile. Si proceda dunque colla ſolita maniera, e dopo varie operazioni, mettendo $qdx = dp$, indi $2dx = dq$, ſi otterrà

la formola $zdz + zdq = qdq$, nella quale le indeterminate ſono ſeparabili per via de' metodi conoſciuti.

Non è difficile render ragione de' premeſſi canoni; concioſſiachè non adempiute le accennate condizioni, giunti che ſaremo col giro del noſtro metodo alle prime differenze, dopo aver fatto ſvanire le ſeconde, le terze ec., l'equazione indi naſcente conterrà non ſolo le incognite principali x, y, ma di più le aſſunte p, q ec. colle loro fluſſioni. In tali incontri non ſi ſa per lo più ſviluppare le indeterminate, o ridurle alle integrazioni. Gioverà in sì fatti caſi tentare la coſa per altre ſtrade, e mettere in uſo alcune particolari induſtrie con incertezza del buon eſito.

SCHEDIASMA III.

Riſpoſta ad alcune oppoſizioni fatte dal Sig. Giovanni Bernulli alla ſoluzione del Problema inverſo delle forze centrali nel voto in ragione reciproca de' quadrati delle diſtanze, pubblicata dal Sig. Jacopo Ermanno nel ſecondo Tomo del Giornale de' Letterati d' Italia Articolo XV.

IL dottiſſimo Sig. Jacopo Ermanno, mentre occupava il poſto di Pubblico Profeſſore di Matematica nell' Univerſità di Padova inſerì nel Tomo ſecondo del Giornale de' Letterati d' Italia una ſua elegantiſſima ſoluzione del problema inverſo delle forze centrali nel voto, limitando però la legge delle forze medeſime alla proporzione reciproca duplicata delle diſtanze. Ebbe egli la mala ſorte d'incontrare due famoſi Avverſarj, l'uno in Italia, e l'altro di là da' Monti: e quantunque alle difficoltà meſſe in campo dal primo abbia ſoddisfatto l'Autore ſteſſo, pubblicando replicate Diſſertazioni in ſua difeſa (ſopra il qual punto io non penſo di prender partito per non far mie le altrui controverſie) contuttociò ſuccede ora il ſecondo ſenza dubbio più formidabile, ed è il Sig. Giovanni Bernulli, il cui ſolo nome baſterebbe a dar peſo alle oppoſizioni, quando nelle materie analitiche non ſi doveſſe cedere il primo luogo alle dimoſtrazioni, e all'evidenza.

Nel comunicare che queſti fece alla regia Accademia di Parigi due ſoluzioni generali del problema mentovato, che ſi trovano regiſtrate nelle Memorie dell'anno 1710., v'aggiunſe anche quella del Sig. Ermanno accompagnata però da un eſame così ſevero, che ben ſi ſcopre aver lui preteſo con l'altrui paragone dare un maggior riſalto alle coſe proprie. Ma s'io non m'inganno, mi pare, che un ſoggetto per altro ver-

Leggeſi un tale Schediaſma nel Tomo XIX. del Giornale de' Letterati d' Italia, Articolo VII., impreſſo l'anno 1714.

verſatiſſimo in ſi fatte ſpeculazioni, ſiaſi laſciato ſorprendere dalla prima apparenza, e che tutte le riflettioni derivino dal non avere ben ponderata la forza, e l'eleganza della ſoluzione conrroverſa. Tutta dunque la diſputa verſerà, non ſopra il problema ſciolto, che non è ſoggetto ad oppoſizione; ma ſopra la maniera di ſcioglierlo, conforme il genio di queſto delicatiſſimo ſecolo, che avendo inſieme congiunte l'Analiſi e la Metafiſica, non fa tanto conto della verità ritrovata, quanto del metodo, con cui ſi ſcopre, e ſi manifeſta. Sarebbe deſiderabile che il Sig. Ermanno prendeſſe ſopra di ſe il carico della riſpoſta: ma perchè dalla gratitudine, e dall'amicizia gli vengono tolte di mano ſino le armi a difeſa, mi ſforzerò io, per quanto ſo, e poſſo, di ſupplir le ſue veci; ond'egli abbia almeno, di quanto rincreſcimento ſia ſtata in Italia la ſua partenza, e con quale parzialità ſi conſervi la ſua memoria.

Frattanto perchè il Lettore non abbia a mendicare altronde lo ſtato della quiſtione, regiſtrerò la ſoluzione del Sig. Ermanno tradotta fedelmente dalle citate Memorie dell'Accademia di Parigi.

Sia ABC (Fig. 9.) la curva cercata, LI il ſuo aſſe, S il centro delle forze, BC una particella infinitamente picciola della curva, ſopra la qual particella prolungata prendaſi CE = CB; dal punto E avendo tirata ED parallela a CS, e che incontri la curva nel punto D, ſieno DF, CG, BH parallele a LI, dalle quali verrà incontrata in F, G la picciola retta EG parallela a BI, e che incontri la CG in C.

Ciò fatto, chiamiſi SI = x, BI = y, ſi avrà SC = $\sqrt{x^2+y^2}$, BH, o CG = dx, CA, o EG = dy, e conſeguentemente CG = Cf, o DF = $-ddx$, EF = $-ddy$; ciò che darà il doppio del triangolo BSC, o CSD = $ydx - xdy$, ch'io ſuppongo coſtante; di maniera che i triangoli per la coſtruzione ſimili EDF, CSK renderanno ED = $-\frac{ddx\sqrt{xx+yy}}{x}$

Ora perchè il triangolo BSC è per ipoteſi coſtante, s'avrà DE in ragione della forza centrale al punto C, cioè a dire in ragione di $\frac{1}{xx+yy}$

o in ragione di $\frac{ydx-xdy}{xx+yy}^2$; onde riſulta l'equazione eſpreſſa con le ſeconde differenze $-addx = x.\frac{ydx-xdy}{xx+yy.\sqrt{x^2+y^2}}^2 = \overline{ydx-xdy}.$

$\frac{yxdx-x^2dy}{xx+yy\sqrt{xx+yy}}$, il cui integrale ſi è $-dx = \frac{-y}{\sqrt{xx+yy}}$. $\overline{ydx\,xdy} =$

ydy

$\frac{xdy - ydx}{\sqrt{xx+yy}}$, ovvero $-\frac{abx}{xx} = \frac{bxdy - by^2dx}{xx \cdot \sqrt{xx+yy}}$, la cui ſommatoria è pa-

rimente $\frac{ab}{x}$, o più generalmente $\frac{ab}{x} = c = b\,\frac{\sqrt{xx+yy}}{x}$ o pure $a = \frac{cx}{b}$

$= \sqrt{xx+yy}$. che è una equazione alle tre ſezioni del cono, vale a dire alla parabola, ſe $b = c$; all' elliſi, quando $b > c$; ed all'iperbola, in caſo che ſia $b < c$.

Eſaminiamo ora le oppoſizioni del Sig. Giovanni Bernulli. Per parlarvi con tutta libertà, dic'egli nella riſpoſta al Sig. Ermanno, la voſtra ſoluzione ſembra fatta a diſegno, adattata a ciò, che voi andavate cercando, ma che nel tempo ſteſſo era da voi conoſciuto. Infatti come mai ſenza una precedente notizia avreſte potuto ſapere, che per trovar l' integrale della voſtra equazione $-\frac{ddx\sqrt{xx+yy}}{x} = \frac{(ydx - xdy)^2}{xx+yy}$, biſognava

ridurla a $-ddx = \frac{ydx - xdy}{xx+yy} \cdot \frac{yxdx - x^2dy}{\sqrt{xx+yy}}$? Di più come ſenza ciò avreſte voi ſaputo tirare l'integrale di queſt'ultima equazione, ed in oltre l'integrale dell'integrale? poichè le indeterminate ci ſono talmente complicate, che il voler ſepararle ſarebbe intraprendere una fatica diſperata: e certamente vi ſarebbe riuſcito impoſſibile il ſommarle così confuſe, come da voi è ſtato fatto, ſe non aveſte ſubodorato, che le ſezioni coniche, le quali v'erano ſempre anzi gli occhi, ſoddisfacevano alla voſtra equazione differenziale del ſecondo ordine da voi felicemente incamminata al termine del voſtro viaggio, e che non vi è ſtato difficile di ridurre finalmente ad una equazione puramente algebraica.

Sin qui il Sig. Bernulli; ed io confeſſo di non ſapere per quale ſtrada ſia pervenuto il Sig. Ermanno alla ſommatoria bramata: ſo bene, che poco, o nulla gli ſarebbe giovato l'avere in viſta le ſezioni del cono; mentre cangiando ipoteſi, e prendendo di mira le curve medeſime riferite al loro centro, o altre curve già conoſciute per venire a capo della ſua ſoluzione, gli ſarebbe convenuto derivarla da principj diverſi, come vedremo a ſuo luogo; e perciò queſto profondo geometra ha limitata la ſua ſcoperta a quel ſolo caſo, in cui poteva più facilmente aver luogo riſerbandoſi poi di darne una ſoluzione più generale, ma meno ſemplice, per eſſere involuta fra quantità traſcendenti.

Per altro io ſono rimaſto attonito, in riflettendo, che il Sig Bernulli giudica diſperata la ſeparazione delle indeterminate nella formola del Sig. Ermanno, ed in conſeguenza la ſua doppia integrazione, o ſia riduzione a grandezze algebraiche. Io bramerei, che tutte l' equazioni

diſ-

differenziali foſſero ſimili alla propoſta, giacchè nel calcolo ſommatorio non ci ſarebbe più che deſiderare, ed avrebbeſi una volta ridotto alla intera ſua perfezione il metodo inverſo degli infiniti.

Sia dunque $-\frac{ddx \cdot \sqrt{x^2+y^2}}{x} = \frac{ydx-xdy}{xx+yy}$; egli è manifeſto, che eſſendoſi preſa $ydx-xdy$ coſtante, ſe divideremo la ſeconda fluſſione ddx per $ydx-xdy$, la grandezza, che ne riſulta, ſarà integrabile: quindi rigettate tutte le altre quantita nel membro corriſpondente dell' equazione reſta a vederſi, ſe ci ſia modo di ſeparar le variabili, e ſe fatta la ſeparazione ſi poſſa pervenire ad una integrazione algebraica. Avremo pertanto l' equazione eſpreſſa nella ſeguente maniera $\frac{-ddx}{ydx-xdy} = x \cdot \frac{ydx-xdy}{xx+yy \cdot \sqrt{xx+yy}}$.

Nel ſecondo membro la quantità $ydx-xdy$ ſi fa ſommabile com'è noto, mentre ſi divida per il quadrato y^2, ed in conſeguenza ſarà $\frac{ddx}{ydx-xdy} = \frac{xyy}{xx+yy \cdot \sqrt{xx+yy}} \cdot \frac{ydx-xdy}{yy}$. Prendo $\frac{ydx-xdy}{yy} = dp$, ed integrando, $\frac{x}{y} = p$: fatta in conſonanza di ciò l'opportuna ſoſtituzione, ſi ſcoprirà eſſere $\frac{-ddx}{ydx-xdy} = \frac{xydp}{xx+yy \sqrt{x^2+y^2}}$. Col mezzo poi dell'equazione $\frac{x}{y} = p$ facciaſi ſvanire l'una, o l'altra delle indeterminate x, y, e ſe nell' operazione ambedue ſi dileguano, come accade nel caſo noſtro, ſegno manifeſto è, che le variabili ſenz' altro artificio ſi ſeparano. Nell' eſempio propoſto ſparisca x, e collocando in ſua vece il valore yp, e perciò $\frac{-ddx}{ydx-xdy} = \frac{y^3pdp}{y^2p^2+a^2y^2 \cdot \sqrt{y^2p^2+a^2y^2}} = \frac{pdp}{a^2+p^2 \cdot \sqrt{a^2+p^2}}$. Conſeguita la ſeparazione delle indeterminate nell'o-

mo-

mogeneo di comparazione, facilmente si scopre esser sommabile la fluzione $\frac{pdp}{\sqrt{a^2+p^2}\cdot\sqrt{a^2+p^2}}$, che dà $\frac{-a}{\sqrt{aa+pp}}$, ed in conseguenza

$\frac{-dx}{ydx-xdy} = \frac{-a}{\sqrt{a^2+p^2}} = \frac{-y}{\sqrt{xx+yy}}$, surrogato in cambio di p il suo valore $\frac{x}{y}$. Ed ecco la prima integrazione del Sig. Ermanno: facciamo passaggio alla seconda. Concioffiachè $\frac{-dx}{ydx-xdy} = \frac{-y}{\sqrt{xx+yy}}$, sarà

$-dx = \frac{y}{\sqrt{xx+yy}} \cdot \overline{xdy-ydx}$. Pongo $\frac{y}{x} = q$; dunque $xdy-ydx = x^2dq$, cioè a dire $-dx = \frac{yxxdq}{\sqrt{x^2+y^2}}$, e fatta svanire nel presente caso la quantità y, $-dx = \frac{x^2qdq}{\sqrt{aa+qq}}$, e finalmente $-\frac{dx}{xx} = \frac{qdq}{\sqrt{aa+qq}}$, sì che sommando, $\frac{ab}{x} + c = b\sqrt{aa+qq} = \frac{b\sqrt{xx+yy}}{x}$, che è la seconda sommatoria del Sig. Ermanno.

Altramente.

Mi sia concesso di ridurre l'equazione controversa ad una formula più semplice, ed equivalente. Chiamerò z la retta $SC = \sqrt{xx+yy}$, e giacchè è costante la quantità $ydx-xdy$, si potrà denominare per brevità dt, essendo nel caso nostro la differenziale dell'area ABS proporzionale al tempo. Così avremo l'equazione trasformata $-\frac{zddx}{x} = fdt$.

Pongo $dx = pdt$, e prese le seconde differenze, stando ferma la costante dt, $ddx = dpdt$; dunque $-\frac{zdp}{x} = fdt$, ma $dt = ydx - xdy =$

$= \frac{z}{\sqrt{zz-xx}} \cdot \overline{zdx-xdz}$, quando in vece della variabile y venga sosti-

ſtituito il ſuo valore $\sqrt{zz-xx}$; dunque $-dp = \frac{fx}{\sqrt{zz-xx}} \cdot \frac{zdx-xdz}{}$.

Stabiliſcaſi $\frac{x}{z} = q$, ed in conſeguenza $-dp = \frac{fzzqdq}{\sqrt{aa-qq}}$.

Sia in ordine all' ipoteſi $f = \frac{a}{zz}$; dunque $-dp = \frac{qdq}{\sqrt{aa-qq}}$, ed

integrando, $p = \sqrt{a^2-q^2}$. Era in oltre $dx = pdt = \frac{pz}{\sqrt{zz-xx}}$.

$\overline{zdx-xdz} = \frac{xxpdq}{qq\sqrt{aa-qq}}$, o pure $\frac{dx}{xx} = \frac{dq}{qq}$, collocando in vece di p il

ſuo valore $\sqrt{a^2-q^2}$; dunque integrando, $\frac{b}{x} \pm c = \frac{bz}{x}$: il che ec.

E quì ſi ponderi non ſuccedere, almeno così facilmente, la ſeparazione nell'equazione $-dp = \frac{fzzqdq}{\sqrt{aa-qq}}$, quando ſi muti la legge della

forza centrale, richiedendoſi maggior induſtria in tutti gli altri caſi poſſibili. Sia per eſempio la forza in proporzione della diſtanza, cioè $f=z$, ipoteſi, che va a terminare in curve già conoſciute, e ſono le ſezioni del cono riferite al centro. Avremo pertanto $-dp = \frac{z^3dq}{\sqrt{aa-qq}}$, o ſia

$-\frac{dp}{x^3} = \frac{dq}{qq\sqrt{a^2-q^2}}$, e ſoſtituendo in cambio di $-dp$ il ſuo valore $-\frac{ddx}{dt}$;

ſarà $-\frac{ddx}{x^3} = dt \cdot \frac{dq}{q^2\sqrt{a^2-q^2}}$.

Per quello che appartiene al ſecondo membro, poco ci è da riflettere; mentre la maniera di ſommarlo è per così dire di comune giuriſdizione: non così ſuccede nel primo, che nella differenziale del ſecondo grado ci ſomminiſtra un nuovo genere d'integrazioni dipendente dalla coſtante aſſunta $ydx - xdy$. Che gioverebbe a queſto paſſo aver in viſta le ſezioni coniche, mentre non ſi ſcopriſſe prima il metodo di ſommare l'eſpreſſione propoſta? Io poſſo dire con verità, che forſe non ſi

troverà ſtrada per conſeguire l'intento, ſenza che c'entrino, fatte le ſeparazioni, quantità traſcendenti. Da queſt' oſſervazione ſi renderà manifeſto, qual differenza paſſi tra le formule generali, e la particolare del Sig. Ermanno, ed in che principalmente conſiſta la bellezza della ſua ſoluzione.

Deſiderava in ſecondo luogo il Sig. Bernulli, che dal Sig. Ermanno veniſſe fatta una prova della ſua analiſi, applicandola all'ipoteſi generale, col determinare le curve in qualſivoglia ſiſtema delle forze centrali, almeno ſuppoſte le quadrature. Non ha mancato queſti di ſoddisfare ad una brama sì ragionevole, come ne rende una piena teſtimonianza il Sig. Varignon nelle lodate Memorie dell'anno 1710., e come ſi può vedere dal quinto Giornale d'Italia, Articolo XVI., in cui ſi legge regiſtrata la ſoluzione generale. Tutto l'artificio conſiſte nel traſportare opportunamente l'equazione differenziale delle curve cercate dall'aſſe al fuoco: ma io mi sforzerò calcando un altro ſentiero di giungere alla ſteſſa meta, e terrò ferma l'equazione delle curve all'aſſe medeſimo; con che forſe m'accoſterò più da preſſo alla prima intenzione del Sig. Ermanno.

Giacchè $-\frac{zddx}{x} = fdt^2$, e $x^2 + y^2 = z^2$, prendaſi $xdx + ydy = zdz = pdt$, e paſſando alle ſeconde differenze, poſta dt coſtante, $xddx + yddy + dx^2 + dy^2 = dpdt$; ma la coſtante $ydx - xdy$ dà $yddx = xddy$, ed in conſeguenza $\frac{y^2ddx}{x} = yddy$; ed eſſendo in oltre $dx^2 + dy^2 = \frac{dt^2}{zz} + dz^2$, come facilmente può dimoſtrarſi, avremo, fatte le ſoſtituzioni neceſſarie, $\overline{xx + yy}.\frac{ddx}{x} = \frac{zzddx}{x} = dpt - \frac{dt^2}{zz} - dz^2$: ma $\frac{zddx}{x} = -fdt^2$, e $dt^2 = \frac{z^2dz^2}{pp}$; dunque $-\frac{fz^2dz^2}{pp} = \frac{zdzdp}{p} - \frac{dz^2}{pp} - dz^2$, cioè $-fdz = \frac{pdp}{zz} - \frac{dz}{z^3} - \frac{ppdz}{z^3}$, o pure $\frac{dz}{z^3} - fdz = \frac{zpdp - p^2dz}{z^3} = \frac{p}{z}.\overline{\frac{zdp - pdz}{zz}}$; sì che integrando, $\frac{b}{z} - \frac{a}{2zz} - \int fdz = \frac{pp}{2zz}$, ovvero $\sqrt{bz^2 - a - 2zz\int fdx} = p$, dal che ſi rende manifeſto la quantità p eſſere data per z, e le coſtanti.

Di vantaggio, giacchè $\frac{zdz}{p} = dt = ydx - xdy$, pongaſi $\frac{x}{y} = q$; dun-

dunque $ydx - xdy = y^2dq$; ma $xx + yy = zz$, e $x^2 = y^2q^2$; dunque $zz = a^2y^2 + y^2q^2$, cioè $y^2 = \frac{zz}{aa+qq}$, e conſeguentemente $\frac{dz}{zp} = \frac{dq}{aa+qq}$.

Separate con queſto metodo le indeterminate, non ſarà difficile paſſare alla coſtruzione, eſſendo noto, che l'integrazione della differenziale $\frac{dq}{aa+qq}$ dipende dalla rettificazione dell'arco circolare, e che le curve ſaranno algebraiche, ogni qual volta ſi potrà ridurre ad una ſimile eſpreſſione l'altro membro $\frac{dz}{zp} = \frac{dz}{z\sqrt{bz^2 - a - 2z^2 \int fdz}}$.

Dalle coſe dette ſi ſcopre chiaramente, che la premeſſa ſoluzione non diſſimile a quella del Sig. Bernulli nella concluſione, quantunque ritrovata con maniera affatto diverſa, è bensì generale nell'eſtenſione, ed abbraccia tutti i caſi poſſibili; contuttociò non ſi debbono diſſimulare le ſue imperfezioni. Infatti quel comparire che fanno le ſteſſe curve geometriche ſotto eſpreſſioni meccaniche; quelle riduzioni, che reſtano a farſi, dopo ſcoperta la formula univerſale, e che ſono più involute della ſoluzione principale, rendono a mio giudizio perpleſſo sì fatto modo di procedere. Io reſto perſuaſo, che ſe dagli Analiſiſti ſi foſſe tentato prima il problema inverſo del diretto, non ſarebbe loro forſe caduto in penſiero, che ſotto l'eſpreſſione $\frac{dz}{zp} = \frac{dq}{aa+qq}$, o altra equivalente, ſteſſero naſcoſte curve algebraiche, e nel caſo particolare di $f = bz^{-2}$, ſe non ſi foſſero tolte di mira, non ſi ſarebbero forſe poſte in luce le ſezioni del cono.

Laſci dunque d'opporre il Sig. Bernulli eſſere particolare, limitata, e per queſto capo mancante la ſoluzione del Sig. Ermanno; imperocchè ſi potrebbe riſpondere in primo luogo, che non ſi trattava di ſciogliere generalmente il problema già ſciolto dall'illuſtre Sig. Newton per via delle quadrature, ma ſolo di vedere, come da tal fonte ſi derivaſſero le Trajettorie algebraiche, e maſſime le ſezioni coniche. Anno ciò intrapreſo i Sigg. Bernulli, ed Ermanno, il primo col dedurre dalla ſoluzione generale il caſo particolare, il ſecondo abbandonando la ſoluzione generale, e ſurrogandoci la particolare. Sin quì camminano del pari, e ſe voleva il Sig. Bernulli liberare la ſua analiſi dalla nota di particolare, ch'egli addoſſa all'altrui; era d'uopo, che con una generale eſpreſſione c'inſegnaſſe a diſtinguere le curve algebraiche dalle meccaniche in tutti i caſi poſſibili: quiſtione propoſta dal Sig. Ermanno, nè ſciolta da chi ſi ſia; dovendoſene forſe laſciare la lode di ſcioglierla a chi l'ha propoſta. Direi in ſecondo luogo, ed il mio detto parerà forſe troppo ardito a

taluno, doverſi far più conto della ſoluzione particolare del Sig. Ermanno, che delle univerſali pubblicate dagli altri. Il Problema generalmente non può ſcioglierſi, ſenza ricorrere alle quadrature, e quello che è più conſiderabile, ſenza che le ſteſſe curve algebraiche compariſcano ſotto la maſchera d'eſpreſſioni traſcendenti; onde per riconoſcerle ſia neceſſario valerſi di certe operoſe riduzioni, che tuttora eſercitano l'ingegno de' Geometri. Anche il caſo noſtro, che è pure il più privilegiato, ed è, per così dire, il caſo della natura, ci ſi fa innanzi confuſo con tutti gli altri nella formula generale meccanica; ha però la buona ſorte d'eſſere l'unico, che poſſa maneggiarſi con equazioni analiticamente integrabili. Il Sig. Ermanno con una induſtria degna di lui ha ſaputo diſtinguerlo, e ſepararlo da tutti gli altri più miſterioſi, che richiedono nuovo artificio per le riduzioni. Giudichino ora i Geometri, ſe ſia più elegante l'eſpreſſione univerſale, o la particolare, e ſe debba farſi più ſtima della regola, o dell'eccezione.

Non occorre, ch'io m'affatichi in ſoddisfare all'altra difficoltà meſſa a campo dal Sig. Bernulli, che verſava ſopra il non eſſerſi dall'Autore della ſoluzione alla ſommatoria delle ſeconde differenze aggiunta la quantità coſtante eſpreſſa con le prime. Il dottiſſimo oppoſitore ha avuto la bontà di troncar queſto nodo, e lo ſteſſo Sig. Ermanno non l'ha laſciato ſenza riſpoſta, come ſi può vedere dal ſeſto Giornale d'Italia, Art. 12.

Chiuderò la preſente Diſſertazione con applicar la mia maniera di ſeparare le indeterminate alla ſeconda ſoluzione del lodato Sig. Bernulli. Dalla ſua analiſi viene egli condotto alla ſeguente equazione, in cui la forza centrale f ſi ſuppone data per x, $f = \frac{dy^3 + dx^2dy - xdyddx + xdxddy}{2x^3\,dy^3}$.

Per liberarſi dalla confuſione delle variabili, oſſerva doverſi ridurre in compendio la formula col fare ſvanir due termini nel ſecondo membro dell'equazione. Arriva ingegnoſamente al ſuo fine, prendendo come coſtante la quantità ydx, o pure $\frac{dx}{x}$: ma oltrechè non v'ha metodo fermo per fiſſare le grandezze, che devono far figura di coſtanti; non ſo qual luogo poteſſe trovare in altri caſi egualmente ardui queſt'artificio.

Io procederei diverſamente, facendo prima ſparire le ſeconde fluſſioni; il che ſi otterrà facilmente, qualor ſi rifletta eſſere integrabile la quantità $dxddy - dyddx$ diviſa per il quadrato dx^2; onde avraſſi $\frac{dy}{dx} = p$, e $xdxddy - xdyddx = xdx^2dp$. Quindi con l'ajuto d'una congrua ſoſtituzione liberata l'equazione dall'elemento dy, e dalle ſue poteſtà, ſcopriremo eſſere $f = \frac{a}{2x^3} + \frac{a}{2x^3p^2} + \frac{dp}{2x^2p^3dx}$, ovvero $fdx - \frac{dx}{2x^3} =$

$= dx$

$= \frac{dx}{2x^3p^2} + \frac{dp}{2x^2p^3} = \frac{a}{2x^3p^3} \cdot \overline{pdx + xdp}$, e ſeparate di bel nuovo le variabili, col ſupporre $xp = q$, $\frac{dq}{2q^3} = fdx - \frac{dx}{2x^3}$, ed integrando $\frac{a}{4qq} = n - \frac{a}{4xx} - \int fdx$; ma $q^2 = x^2p^2$; dunque $\frac{a}{4p^2} = nx^2 - \frac{1}{4}a - x^2 \int fdx$; così che p ſarà data per x, ed in conſeguenza ſaranno anche ſeparate le variabili nell'equazione aſſunta da principio $\frac{dy}{dx} = p$, o $dy = pdx$.

Io mi luſingo, che il Sig. Bernulli prenderà in buona parte queſta mia riſpoſta qual ella ſia, parendomi nello ſteſſo tempo d'aver favellato con libertà geometrica, e col riſpetto dovuto al celebre Oppoſitore, come uno de' maggiori lumi, che abbiano le Scienze Matematiche, e che certamente non è il ſecondo fra gli Analiſti del noſtro ſecolo.

ANNOTAZIONI (*)

Del Sig. Niccolò Bernulli Nipote del Sig. Giovanni ſopra lo ſchediaſma del Sig. Conte Jacopo Riccato pubblicato nel Tomo decimonono del Giornale de' Letterati d'Italia, Articolo VII., coll' anneſſa Soluzione propria del Problema inverſo delle forze centrali agenti in un mezzo non reſiſtente, dedotta da' principj medeſimi del Sig. Nevvton.

A carte 186. linea 5. (a) *Ebbe egli la mala ſorte d'incontrare due famoſi Avverſarj*, ec. Quì a torto il Sig. Conte conſidera il Sig. Gio. Bernulli Avverſario del Sig. Ermanno, imperciocchè ei mai non s'oppoſe agli ſforzi di queſto: ciò che il Sig. Bernulli avviſò amichevolmente, non dee ſubito prenderſi per un'oppoſizione. Chi ſia l'altro famoſo Avverſario, che ad eſſo aggiunge, ſe non m'inganno, l'intendo; ma le ſue obbiezioni fatte al Sig. Ermanno, che in parte abbiamo vedute, non ſono da noi approvate.

In quel medeſimo luogo lin.27. (b) *accompagnata però da un eſame così ſevero, che ben ſi ſcopre aver lui preteſo con l'altrui paragone dare un maggior riſalto alle coſe proprie*. Una rifleſſione leggiera non è un eſame ſevero, nè abbiſognava a mio Zio dare un grado più eminente alla ſua ſo-

(*) *Si contengono queſte Annotazioni nel Tomo XX. del Giornale de Letterati d'Italia Articolo XIII.*

(a) Nella preſente edizione pag.20. lin.24.
(b) In queſta edizione pag.20. lin.36.

ſoluzione. Il ſuo fine principale, quando eſaminò la ſoluzione del Sig. Ermanno, non fu di confutare la medeſima, ma piuttoſto d'indi prendere motivo di comunicare la ſua; e così ſolamente di paſſaggio accennò, che coſa potrebbeſi giuſtamente deſiderare in quella del Sig. Ermanno: il che ſe ſia ſtato fatto malamente, giudichi lo ſteſſo Sig. Ermanno.

A carte 192. lin.4. (c) *mentre cangiando ipoteſi, e prendendo di mira le curve medeſime riferite al loro centro .... gli ſarebbe convenuto derivarla da principj diverſi*, ec. Parla quì principalmente dell' ipoteſi della forza centrale in ragione ſemplice diretta delle diſtanze: ma io mi maraviglio, che la ſoluzione in queſt'ipoteſi nè ſia ſtata data dal Sig. Ermanno, nè benchè tentata ſia potuta eſſere ſtata ritrovata dal Sig. Conte Riccato; la quale però più facilmente ſi deduce da' medeſimi principj, come apparirà dalle coſe, che ſieguono

In quel medeſimo luogo lin.15. (d) *riſerbandoſi poi di darne una ſoluzione più generale*, ec Queſta ſua ſoluzione generale mai non l'abbiamo veduta; ſe eſſa conſiſte in una certa equazione de' differenziali del ſecondo grado, ovvero dove l'indeterminate non giacciono ancora ſeparate l'una dall'altra, in vero poco promuove la coſa; imperciocchè niente v'ha di più facile, che di arrivare ad un'equazione tale quale: non è poco determinare i ſecondi differenziali, ovvero cavare l'equazione immediatamente dove vi ſono i ſoli differenziali del primo grado; è molto ſeparare l'indeterminate co' ſuoi differenziali l'una dall'altra; ma ſenza dubbio è coſa grandiſſima nell'applicazione alle ipoteſi particolari determinare le ſpezie delle curve: le quali coſe tutte, ſe non m'inganno, fece mio Zio, e particolarmente l'ultima nell'ipoteſi comune delle forze centrali reciprocamente proporzionali a' quadrati delle diſtanze.

Nel medeſimo luogo lin.30. (e) *Il Sig. Bernulli giudica diſperata la ſeparazione*, ec. Non diſſe eſſere la coſa diſperata, cioè impoſſibile, poichè la conoſceva fatta, ed e' pure la fece: ma volle dire, che la via battuta dal Sig. Ermanno (cioè integrare le quantità differenziali compoſte di differenziali ancora meſcolate) è aſſai ſcabroſa, e di tale natura, che atterriſce l' Analiſta, prima che tenti, perchè ſubito a prima viſta ſoſpetta eſſervi ſotto difficultà forſe maggiore di quella, che veramente v'è. Il Sig. Ermanno intanto non temette d'incontrare alcuna difficultà nell'ipoteſi comune, in quanto conobbe da altra parte, che la curva ricercata era una ſezione conica. Se alcuno prima ch'egli penſaſſe a queſto Problema inverſo gli aveſſe ſolamente propoſta queſta equazione nuda $-\frac{ddx\sqrt{xx+yy}}{x} = \frac{\overline{yux-xdy}^{2}}{xx+yy}$, acciocchè determinaſſe a qual ſorta di curva eſſa appartenеſſe, naſcoſtagli frattanto la fonte, onde ſcaturì, forſe avrebbe ſubito diſprezzata la coſa propoſta, come avente più difficultà, che utilità. A

(c) In queſta edizione pag.22. lin.27.
(d) Nella preſente edizione pag.22. lin.31.
(e) Pag.22. lin.34.

A carte 193. lin.4. (*f*) *Sia dunque*, ec. Il Sig. Conte Riccato quì, e nel ſeguente modo di ſciorre a carte 197. e ſeguenti (*g*) deſtramente ſi ſerve degli ajuti, ed artifiçj prima ſcoperti da' miei Zii Jacopo, e Giovanni, e da' medeſimi adoperati per ottenere la ſeparazione dell'indeterminate coll'ajuto di certe ſoſtituzioni (v. g. $\frac{x}{y} = p$, $\frac{y}{x} = q$, $dx = pdz$, $\frac{x}{z} = q$, e ſimili) che debbono eſſere fatte con deſtrezza; con che e' moſtra d'eſſere verſatiſſimo nel calcolo degli Integrali, e di aver ben penetrate le loro regole; ed in vero in tale maniera, che fra i foreſtieri appena poſſa ritrovarſi alcuno, che gli levi la palma. Ma e' moſtra anche, che ſiccome la memoria d'un animo grato doveva diſturbare dalla diſeſa di ſe medeſimo il Sig. Ermanno (com'egli medeſimo diſſe di ſopra) lo ſteſſo ufficio d'urbanità avrebbe dovuto coſtrignere il Sig. Conte Riccato, obbligato, ſebbene non immediatamente, a' Signori Bernulli, a non ſervirſi contro di loro de' ſuſſidj del calcolo da eſſi naſcente, nel quale ei ſembra d'eſſere sì maſchiamente verſato.

A carte 195. lin.8. (*h*) *Ed in conſeguenza* $\frac{-dx}{ydx-xdy} = \frac{-a}{\sqrt{a^2+p^2}}$. In oltre a carte 198. lin.7. (*i*) *ed integrando* $p = \sqrt{a^2-q^2}$. In queſti luoghi il Sig. Co. Riccato commette il medeſimo errore, che nel Sig. Ermanno notò mio Zio, quando cioè integrando l'equazioni differenziali, traſcura di accreſcere l'uno, o l'altro membro dell'equazioni integrali, di una certa quantità coſtante; imperciocchè ſe bene in queſti eſempj una tale aggiunta non muta la ſpecie della curva, in altri caſi però può alle volte rendere la natura della curva ſterminatamente differente; onde non può ſenza paralogiſmo traſcurarſi, nè traſcurata ſi può certamente affermare, che la curva ricercata è una ſezione conica, benchè quì per accidente accada, che l'addizione niente muta nella natura della curva. Aggiungaſi, che non appare ſe non finalmente dopo molte operazioni, che non ſi muti la ſpecie della curva.

A carte 200. lin.7. (*k*) *non così ſuccede nel primo*, ec. Quì il Signor Conte ſi moſtra imbarazzato, e vuole piuttoſto laſciare il Problema da ſciogliere, che tormentarſi con uno ſforzo vano; e contento di queſta eſclamazione: *Che gioverebbe a queſto paſſo*, ec. afferma eſſer la coſa impoſſibile. *Io poſſo dire con verità*, ſeguita a dire il Sig. Conte, *che forſe non ſi troverà ſtrada per conſeguire l'intento, ſenza che s'entrino, fatte le ſe-*

(*f*) Nella preſente edizione pag.23. lin.4.
(*g*) In queſta edizione pag.23. lin.17. e ſeg.
(*h*) In queſta edizione pag.24. lin.2.
(*i*) In queſta edizione pag.25. lin.4.
(*k*) In queſta edizione pag.25. lin.17.

ſeparazioni, *quantità traſcendenti*. Tuttavia darò a divedere ciò non eſſere impoſſibile, e mostrerò come ſenza la preſente ſeparazione poſſa eſſere ſciolto il Problema inverſo delle forze centrali, quando ſono ſuppoſte direttamente proporzionali alle distanze, cioè prendendo le coordinate ſull' aſſe. Comunicherò anche un altro metodo di mio Zio per la ſoluzione del medeſimo Problema, dove l'indeterminate compariſcono ſeparate, e poicia l'equazione viene integrata ſenza la viſta di quantità traſcendenti.

I. Poichè nella figura del Sig. Ermanno ED $\frac{-ddx\sqrt{xx+yy}}{x}$ eſprime la forza centripeta, convien fare $-\frac{ddx\sqrt{xx+yy}}{x} = \sqrt{xx+yy}$ (ovvero piuttoſto per oſſervare l'omogeneità per $ydx - xdy =$ ad una quantità coſtante) $= \frac{\overline{ydx-xdy}^2}{a^3b}\sqrt{xx+yy}$, e perciò $-\frac{ddx}{x} = \frac{\overline{ydx-xdy}^2}{a^3b}$. Moltiplicando poi per xdx, ſi ottiene $-dxdlx = \frac{\overline{ydx-xdy}^2}{a^3b}\cdot xdx$, e prendendo gl' integrali, $\frac{\overline{ydx-xdy}^2}{ac} - dx^2 = \frac{\overline{xx\cdot ydx-xdy}^2}{a^3b}$; laonde $dx = \frac{ydx-xdy}{\sqrt{a^3bc}}\sqrt{aab-cxx}$, e $\frac{dx}{xx\sqrt{aab-cxx}} = \frac{ydx-xdy}{xx\sqrt{a^3bc}}$ preſi un' altra volta gl' integrali, $-\frac{\sqrt{aab-cxx}}{bx\sqrt{a}} = -\frac{y}{x\sqrt{bc}} \pm \frac{1}{a}$; l'equazione ridotta avrà due dimenſioni, d'onde appare, che la curva ricercata è una ſezione conica.

II. Altramente più facilmente, e più elegantemente oſſerva mio Zio, che il Problema può eſſere ſciolto, riſolvendo le forze in due collaterali. Riſolvaſi la forza centrale in due altre, le cui direzioni facciano un dato angolo (v. gr. retto) LPM (Fig. 10.). Per lo centro C delle forze ſi tirino le rette CA, CB parallele a quelle direzioni. Egli è manifeſto, che il mobile deſcrive la medeſima curva PQ, o ſia egli ſollecitato ſolamente da una forza tendente al punto C, o in luogo di queſta da due altre tendenti coſtantemente l'una alla retta CA, l'altra alla retta CB, cioè ognuna delle quali conſervi una direzione coſtante, l'una alla CB,

CB, l'altra alla CA parallela. In oltre è chiaro, che il concorſo di queſte due forze non impediſce, che s'avvicini all'una, e all'altra delle due rette CB, CA con quelle ſteſſe velocità reſpettivamente, colle quali e'ſ'accoſterebbe, ſe levata l'una forza, l'altra ſola lo ſpingeſſe; cioè il mobile P ha tanta velocità per accoſtarſi alla CB ſecondo la direzione PL, quanta ne avrebbe nel punto M, ſcendendo nella retta AC da una conveniente altezza, e con una ſola forza uguale a quella, che ſpingerebbe il medeſimo mobile attratto verſo CB; e ſcambievolmente egli ha anche tanta velocità per avvicinarſi alla CA nella direzione PM, quanta ne avrebbe nel punto L, ſe cadeſſe da un conveniente punto B della quiete per la retta BC cacciato da una forza uguale a quella, che ſpinge il medeſimo mobile verſo la retta CA. Ora la velocità di accoſtarſi alla CB, e la velocità per ritirarſi dalla retta CA, tutte e due ſono fra di loro come le piccioliſſime linee percoſſe inſieme in quelle direzioni, cioè come $Pn : np$, ovvero (chiamata CMx, MPy) come $-dx : dy$. La ſeconda dunque ſi riduce a queſto, che primieramente ſieno determinate le curve delle velocità ARD, BSE, cioè le cui ordinate MR, LS diſegnino le velocità ne' punti M, L, ſe il mobile ſeparatamente ſcendeſſe ora da A, ora da B nelle rette AC, BC; e poſcia ſi cerchi la curva PG di tale natura, che condotte da qualſivoglia ſuo punto le coordinate PM, PL, e prolungate, fino che ſeghino le curve delle velocità ne' punti R, S, ſia ſempre $MR : LS :: Pn : np :: -dx : +dy$. Per applicare ciò al caſo preſente, dove la forza centrale è come la ſteſſa diſtanza CP, e per conſeguente le forze laterali, nelle quali eſſa ſi riſolve ſecondo le direzioni PL, PM, come le rette medeſime PL, PM, ovvero come CM, CI.: è noto, il che può anche facilmente ritrovarſi, che le curve delle velocità ARD, BSE ſono quadranti di circoli deſcritti col centro C, e co' raggi CA, CB; laonde ſe CA ſi chiama a, e CB b, ſarà $MR\left(\sqrt{aa-xx}\right) : LS\left(\sqrt{bb-yy}\right) :: -dx : +dy$, e perciò

$\frac{-dx}{\sqrt{aa-xx}} = \frac{dy}{\sqrt{bb-yy}}$, ovvero $\frac{dx}{\sqrt{aa-xx}} + \frac{dy}{\sqrt{bb-yy}} = 0$, ma, come

ſanno anco i principianti, $\frac{dx}{\sqrt{aa-xx}}$ è il differenziale dell'angolo DCR,

e $\frac{dy}{\sqrt{bb-yy}}$ è il differenziale dell angolo ECS: quindi perchè

$\int \frac{dx}{\sqrt{aa-xx}} + \int \frac{dy}{\sqrt{bb-yy}}$ = ad una coſtante, egli è manifeſto, che

gli angoli DCR, ECS preſi inſieme ſono uguali ad un dato angolo co-

ſtante; ovvero aggiunto il comune ECD, tutto l'angolo SCR ſarà coſtante, ſe per avventura non cade la retta CS per diritto ſu la retta CR, il che avviene, quando DCR + ECS = ACD = al retto. Concepiamo dunque, che SCR, o ſia angolo, o ſia linea retta, giri intorno al punto C, e che in qualſ'voglia ſito ſieno tirate da' punti R, S le rette RP, SP parallele alle rette CB, CA; deſcriverà il punto dell' interſezione P la curva PG ricercata, la quale troveraſſi eſſere un elliſſi, adoperando la ſola Algebra ordinaria, il cui centro coincide col centro medeſimo delle forze. Che ſe in oltre le rette SC, RC s'incontreranno per diritto, ſaranno i raggi CA, CB de' circoli ARD, BSE i ſemiaſſi coniugati dell' elliſſi, ma ſe le medeſime rette fanno l'angolo SCR, intendaſi condotto per lo punto C il diametro d'un circolo paſſante per li tre punti S, P, R; il punto C dividerà queſto diametro (d' una lunghezza coſtante) in due parti ineguali, le quali danno le lunghezze de' ſemiaſſi coniugati. Di che non conviene, ch' io faccia quì la dimoſtrazione, la quale ſpontaneamente ſi preſenta dinanzi a chi ſeriosamente ci penſa.

Se per avventura non piace al Sig. Co. Riccato, che abbiamo preſo di ſopra come noto eſſere $\frac{dx}{\sqrt{aa-x}}$, $\frac{dy}{\sqrt{bb-yy}}$ i differenziali degli angoli, e

per queſta cagione un'altra volta accuſa (come fece, benchè male a propoſito, contra la ſoluzione generale del Sig. Giovanni mio Zio, regiſtrata nelle Memorie di Parigi) aver eſſo avuta in mente l'elliſſi come l'obbietto principale, al quale dirizzati avea i ſuoi penſieri, chiamando in ajuto quell' inſolita (benchè a noi abbaſtanza paleſe, e famigliare) differenziazione, ed integrazione degli angoli, altramente non avrebbe potuto ſapere, che ſotto queſt'eſpreſſione $\frac{dx}{\sqrt{aa-xx}} + \frac{dy}{\sqrt{bb-yy}} = o$ ſtava naſcoſta la curva algebraica, non che l'elliſſi: Se, dico, il Sig. Co. Riccato per avventura diſapprova quello modo di procedere; eccone un'altro puramente analitico, ch'io preſento, acciocchè egli veda un'altra volta, che s'inganna, quando ſtima, che il caſo particolare, dove le forze ſono reciprocamente proporzionali a' quadrati delle diſtanze, ſia il ſolo e l'unico, che trattare ſi poſſa coll'equazioni analiticamente integrabili; imperciocchè per fare nel noſtro caſo la medeſima coſa, goderà, ſpero il Sig. Co. Riccato, quando vedrà, che la noſtra eſpreſſione $\frac{dx}{\sqrt{aa-xx}} + \frac{dy}{\sqrt{bb-yy}} = o$, forſe contro la ſua ſperanza può eſſere integrata, adoperando ſolamente le comuni regole del calcolo ſommatorio, ma con qualche deſtrezza utile anche in altre occaſioni, maneggiate. Si moltiplichi pri-

primieramente l'equazione per $\sqrt{aa-xx}$, e per $\sqrt{bb-yy}$, ed otterraſſi $dx\sqrt{bb-yy} + dy\sqrt{aa-xx} = o$ e perciò $\int dx\sqrt{bb-yy} + \int dy\sqrt{aa-xx} =$ ad una quantità coſtante ac. Di poi ſi moltiplichi anche per xy, e ſi otterrà $\frac{y.xdx}{\sqrt{aa-xx}} + \frac{xydy}{\sqrt{bb-yy}} = o$; laonde anco ſarà.

$\frac{\int y.xdx}{\sqrt{aa-xx}} + \frac{\int x.ydy}{\sqrt{bb-yy}} =$ ad un'altra quantità coſtante ae; ma è

$\frac{\int y.xdx}{\sqrt{aa-xx}} = -y\sqrt{aa-xx} + \int dy\sqrt{aa-xx}$, e $\frac{\int x.ydy}{\sqrt{bb-yy}} = -x\sqrt{bb-yy} + \int dx\sqrt{bb-yy}$; dunque $\frac{\int y.xdx}{\sqrt{aa-xx}} + \frac{\int x.ydy}{\sqrt{bb-yy}}$ $(= ae) =$

$= -y\sqrt{aa-xx} - x\sqrt{bb-yy} + \int dy\sqrt{aa-xx} + \int dx\sqrt{bb-yy}$; quindi $ae - \int dy\sqrt{aa-xx} - \int dx\sqrt{bb-yy}$, cioè $ae - ac = -y\sqrt{aa-xx} - x\sqrt{bb-yy}$ equazione algebraica, che ſi riduce nella ſeguente maniera. Sia $c - e = b$, e ſi traſporti o l'una parte, o l'altra parte dell'ultimo membro dell'equazione nel primo, talchè ſi abbia $ab - x\sqrt{bb-yy} = y\sqrt{aa-xx}$, ovvero quadrando, $aabb + bbxx - 2abx\sqrt{bb-yy} = aayy$, e traſportando, $aabb + bbxx - aayy = 2abx\sqrt{bb-yy}$, e quadrando un'altra volta, $a^4b^4 + 2aabbbbxx + b^4x^4 - 2a^4bbyy - 2aabbxxyy + a^4y^4 =$ $= 4aabbbbxx - 4abbxxyy$. Si levi da ciaſcun membro $4aabbbbxx -$ $- 4aabbxxyy$, e ſi otterrà $a^4b^4 - 2aabbbbxx + b^4x^4 - 2a^4bbyy +$ $+ 2aabbxxyy + a^4y^4 = bb - bb.\ 4aaxxyy$: cavata da ciaſcun membro la radice quadrata, otterremo finalmente $aabb - bbxx - aayy = \pm 2axy\sqrt{bb-bb}$, cioè un'equazione all'elliſſi, e certamente riferita al centro. Da ciò non ſolamente ſi vede, che la curva ricercata è la ſola elliſſi, ma eziandio, che il centro delle forze è nel centro della figura QEI.

A carte 204. lin. 8: (*l*) *che le curve ſaranno algebraiche ogni qual volta ec.* Non baſta acciocchè le curve ſieno algebraiche, che ciaſcun membro dell'equazione dipenda dalla rettificazione dell'arco di qualche cir-

(*l*) Nella preſente edizione pag.27. lin.7.

circolo; è neceſſario di più, che gli angoli ſotteſi da queſti archi ſieno commenſurabili, altramente dalla loro comparazione non naſce alcuna equazione algebraica.

In quel medeſimo luogo lin. 14. (*m*) *Soluzione non diſſimile a quella del Sig. Bernulli nella concluſione, quantunque ritrovata con maniera affatto diverſa*, ec. Queſto metodo non è tanto diverſo da quello di mio Zio, che non ſi veda facilmente eſſerſi ſervito il Sig. Co. Riccato di queſto medeſimo come di regola, alla quale aggiuſtò il ſuo metodo, veſtito ſolamente d'un'abito un po diverſo.

Nel medeſimo luogo citato lin. penult. (*n*) *contuttociò non ſi debbono diſſimulare le ſue imperfezioni; ec.* Queſta ſoluzione non ha imperfezione alcuna, anzi ſarebbe ſtata perfettiſſima anco per approvazione del Sig. Co: Riccato, ſe aveſſe avuto Autore il Sig. Ermanno.

A carte 205. lin. 11. (*o*) *non ſarebbe loro forſe caduto in penſiero, che ſotto l'eſpreſſione ....., e nel caſo particolare di* $f = bz^{-2}$, *ſe non ſi foſſero tolte di mira, non ſi ſarebbero forſe poſte in luce le ſezioni del cono.*

Queſto ritorcimento (col quale credette forſe il Sig. Co. Riccato di pungere mio Zio) quanto ſia ingiuſto, e quanto poco faccia a queſto propoſito, avrebbe potuto avvertire eſſo Sig. Conte, ſe aveſſe voluto oſſervare, che per gli altri caſi particolari mio Zio cavò dalla ſua formula, o ſoluzione univerſale le curve avanti di lui da niuno ritrovate. Per eſempio nel caſo particolare di $f = bz^{-3}$, cioè dove le forze centrali ſono reciprocamente proporzionali a' cubi delle diſtanze; chi avanti di mio Zio ritrovò, o nominò oltre alla ſpirale logaritmica quell'altra ſpirale iperbolica, di cui ne diede la deſcrizione nel medeſimo luogo citato dal Sig. Co: Riccato nelle Memorie di Parigi dell'anno 1710, a carte 533. oltre ad infinite altre curve sì algebraiche, che traſcendenti, le quali dedotte dalla ſua ſoluzione univerſale pubblicò negli Atti di Lipſia l'anno 1713. nel meſe di Marzo, a carte 129.? Dica ora il Sig. Co: Riccato, come mio Zio abbia preſentito, che ſotto la ſua eſpreſſione generale ſtava naſcoſta la ſpirale iperbolica inſieme coll'altre curve, ch'egli comunicò al pubblico de' Letterati; ovvero ci moſtri in che modo quelle ſono venute alla luce, imperciocchè non ſi può dire, ch'egli le aveſſe già avanti avute in mente. Senza dubbio il Sig. Co: Riccato non ha lette quelle coſe, che mio Zio pubblicò in queſta materia negli Atti di Lipſia, e nelle Memorie di Parigi l'anno 1711., altramente avrebbe più benignamente giudicato della bellezza, e dell'eccellenza del ſuo metodo, il quale lodò grandemente anche il Sig. Ermanno medeſimo, e lo preferì a quello del Sig. Nevvton, ſpecialmente perchè ha luogo, anche ſe ſi conſidera la reſiſtenza del mezzo. Frattanto ſtupiſco, dopo avere di ſopra a carte 204. (*p*) conoſciuto, che dalla dipendenza, o reduzione all' arco circolare di ciaſcun mem-

(*m*) Nella preſente edizione pag.27. lin.8.
(*n*) In queſta edizione pag.27. lin.11.
(*o*) In queſta edizione pag.27. lin.18.
(*p*) In queſta edizione pag.27. lin.22.

membro dell'equazione, ſi può conchiudere eſſere la curva algebraica, che non abbia dubitato di dire, che forſe mai non ſarebbero venute alla luce le ſezioni coniche, ſe già non foſſero ſtate conoſciute avanti, come aventi la proprietà ricercata: imperciocchè, che coſa è più naturale, che ritrovata l'algebraicità della curva, ricercar poſcia qual ſia quell'equazione algebraica, che eſprime la natura della curva? Invita quaſi ſpontaneamente a queſta ricerca l'equazione differenziale del Sig. Giovanni mio Zio, la quale, come confeſſa eſſo Sig. Co. Riccato, rinchiude una manifeſta comparazione di due archi circolari diverſamente dall'equazione del Sig. Ermanno, la quale, per la confuſione delle indeterminate non dando alcun indizio certo di ſucceſſo felice, potrebbe ſubito diſanimare l'Analiſiſta impaziente. Del rimanente benchè queſta ſoluzione generale applicata al caſo particolare $f = bz^{-a}$ conduca ad un'equazione inviluppata di quantità traſcendenti, niente però impedisce, che queſte (purchè ſiene algebraiche comparabili, come ſono per eſempio gli archi circolari, i logaritmi, cc) poſſano trattarſi con un'integrazione puramente analitica, come la quantità aſſolutamente integrabile: il che poichè forſe non crede il Sig. Co: Riccato, e per queſta ſola ragione vuole poſporre la ſoluzione generale di mio Zio alla ſoluzione particolare del Sig. Ermanno, perchè queſta conſiſte in una equazione aſſolutamente integrabile, quella al contrario in un'equazione, che contiene quantità traſcendenti, vo applicare l'artificio ſopra adoperato nella riſoluzione del caſo particolare $f = z$ (nel quale da queſte quantità traſcendenti con un'integrazione puramente analitica, ſi cava un'equazione algebraica per la curva deſiderata) al caſo preſente $f = bz^{-a}$. Era arrivato mio Zio (vedanſi le Memorie di Parigi dell'anno 1710., a carte 527.) a queſta equazione differenziale $\frac{dx}{a} = \frac{dt}{\sqrt{bb-tt}}$. Sia p una perpendicolare calata dal punto L alla retta AO (vedaſi la figura a pag. 524.) e ſarà $Ll\,(dz) = \frac{adp}{\sqrt{aa-pp}}$, laonde $\frac{dz}{a}$, ovvero $\frac{dt}{\sqrt{bb-tt}} = \frac{dp}{\sqrt{aa-pp}}$, e moltiplicando in croce $dt\sqrt{aa-pp} = dp\sqrt{bb-tt}$, e prendendo gl'integrali $t\sqrt{aa-pp} + \int \frac{tpdp}{\sqrt{aa-pp}} = p\sqrt{bb-tt} + \int \frac{ptdt}{\sqrt{bb-tt}}$. ma è $\frac{ptdt}{\sqrt{bb-tt}} = \frac{tpdp}{\sqrt{aa-pp}}$, e per conſeguenza $\int \frac{ptdt}{\sqrt{bb-tt}} =$

=

$= \int \frac{tpdp}{\sqrt{aa-pp}} = ae$; dunque levate via le quantità eguali, si scoprirà

$\pm ae + p\sqrt{hh-tt} = t\sqrt{aa-pp}$, equazione puramente algebraica, la quale prudentemente maneggiata, come di sopra s'è fatto, riducesi a questa $aatt + hhpp - aaee = 2apt\sqrt{hh-ee}$. Ora questa giusto il solito cangiata in un'altra, che esprima la relazione fra le coordinate della curva ricercata, mostrerà esser ella un'ellissi, o un'iperbola, o una parabola riferita al foco.

A carte 206. lin. 9. (q). *Se voleva il Sig. Bernulli liberare la sua analisi dalla nota di particolare, ec.* Non capisco, che cosa si voglia il Sig. Co. Riccato: forse la soluzione di mio Zio ha il difetto di particolarità, perchè non supera l'impossibile? poichè io stimo egualmente impossibile determinare con un'espressione generale le curve algebraiche per qualsia data legge di forze centrali, e dare una regola generale, colla quale subito si possa conoscere, se qualche data equazione algebraica di qualsivoglia grado si possa ridurre col mezzo della divisione. Ed in vero il Sig. Co: Riccato ci promette una cosa troppo magnifica, quando dice, che quella quistione forse potrà essere sciolta dal Sig. Ermanno, al quale si debba cedere la gloria dell'invenzione. Egli è certamente manifesto ciò, che già aveva avvisato mio Zio nelle Memorie di Parigi a carte 326., cioè che senza esitanza può dichiararsi allora essere algebraica una curva, quando ambedue le membra d'un'equazione disegnano i differenziali di archi, o piuttosto di angoli commensurabili; ma determinare sempre, se qualche quantità differenziale possa essere ridotta al differenziale dell'arco, o dell'angolo, è una difficoltà scabrosissima, nè questa supererassi, prima che si ritrovi la regola d'integrare tutto quello, ch'è integrabile: cosa a dir vero da desiderare, ma non da sperare.

In quel medesimo luogo lin. 20. (r) *Il mio detto parerà forse troppo ardito..... pubblicate dagli altri.* Anzi sembrerà non che ardito, ma paradosso, che la soluzione particolare abbia ad essere più stimata, che la soluzione universale. Ma quando vedrà il Sig. Co: Riccato, che quella ragione, per la quale pronunziò questa sentenza, è di niun peso, se pure avrò mostrato qui la maniera di trattare con un'integrazione analitica quelle medesime quantità trascendenti, che somministrò la soluzione generale, e cangerà spero parere, e ritratterà le parole un po più abbasso a cart 207. (s) troppo precipitosamente proferite: *Ha però la buona sorte d'esser l'unico, che possa maneggiarsi con equazioni analiticamente integrabili.... e se debba farsi più stima della regola, o dell' eccezione;* parte, perchè ho già dimostrato non esser l'unico il caso; ma essercene un'altro analiticamente

te

(q) Nella presente edizione pag. 27. lin. 31.
(r) In questa edizione pag. 27. lin. ult.
(s) In questa edizione pag. 28. lin. 9.

te Integrabile, quando le forze centrali ſono direttamente proporzionali alle diſtanze; parte perchè è chiaro dalle coſe fin quì dette, che indarno ſi predica la ſingolare deſtrezza del Sig. Ermanno nel diſtinguere il caſo più facile dagli altri tutti, come più miſterioſi, poichè è falſo, che queſto caſo ſia più miſterioſo di quel primo ſciolto dal Sig. Ermanno, eſſendo anzi molto più facile. Si aggiunga, che non iſcelſe quel caſo il Sig. Ermanno, ma gli fu propoſto da mio Zio in occaſione che aveva oſſervato, che il Sig. Nevvton nella prima edizione de' ſuoi principj matematici (dappoichè nelle tre propoſizioni 11. 12. 13. del primo Libro aveva ritrovato, che le forze centripete de' corpi moſſi nelle ſezioni coniche, tiranti all'ombelico della figura, ſono reciprocamente come i quadrati delle diſtanze) nel corollario 1. prop. 13. aveva aſſunta ſenza dimoſtrazione la propoſizione inverſa, cioè eſſere ſempre qualche ſezione conica avente l'ombelico nel centro delle forze, quella curva, nella quale il corpo ſi muove con una forza centripeta reciprocamente proporzionale al quadrato della diſtanza, la quale propoſizione volle però ſtabilire con qualche dimoſtrazione il Sig. Nevvton nella ſeconda edizione.

A carte 208. lin. 9. (*t*) *Non v'ha metodo fermo, ec.* Sembra quì il Sig. Co: Riccato abbandonare il ſuo uffizio; poichè ciò che nel Sig. Ermanno grandemente loda, ed innalza (e per queſto fine unicamente compoſe la ſua ſcrittura, quaſi che eſſo Sig. Ermanno abbia ſciolto il ſuo caſo particolare con una ſingolare deſtrezza) vitupera nel Sig. Bernulli; nè contento di quell'artificio, che diede, benchè, come il chiamò lo ſteſſo Sig. Conte, ingegnoſo, non dubita di domandargli un metodo fermo, o generale. Ma ſe mio Zio rendeſſe al Sig. Co: Riccato le ſue parole così dicendo: *Il Sig. Ermanno arriva ingegnoſamente al ſuo fine, moltiplicando, o dividendo ambedue le membra della ſua equazione per certe quantità indeterminate per renderla due volte integrabile: ma oltrechè non v'ha metodo fermo per fiſſare le grandezze, per le quali biſogna moltiplicare, e dividere l'equazione propoſta, non ſo qual uomo poteſſe trovare in altri caſi egualmente ardui queſt'artificio*: che direbbe? Ma che più, non ſi ſerve forſe eſſo Sig. Conte di queſti artificj particolari, de' quali per avventura non ſa di eſſer tenuto a' Sigg. Bernulli, quando a carte 209. (*u*) chiama in ajuto le ſoſtituzioni congrue ($\frac{dy}{dx} = p$, $xp = q$) per ſeparare le quantità variabili; ma non dà regola certa, e fiſſa, per mezzo della quale ſi faccia convenientemente una ſoſtituzione, acciocchè le quantità variabili in qualſivoglia equazione propoſta ſi ſeparino l'una dall'altra. Ceſſi dunque il Sig. Co. Riccato di preferire la ſoluzione particolare alla ſoluzione generale, ovvero permetta al Sig. Bernulli, che goda in queſta ſimile occaſione quel medeſimo privilegio, per lo quale la particolarità può rapire la gloria all'univerſalità.

A

(*t*) Nella preſente edizione pag. 28. lin. 28.
(*u*) In queſta edizione pag. 28. lin. 33.

A carte 210. lin. 8. (x). *Io mi lusingo, che il Sig. Bernulli prenderà in buona parte ec.* Perdoniamo, e chiediamo vicendevolmente perdonanza; diamo volentieri la libertà Geometrica al Sig. Co: Riccato, la quale e' pure non ci negherà; il che non impedirà, che non conosciamo, ed ammiriamo la sua acutezza nella Geometria, e la singolare facilità di penetrare queste cose difficilissime.

Darò in luogo d'aggiunta una nuova soluzione di questo Problema inverso, dedotta da' medesimi principj Newtoniani, e la sua applicazione al caso particolare delle forze reciprocamente proporzionali a'quadrati delle distanze.

Sia nella fig.11. C il centro delle forze, A il punto, dal quale si parte il mobile, AB la sua direzione in questo luogo, e cominci il mobile a muoversi nel punto A con quella velocità, che acquisterebbe cadendo dall' altezza data DA, sollecitante qualche forza uniforme, ed eguale alla centripeta agente nel medesimo luogo A; e sia E qualche punto preso nella trajettoria ricercata, EF la direzione del mobile in questo punto; CB, CF le perpendicolari alle AB, EF; EG sia un'arco di cerchio descritto col raggio CE, la curva HIK quella, che determina la legge delle forze centripete, cioè tale, che le sue applicate AI, GK esprimano le forze centripete sollecitanti nelle distanze CA, CG (ovvero CE); e si chiamino $AD = a$ $AC = b$, $CB = c$, $CE = CG = x$, $CF = z$, $AI = g$, $GK = f$. Per quelle cose, che dimostrò il Sig. Newton propos. 9., e 40. del Lib.I., se si fa l'aja ALHI = al rettangolo ADMI, sarà l'aja ALHI all'aja GLHK, come il quadrato della velocità in A al quadrato della velocità in E; cioè perchè le velocità sono reciprocamente come le perpendicolari calate dal centro delle forze alle tangenti (il che dimostrò anche il Sig. Newton nella seconda edizione de'suoi Principj coroll.1. propos 1. Lib.1.)

$ag : \int -fdx + ag :: zz : cc$; e perciò $zz = \frac{agcc}{\int -fdx + ag}$ la qual equazione poichè involge la natura della tangente, l' ulterior sua riduzione dipende dal metodo inverso delle tangenti. Nel caso particolare quando $f = \frac{bbg}{xx}$, l'equazione ritrovata $zz = \frac{agcc}{\int -fdx + ag}$ si muta in questa $zz = \frac{acc}{\frac{\int -bbdx}{xx+a}} = \frac{acc}{\frac{bb}{yc} - b + a}$ (si sottrae dall'integrale $\frac{bb}{x}$ la quantità b, perchè $x = b$, l'aja AIGK, ovvero $\int -fdx$ dee divenire $= o$) $= \frac{accx}{bb - bx + ax}$

Che

(x) In questa edizione pag.29. lin.7.

Che poi queſt'ultima equazione ſia alle ſezioni coniche, così ſi fa paleſe: v'ha una notabile proprietà delle ſezioni coniche, che ſe da uno de' fochi ſi cala una perpendicolare nella retta toccante in qualche punto la ſezione del coso, il quadrato di queſta perpendicolare ſta al quadrato del ſemiaſſe minore, ovvero alla differenza de' quadrati del ſemiaſſe maggiore, e della metà della diſtanza de' fochi, com'è la retta tirata dal punto del contatto a quel foco, alla retta tirata dal medeſimo punto del contatto all'altro foco; la quale proprietà facilmente ſi può così dimoſtrare. Sieno nella fig. 12. C, B due fochi, GH la tangente: CH perpendicolare alla medeſima ſi prolunghi, fino che incontri la prodotta BG in D, alla quale conducaſi dal punto C la perpendicolare CE. Per l'angolo DCG tagliato in due parti eguali dalla tangente, e per l'angolo retto H, ſara DH = HC, DG = GC, e DB = GC + GB = all'aſſe maggiore. Ma è $CBq = CDq\ (4.\ CHq) + DBq - 2BD.\ DE$; in oltre per li triangoli ſimili DHG, e DEC è DG (GC): DH (HC):: CD (2CH): $DE = \frac{2CHq}{GC}$; perciò $CBq = 4CHq + DBq - \frac{4BD.\ CHq}{GC}$, ovvero $\frac{DBq - CBq}{4} = \frac{BD - GC.\ CHq}{GC} = \frac{GB.\ CHq}{GC}$, e $CHq : \frac{3}{4}\ DBq - \frac{3}{4}\ CBq :: GC : GB$. Quindi ſe ſi chiamerà CH = z, GC = z, DB = p, CB = q, ſarà $zz = \frac{\frac{3}{4}pp - \frac{3}{4}qq.x}{p - x}$ la qual equazione è ſimile alla ritrovata, e con eſſa coincide, ſe ſi pone $p = \frac{bb}{b-a}$, e $-\frac{1}{4}qq = \frac{ace}{b-a}$; il che moſtra, che la curva ricercata è una ſezione conica, il cui lato retto $= \frac{4ace}{bb}$, ed il traſverſo $= \frac{bb}{b-a}$, e che in iſpezie la curva è una parabola, ſe $a = b$, cioè a dire ſe la velocità, con la quale il corpo comincia a muoverſi in A, è uguale a quella, che acquiſterebbe cadendo per un'altezza eguale alla diſtanza CA, ſpingendolo in tutti i punti la medeſima forza centripeta, che ſpinge nel punto A; ma la curva ſarà un'elliſſi, ſe il mobile uſcirà dal punto A con un velocità minore; e un'iperbola, ſe il medeſimo mobile uſcirà con una velocità maggiore.

PROBLEMA

propoſto a' Geometri d'Italia.

Il punto C nella fig 13. è il centro delle forze, BbC la curva, le cui applicate BA, *ba* eſprimono le forze centripete giuſta le diverſe diſtanze

CA, C*a*, ed insieme i tempi, che consuma il mobile principiando la caduta da' punti A, *a*, e scendendo per le distanze AC, *a*C; si ricerca, che curva sia questa A*b*C, ovvero in qual ipotesi di forze i tempi delle discese per AC, *a*C da' punti A, *a* della quiete sieno proporzionali alle forze agenti nelle distanze CA, C*a*?

SCHEDIASMA IV. (*)

Contrarisposta alle Annotazioni del Sig. Niccolò Bernulli inserite nel XX. Giornale d' Italia Articolo XIII., con un metodo di separare le indeterminate nell' equazioni differenziali, e con alcune riflessioni intorno le forze centrali tanto nel voto, quanto nel pieno.

LA presente Dissertazione servirà di risposta alle Annotazioni, che s'è compiaciuto di fare il dottissimo Sig. Niccolò Bernulli sopra la mia difesa della soluzione del Sig. Jacopo Ermanno, e per mia parte sarà certamente l'ultima: sì perchè eternar non si debbono i litigj, quantunque letterarj e moderati; come pure perchè da quanto s'è detto, e da quanto io sono per dire, potranno i Matematici formar un retto giudicio intorno la nostra controversia: anzi ho tale fiducia della mia causa, che ne rimetterei di buona voglia agli stessi Signori Bernulli la decisione. Infatti dall'un canto anno eglino sparte così a larga mano le loro dovizie, che corrono rischio di moltiplicarsi gli Avversarj, dal numero de' quali io bramo, che mi cancellino: giacchè niuno può uscir di briga, se non più dotto, e per dir così, più Geometra. Dall'altro anno risposto con tanta gentilezza, ch'io vorrei poter cedere il campo, e darmi per vinto: ma finalmente ad ogni costo si dee sostenere l'interesse della verità, e per farlo con la dovuta moderazione, metterò in non cale alcune espressioni, che potrebbero degenerare in contestazioni inutili, e procurerò a misura delle mie forze, che la risposta sia più dottrinale, che contenziosa.

Il primo capo della nostra disputa versava sopra la doppia integrazione nella nota formula del Sig. Ermanno

$$\frac{-ddx.\sqrt{xx+yy}}{x} = \frac{\overline{ydx-xdy}^{2}}{xx+yy}$$

E quì è necessario, che il Sig. Niccolò Bernulli s'imprima saldamente nella memoria le seguenti parole del Sig. suo Zio, che le indeterminate ci sono talmente complicate, che il voler separarle è intraprendere una fatica disperata, e riesce impossibile il sommarle così confuse; onde inferì, che

(*) *Questo Schediasma fu stampato l'anno 1715. nel Tomo XXI. del Giornale de' Letterati d'Italia, Articolo VIII.*

che il Sig. Ermanno non ne ſarebbe venuto a capo, ſe non aveſſe ſempre avute innanzi gli occhi le ſezioni del cono.

Io mi credeva d'aver pienamente ſoddisfatto alla difficultà, con eſporre un metodo fermo, per cui in due diverſe maniere ſi poteſſe conſeguire la bramata ſommatoria; e mi pareva, ſuppoſto ciò, di dover con ragione cancellare la premeſſa eſpreſſione dal catalogo delle diſperate. Nulladimeno contro l'evidenza d'un' analitica dimoſtrazione ſi perſiſte per parte de' Signori Bernulli tenacemente nella prima opinione: ma che riſpondono mai?

Mi formano un'elogio, di cui tanto più rendo loro grazie, quanto ſo di non meritarlo; indi dicono, che diſperato non ſignifica impoſſibile, ma difficile e ſcabroſo: che il Sig. Ermanno s'è laſciato guidare per un ſentiero malagevole ad una formula, che atterriſce l'Analiſiſta; perchè a prima viſta ſoſpetta eſſerci ſotto difficoltà maggiore di quella, che veramente c'è: che in tanto non temette d'incontrarne alcuna nell' ipoteſi comune, in quanto conobbe da altra parte, che la curva ricercata era una ſezione conica: che ſe gli foſſe ſtata meſſa ſotto gli occhi la nuda equazione, ſenz' indicargli la fonte, onde ſcaturì, avrebbe forſe diſprezzata la coſa, come avenie più difficoltà, che utilità. Aggiungono, che io, per ridurre l'eſpreſſione, mi ſono deſtramente ſervito degli ajuti prima ſcoperti da' Signori Jacopo, e Giovanni Bernulli, e che ſe non altro, un'ufficio d'urbanità avrebbe dovuto coſtringermi a non rivolgere contro di loro i ſutilj del calcolo da eſſi naſcente.

Queſto rimprovero inaſpettato m' ha ſforzato a penſare alla replica, e ad eſaminare nel tempo ſteſſo le loro propoſizioni: per altro io, che ſopra d'ogni coſa mi pregio di docilità, ſarei rimaſo pago di qualunque riſpoſta.

Primieramente io non ſaprei, nè lo ſapranno i Sig. Bernulli ſteſſi dare al termine di diſperato più benigna interpretazione, quanto col dire, che per formula differenziale diſperata s'intenda quella, alla cui integrazione non ſi perviene con l'ajuto dell'arte, ma con un' anticipata cognizione, o più per fortuna, che per induſtria. Quando abbiamo in mano un metodo certo, non ha più luogo la ſuppoſta diſperazione. Qual' Analiſiſta mai ſarà così impaziente, che non voglia applicare, purchè gli ſia noto, il metodo generale al caſo particolare? tanto più, quanto che la mia maniera di ſeparare le incognite non è sì fattamente operoſa, che poſſa ſtancare un Geometra delicato. Interroghiamo il Sig. Giovanni, s'egli numera fra le diſperate la ſua ſeconda formula $2fx^3\,dy^3 = dy^3 + dx^2dy - xdy\,ddx + xdx\,ddy$.

Abbia la bontà di riflettere, ch'eſſa non è meno compoſta di quella del Sig. Ermanno; che l'indeterminate ci ſono egualmente confuſe; e che ſi può ritorcere contro la ſua equazione tutto ciò, che egli ha ſaputo ſcrivere contro l'altrui. Riſponderà ſenza dubbio di nò, e ſi farà forte con dire eſſere da lui ſtato ſcoperto il modo di ſvilupparla. Ma non ho io fatto altrettanto nella formula controverſa, e forſe di più? mentre finalmente la maniera Bernulliana è limitata, e non può eſtenderſi all'eſpreſ-

ſione del Sig. Ermanno; dove all'incontro la mia abbraccia l'una, e l'altra, come fondata ſopra un principio più generale. Accetteremo dunque l'ingenua confeſſione del Sig. Niccolò, che l'equazione, di cui ſi parla, era più difficile in apparenza, che in verità: e conchiuderemo, che s'era diſperata preſſo il Sig. Giovanni, non era tale preſſo di noi, e molto meno preſſo il ſuo chiariſſimo Autore.

In ſecondo luogo, ſe crediamo a queſti Signori, per ſommare la noſtra formula, altro non ſi richiedeva, fuorchè di mettere opportunamente in opera i ſuſſidj del calcolo integrale da loro prima ſcoperto. Se così è, io bramerei capire, come un'eſpreſſione dipenda per l'una parte da canoni noti, e dall'altra ſi faccia paſſare per diſperata. Gli artificj diviſati non erano forſe di comune giuriſdizione? per qual cauſa dunque non poteva ſervirſene il Sig. Ermanno al pari d'ogn'altro, e qual neceſſità aveva mai di prender di mira le curve del ſecondo grado? Era ſuperfluo, ch'egli accompagnaſſe la ſua formula con una deduzione; mentre altro non avrebbe fatto, che rammemorare al Sig. Bernulli i ſuoi artificj. Ma quello, che io non ſo intendere, ſi è, come ſe la prenda il Sig. Niccolò contro il Zio, e lo accuſi, in vece di difenderlo, quaſi che non abbia ſaputo far uſo de' proprj principj. In fatti, ſe con gli ajuti Bernulliani, per detto del Sig. Niccolò, ſi può ſviluppare una formula, che il Sig. Giovanni giudica diſperata, ne ſegue, che o il Zio s'è trovato imbarazzato in applicarceli, o che ſono inſufficienti i decantati artificj, e falſa l'aſſerzione del Nipote. Comunque la coſa ſi ſia, parmi d'aver favellato con più modeſtia, quando mi ſono eſpreſſo, eſſerſi il Sig. Giovanni laſciato ſorprendere dalla prima apparenza

In terzo luogo è neceſſario, ch'io mi purghi del rimprovero addoſſatomi, ed eſponga almeno in compendio il metodo, di cui mi ſono ſervito, e di cui non ſo d'eſſer debitore ad altri, che a me medeſimo. Per dedurre la coſa da più alti principj, debbo premettere, che la ſeparazione delle indeterminate m'è paruta ſempre un giuoco d'ingegno, in cui abbia più luogo la pratica, la pazienza, la ſorte, che l'arte, ed il metodo. Fra le inſuperabili difficoltà, che rendono involuta l'operazione, non è forſe la minima il poter reſtituire all'equazione que' termini che nel prendere le differenze ordinariamente ſvaniſcono. M'è noto il grand'uſo delle ſoſtituzioni derivate dall'Analiſi volgare in quella degl'infiniti; ma finalmente tra le innumerabili, che poſſon farſi, chi m'addita quell'unica, che può guidarmi più ſpeditamente alla meta. So, che oltre molti artificj adattati da' Geometri a caſi particolari, ſi trova regiſtrata negli Atti di Lipſia 1696. la formula più generale dell'incomparabile Sig. Leibnizio, ampliata poſcia l'anno 1697. dal Sig. Giovanni Bernulli; a cui, ommettendo per brevità le più limitate, s'aggiunga la maniera del famoſo Sig. Jacopo Bernulli eſteſa fino alle terze differenze nella ſoluzione del Problema degl'Iſoperimetri; e quella del lodato Sig. Giovanni, là dove tratta del ſolido della minima reſiſtenza; e finalmente l'ultima d'un'inſigne Italiano, cioè del Sig. Gabbriello Manfredi inſerita ne' noſtri Giornali. Contuttociò gl'illuſtri Autori de' metodi accennati conoſcono ab-

ba-

baſtanza la loro circoſcrizione, ſenza ch' io m' affatichi in dimoſtrarla; e per dir vero ſi danno infinite eſpreſſioni, in cui con poco diſpendio ſi ſeparano le variabili, e pure ſono per altro così oſtinate, che non laſciano vincerſi da' canoni mentovati.

A me nel maneggiare, come accade, varie formule, è riuſcito o per ventura, o per arte di ſcoprire un modo facile per conſeguire l' intento, che va accompagnato da tre circoſtanze importanti. La prima, che con la ſua generale eſtenſione abbraccia tutte le altre maniere ſinora pubblicate, o almeno ne fa far uſo come d'ajuti ſuſſidiarj. La ſeconda, che arriva ſpeditamente al ſuo fine, quand' anche nell' atto del differenziare ſieno ſpariti alcuni membri dell' equazione. La terza, che valendoſi delle ſoſtituzioni, nel tempo ſteſſo c' inſegna, quali ſieno le legittime, e quali le inutili.

Ecco tre canoni, ſu cui ſi fonda. Si dee primieramente diſporre l'equazione propoſta in maniera, che le quantità differenziali reſtino accompagnate riſpettivamente dalle loro indeterminate, o ſi faccia, per così dire, una dimezzata ſeparazione, rigettando ne' comuni moltiplicatori, o diviſori quelle grandezze, che turbano l' operazione; indi preſa la ſommatoria della differenziale così preparata, compoſta di due ignote, ſi dee porre uguale ad una variabile aſſunta, o col mezzo d'una equazione auſiliaria dare una nuova forma alla principale. Finalmente fatta oſſervazione a ciò, che ſuccede, dee iterarſi l'operazione, fino a tanto che ſi conſeguiſca la bramata ſeparazione, o ſi veda eſſere la formula contumace, e ſuperiore alla noſtra induſtria.

A queſto paſſo mi ſi conceda di proteſtare altamente, che io non preſumo d'integrar l'integrabile, ma ſolo di ſtendere in parte i confini del computo ſommatorio. Conoſco eſſerci alcune formule, che non ammettono la noſtra preparazione, altre in cui tutti i tentativi meſſi in opera per ſeparare le ignote, non ſervono, che a maggiormente imbrogliarle; e quantunque in certi caſi non manchino ripieghi per ſuperare gl' intoppi, con tuttociò reſterà ſempre da farſi più di quello, che s' è fatto. Chi ſa? forſe ſi danno certe formule, alle quali ſi potrebbe dare il nome di ſovra traſcendenti, con le indeterminate sì fattamente miſte, e confuſe, che non ammettono ſeparazione veruna, e vogliono eſſere coſtrutte per una ſerie, e non per una quadratura. Sia queſta un' idea ben fondata, o pure un ſogno, poco importa; mentre in materia sì ardua bramerei piuttoſto d'udire l'altrui parere, che di proponere il mio.

ESEMPIO I.

Sia $\frac{x^3 dy + y^3 dx}{\sqrt{xx+yy} \cdot \sqrt{xx+yy-xxyy}} = dz$ nella qual' equazione la quantità z è una funzione arbitraria di x, ovvero di y. Metto da parte la quantità $a : \sqrt{xx+yy} \cdot \sqrt{xx+yy-x^2y^2}$, che è un' affezione comune a due

ter-

termini, che compongono la prima parte dell'equazione. Resterà la differenziale nuda $x^3dy + y^3dx$. Divido dx per x^3, e dy per y^3, sicchè $x^3y^3\frac{dx}{x^3} + \frac{dy}{y^3} = x^3dy + y^3dx$, e la nostra formula prenda il nuovo aspetto, cioè $\frac{x^3y^3}{xx+yy \cdot \sqrt{xx+yy-x^2y^2}} \cdot \frac{dx}{x^3} + \frac{dy}{y^3} = dz$. Ottenuta questa dimidiata separazione, in cui le due flussioni dx, dy si veggono combinate semplicemente con le funzioni delle loro fluenti x^3, y^3, e gli altri termini dell'equazione costituiscono una quantità quasi estranea, che fa figura di comune moltiplicatore, pongo $\frac{dx}{x^3} + \frac{dy}{y^3} = -dp$, ed integrando, $\frac{a}{2xx} + \frac{a}{2yy} = p$.

Sarà pertanto $\frac{-x^3y^3\,dp}{xx+yy \cdot \sqrt{xx+yy-x^2y^2}} = dz$, e surrogando in cambio di x per esempio il suo valore dato per y, e p, avremo $\frac{-dp}{2p \cdot \sqrt{2p-a}} = dz$: il che ec.

Raccolgasi, che presa ad arbitrio una quantità in qualsivoglia modo data per p, come $p = \frac{a}{2qq} = \frac{a}{2xx} + \frac{a}{2yy}$, o pure $\frac{xy}{\sqrt{xx+yy}} = q$, troveremo $\frac{dq}{\sqrt{aa-qq}} = -\frac{dp}{2p \cdot \sqrt{2p-a}} = dz$, onde in un batter d'occhio si scoprono le infinite sostituzioni, che servono alla bramata separazione. Tutte le altre possibili sono inutili, e lasciano le variabili più di prima implicate.

ESEMPIO II.

Pongasi l'equazione già preparata $y^m \cdot xdx + ydy = x^n \cdot ydx - xdy$, ovvero $y^{m-2} \cdot xdx + ydy = x^n \cdot \frac{ydx-xdy}{yy}$. Pongo $\frac{x}{y} = q$, ed $xx+yy = pp$, ed in conseguenza $xdx + ydy = pdp$ ed $\frac{ydx-xdy}{yy} = dq$. Fatta la doppia sostituzione, sarà $\frac{y^{m-2}}{x^n} \cdot pdp = dq$. La dignità y^{m-2} può rappresentarsi

nella

nella seguente maniera y^{n+r}, ponendo $m-2 = n+t$; dunque $\frac{y^{n+r}}{x^n} . pdp = dq$:

ma essendo $\frac{y}{x} = \frac{a}{q}$ sarà altresì $\frac{y^n}{x^n} = \frac{a}{q^n}$; dunque $y^r pdp = q^n dq$. Frattanto in virtù della doppia equazione $x = yq$, e $xx + yy = pp$ collocando in vece di xx il suo valore $y^2 q^2$, avremo $y^2 q^2 + y^2 = p^2$, cioè $y =$

$= \frac{p}{\sqrt{aa+qq}}$, ed in conseguenza $y^t = \frac{pt}{\overline{aa+qq}^{\frac{t}{2}}}$; onde finalmente siamo pervenuti ad una equazione libera dalla mistione delle indetermina-

te $p^{t+z} dp = \overline{aa+qq}^{\frac{t}{2}} . q^n dq$.

ESEMPIO III.

Considero una formula, che può maneggiarsi col motodo del Sig. Bernulli dell'anno 1697., cioè a dire $\frac{xdy + ydx}{a+x} = du$, in cui y si suppone data in qualsivoglia modo per u. Metto $xy = p$; dunque $ydp = pdu = ydu$. Preparo di bel nuovo l'equazione nella seguente forma $p . \frac{dp-du}{p} \overline{\frac{du}{y}} = du$. Prendo $lp - \int \frac{du}{y} lq$, ovvero $l \frac{p}{q} = \int \frac{du}{y} z$, dunque $\frac{p}{q} = a^z$, e $dq = \frac{du}{az}$.

Tralascio d'addurre esempli nell'equazioni differenziali del secondo ordine, giacchè s'è fatta l'applicazione del modo, che dee tenersi all'espressioni de' Sig. Bernulli, ed Ermanno.

Non tocca a me il decidere, che conto debba farsi di questo metodo: io poca, o nessuna lode ne spero. Mi basta, che esso mi liberi dalla nota impostami gratuitamente da' Signori Bernulli. Mi dicano in qual libro, in qual Giornale, in qual registro d'Accademia si trovi questa maniera d'operare, acciocchè io sappia con chi per avventura mi sono incontrato, ed a chi si debba il pregio dell'invenzione: se bene la cosa è per se stessa di così poco momento, che io mi persuado non poter esserci fra Geometri, chi si curasse gran fatto d'averla scoperta. Resti dunque a' Sig. Bernulli la gloria d'occupare il primo posto fra' promotori del

cal-

calcolo degl'infiniti, e mi ſi conceda, che nel caſo noſtro non trovano luogo le loro ſublimi fatiche.

Le coſe dette chiamano un'altra neceſſaria rifleſſione. Nel ponderare, che io feci il modo, con cui il Sig. Giovanni ſviluppa la ſua ſeconda formula, diſſi non eſſerci metodo fermo per fiſſar le grandezze, che debbono far figura di coſtanti, e che non ſapeva io, che luogo poteſſe avere in caſi egualmente ardui queſt'artificio. Il Sig. Niccolò non impugna il detto, ma contra di me lo ritorce, accuſandomi, che io abbia abbandonato il mio ufficio, e meſſe in pratica le ſoſtituzioni, ſenza dar regola certa, per cui ſi faccia convenientemente una ſoſtituzione, acciocchè le quantità variabili in qualſivoglia equazione propoſta ſi ſeparino l'una dall'altra.

Se ſi pretende, che il mio metodo abbia ad applicarſi a tutte l'equazioni poſſibili, ſi pretende troppo; baſterà, che poſſa adattarſi a qualche caſo, che ſi chiamava diſperato. Dirò bensì, ch'io non mendico la ſoſtituzione da farſi, e che la mia preparazione mi ſomminiſtra quella preciſa quantità, che in cambio delle altre dee ſurrogarſi.

M'era quaſi dimenticato d'un'altra difficoltà meſſa a campo da' Signori Bernulli. M'imputano un paralogiſmo per aver ſeguitati i veſtigj del Sig. Ermanno, e per avere nel prendere gl'integrali omeſſo d'aggiungere le quantità coſtanti. Il peggio ſi è, che anche nella preſente riſpoſta ſono caduto nello ſteſſo fallo. Orsù abbiano la pazienza di leggere ciò, che da me è ſtato ſcritto nella prima difeſa alla pag. 207. *a*), e vedranno, ch'io ho prevenuta in maniera l'oppoſizione, che non ſo come abbiano avuto coraggio di toccar queſto punto. Per ora riſpondo, che è ſtata mia intenzione di ſpiegar un metodo, e non di ſciogliere un Problema.

Profeſſa in oltre il Sig. Niccolò, che nello ſtendere a tutti i caſi poſſibili l'equazione particolare del Sig. Ermanno, abbia io inorpellato il metodo del Sig. ſuo Zio. Non è poco, che mi ſia riuſcito di far tanto, e ſe il modo non foſſe così paleſemente diverſo, potrebbe dir ciò che vuole. Non deſiderava forſe il Sig Giovanni, che dal Sig. Ermanno veniſſe fatta una prova della ſua analiſi, applicandola all'ipoteſi generale? In qualunque forma ſi ſia ſoddisfatto ad una brama sì ragionevole, non poſſono giuſtamente pretendere di vantaggio. Per maggiormente perſuaderli ſappiano, che non ho battuto altra ſtrada, che quella da me ſpianata nel mio Schediaſma, in cui ho ſciolto il problema inverſo de' raggi oſculatori pubblicato nell'undecimo Giornale d'Italia pag. 205. (*b*), prima che mi foſſero capitate ſotto l'occhio le ſpeculazioni del Sig. Bernulli, e che mi poteſſi ſognare d'inorpellare i ſuoi metodi. Tutto il giro conſiſte nel traſportare in qualche occaſione più ardua l'equazione delle curve dall'aſſe al foco, e indi di nuovo per altra ſtrada dal foco all'aſſe: Si degnino d'oſſervare l'eſempio pag. 213. (*c*).

Per

(*a*) In queſto Tomo pag. 28.
(*b*) Leggaſi il citato Schediaſma, in queſto Tomo alla pag. 1.
(*c*) E nella preſente edizione pag. 26.

Per far la ſeconda traslazione, che ſembra la più difficile, e ſopra di cui ha verſato l'induſtria del Sig. Giovanni, io non ho adoperate, che due ſempliciſſime equazioni note a tutti i Geometri ſenza chiamar in ſoccorſo qualſiſia preparazione. Nella curva BCD (fig. 14.) conſiderata nello ſteſſo tempo relativamente al ſoco, ed all'aſſe, non è egli certo, che il quadrato CD dell'elemento della curva è uguale tanto ai due quadrati CE, ED, quanto a i due altri AG, GC? Chiamando AG x, GC y, AC z, e l'arco minimo CE du, avremo $dz^2 + du^2 = dx^2 + dy^2$, e $x^2 + y^2 = z^2$. Ora l'equazione della curva al ſoco venga generalmente eſpreſſa dalla formula $pdz = du$, in cui p è una data funzione di z, e ſarà $dz^2 + p^2dz^2 = dx^2 + dy^2$, e collocato in vece di dy il ſuo valore naſcente dall'equazione $x^2 + y^2 = z^2$, vale a dire $\frac{zdz - xdx}{\sqrt{zz - xx}}$, troveremo $dz^2 + p^2dz^2 = dx^2 + \frac{zdz - xdx}{zz - xx}^2$, la qual equazione eſpurgata con le traſpoſizioni, e con una ſemplice eſtrazione della radice prima, paſſa nella ſeguente $pdz = \frac{zdx - xdz}{\sqrt{zz - xx}}$; e ſeparate le variabili col porre

$$x = zq, \quad \frac{pdz}{z} = \frac{dq}{\sqrt{aa - qq}}.$$

Il metodo del Sig. Ermanno conſiſte in notare l'uguaglianza fra le due quantità $zzdu$, e $ydx - xdy$, il che ſi ricava dalla ſola ipotezione della figura, eſſendo l'area BGC, meno il triangolo AGC, uguale al trilinco BCA, ed in conſeguenza eguali i loro elementi.

Quando poi ſi voglia coſtruire la premeſſa equazione, ci ſi preſenta la preparazione del Sig. Bernulli; giacchè il membro $\int \frac{dq}{\sqrt{aa - qq}}$ ricerca la deſcrizione d'un arco circolare di raggio coſtante. E di fatto per queſta via nel luogo ſopraccitato ſono venuto in cognizione, che l'epicicloide corriſponde alla legge di forza centrale in ragione reciproca quadruplicata delle diſtanze.

Nel ſecondo punto principale della noſtra controverſia ſi cercava, in che pregio doveſſe tenerſi la ſoluzione particolare del Sig. Ermanno; e non è paradoſſo il mio, come ſi sforzano di ſpacciarlo i Signori Bernulli, quand'ho avuto coraggio di preferirla, o almeno d'uguagliarla alla ſoluzione generale, per due motivi di ſomma importanza; ſi perchè ha un non ſo che di ſingolare, come vedremo a ſuo tempo; ſi perchè non reſta inviluppata fra quantità traſcendenti.

E' maſſima comunemente ricevuta da' Geometri antichi, e moderni, non eſſere lieve fallo contro l'arte, quando un problema ſi ſcioglie per genere improprio. Viene cenſurato chi maneggia per li luoghi ſolidi un problema piano, chi ſoddisfa ad una quiſtione lineare con curve di grado troppo elevato; e pure tutte queſte curve non eſcono fuori della linea delle algebraiche. Che ſarà dunque il trattare un caſo algebraico con curve meccaniche, che ſono totalmente differenti di genere? Non vorrei però, che mi credeſſero così ſcrupoloſo, quaſi che io diſprezzaſſi univerſalmente ſimil ſorta di ſoluzioni. Io le accetto per buone, quando non ne trovo di migliori; mentre nulla rileva per qual ſentiero ſi pervenga allo ſcoprimento d'una ſublime verità. Lodo chi le adopera, e lodo molto più chi ſa deſtramente ſchivarle: e quì dee notarſi, che la noſtra diſputa non cade ſopra la bontà, ma ſolo ſopra l'eleganza della ſoluzione.

Pare, che mi ſi ammetta il principio, e che ſi tenti di eluderlo con due riſpoſte. Primieramente dicono, che quantunque le formule dipendano dalla comparazione di due archi circolari commenſurabili, contuttociò non è difficile il ridurle ad equazioni puramente algebraiche; e ſi ſervono d'un metodo ingegnoſo, che nulla più, adattandolo poſcia con pari ſagacità agli eſempli controverſi. Chi mai ha negato ciò? non ci voleva un gran che a capire, che ſe ſotto la ſembianza d'eſpreſſioni meccaniche ſi naſcondono curve geometriche, egli è d'uopo, che ſi poſſa levar loro la maſchera, e ravviſarle per quelle che ſono, almeno in alcuni incontri più manifeſti. Era noto, che da due quantità logaritmiche ſi fa paſſaggio a due ordinarie, e non eſſerci quadratura per compoſta che ſia, che non ſerva ad una curva algebraica, quando il membro corriſpondente ſi poſſa ridurre ad una eſpreſſione ſimile con una congrua ſoſtituzione. Ho detto ſimile, e mi par d'aver detto a baſtanza per eſſere inteſo in una materia sì conoſciuta, tuttochè il Signor Niccolò Bernulli m' abbia a torto per queſto capo accuſato di paralogiſmo.

Ciò non oſtante la riſpoſta non tronca il nodo. Siaci pure il metodo per ottenere la bramata riduzione, ed anche più generale di quello, che in fatto ſi ſperimenta; non ſarà ſempre meglio lo ſfuggire, ſe pur ſi può, la comparazione delle grandezze traſcendenti, che andare in traccia del modo, che dee ſervire a ridurle? in quella guiſa appunto, che in una quiſtione d'Analiſi volgare meriterebbe più lode colui, che la maneggiaſſe con quantità reali, e commenſurabili, di quello, che v' introduceſſe le irrazionali, e le immaginarie, ſe bene inſegnaſſe poi la maniera di convertire le prime in commenſurabili, e le ſeconde in reali.

Riſpondono ſecondariamente i Signori Bernulli, che non è tanto ſingolare l'ipoteſi comune conſiderata dal Sig. Ermanno, che non ce ne ſia un'altra al pari privilegiata; cioè, quando le forze centrali ſerbano la ragione delle diſtanze, nella quale l'equazione viene integrata ſenza la viſta di quantità traſcendenti. Soggiungono, ch'io mi ſono trovato imbarazzato, ed ho voluto laſciar piuttoſto il problema da ſciogliere, che tormentarmi con uno ſforzo vano, e fanno le maraviglie, perchè dal Sig. Ermanno non ſia ſtata eſteſa a queſto caſo la propria ſoluzione. Suppli-

ſco-

ſcono eſſi alla mancanza, e regiſtrano due ſoluzioni, la prima derivata dalla formula del Sig. Ermanno; la ſeconda, tutto lavoro del Sig. Giovanni, procede per mezzo d'angoli ridotti geometricamente, ed analiticamente a grandezze algebraiche.

In queſta occaſione i lodati Matematici anno ommeſſe, o troncate alcune mie aſſerzioni, e finto di non intendermi per più facilmente impugnarmi. Sia tutto vero ciò, che propongono, è coſa notabile, che ſcandagliato da eſſi tutto il ſondo della lor Geometria, non anno ſaputo rinvenire che un ſolo caſo, oltre il già ponderato, in cui ſi poſſa procedere per quantità puramente algebraiche; onde la noſtra ipoteſi laſcerebbe bensì d'eſſere ſingolare, ma non d'eſſere privilegiata. Potrei far vedere, che non mi trovo imbarazzato, quanto eſſi credono, e potrei dilatare ad altri caſi più compoſti la formula del Sig. Ermanno, ſe lo ſtimaſſi opportuno. Aggiugnerei di non aver mai negato, che non abbia ad avere il ſuo uſo in qualche ſiſtema particolare di forze centrali, o col preparar l'equazione, o col ridurre ad algebraiche le quantità traſcendenti, o coll' inſinuare nell'eſpreſſione deſtramente le grandezze preſuppoſte dalla predetta artificial riduzione.

Ho detto generalmente non eſſerci ſtrada di diſtinguere le curve geometriche, ſenza che c'entrino quantità meccaniche. Nell'atto ſteſſo di prorompere, com'eſſi vogliono, nelle mie eſclamazioni, e di recare l'eſempio delle ſezioni coniche riferite al centro, m'eſprimo, che nulla gioverà averle in viſta, mentre non ſi ſcuopra prima il metodo di ſommare l'eſpreſſione propoſta; e poco dopo conchiudo, che dalla mia oſſervazione ſi renderà manifeſto, qual differenza paſſi tra le formule generali, e la particolare del Sig. Ermanno: tanto è vero, che io parlava generalmente. Alla pag.207. (*d*) ſoſtento eſſere il caſo noſtro l'unico, che poſſa maneggiarſi con equazioni analiticamente integrabili; ma nel luogo ſteſſo ſoggiungo, che eſſo è compreſo con tutti gli altri nella formula generale meccanica, e che per diſtinguerlo non c'è biſogno di riduzione. Da tali eſpreſſioni, e molto più dal mio modo di procedere alla pag.200. (*e*) chiaramente ſpicca la mia intenzione. Nell'equazione del Sig Ermanno conſervata nella ſua purità, e non alterata da preparazioni, o da riduzioni, per l'una parte le variabili non ſi ſeparano, nè ſi dà una doppia integrazione algebraica, ſuorchè nell'unico caſo della forza centrale in proporzione reciproca de' quadrati delle diſtanze; per l'altra in tutti gli altri caſi poſſibili ſi richiede nuovo artificio, che generalmente non è noto, ſenza che s'incontrino quantità traſcendenti; avvegnachè in qualche incontro certi giuochi d'analiſi poſſano ſupplire al biſogno; dunque l'accennata ipoteſi ſeguiterà a godere il privilegio della ſua ſingolarità.

Frattanto il Sig. Niccolò dà alla luce una maniera di ſua invenzione, con cui ſoddisfa al caſo medeſimo ſenza l'ajuto delle quantità meccaniche. Se bene la ſua ſoluzione non va immune da ogni neo di peti-

(*d*) In queſta edizione pag.28.
(*e*) Nella preſente edizione pag.25.

zion di principio ; nulladimeno io , che mi ſono propoſto la difeſa , e non l'offeſa, riſponderò, che il caſo, e non il modo è ſtato chiamato da me ſingolare.

Si querelano i Signori Bernulli d'una mia innocente eſpreſſione, cioè, che ſe non ſi foſſero tolte di mira, non ſi ſarebbero forſe poſte in luce le ſezioni del cono. Vogliono, che ſia una puntura, che vada a ferire ingiuſtamente il Sig. Giovanni; benchè io tutt'altro aveſſi in viſta, ed abbiano la bontà di credermelo, fuorchè il mentovato Signore. Per far poi comprendere, che non m'è uſcita a caſo la parola di bocca, riflettano all'epoca della grand'opera Newtoniana, in cui il problema diretto ſi trova ſciolto da tanto tempo, e m'imenderanno, ſenza che di vantaggio mi ſpieghi. La difficoltà non conſiſte, com'eſſi penſano, nel paragonare inſieme due archi circolari; ma nel ridurre la differenziale propoſta a quella d'un'arco di cerchio: e la coſa è per ſe ſteſſa, almeno preſa univerſalmente, sì ardua, che da loro viene giudicata impoſſibile.

O quì sì che danno in eſclamazioni: mi rimproverano, che accuſo di particolarità la ſoluzione del Sig. Giovanni, perchè non ſupera l'impoſſibile; che preſumo d'integrare l'integrabile, e che prometto coſe troppo magnifiche. Io nulla prometto del mio: odano, come s'eſprime il il Sig. Ermanno nel VII. Giornale d'Italia pag. 227. „ Egli è certiſſimo, „ ch'avvegnachè il problema inverſo delle forze centrali nel voto gene„ ralmente conſiderato è meccanico, niente di meno infiniti ſono i caſi „ particolari, che rendono il problema algebraico, e ſomminiſtrano curve „ coſtruibili ſenza le quadrature delle figure curvilinee. Si domanda „ dunque una formula generale, che racchiuda tutti i caſi poſſibili, che „ ſomminiſtrano curve geometriche coſtruibili indipendentemente dalle „ quadrature. A molti parerà forſe impoſſibile il problema, ma per di„ ſingannarli darò quì la formula deſiderata, dimandandone ſolo la di„ moſtrazione, e la coſtruzione delle curve, a cui compete „. Aggiunge poſcia la formula, che ſi può vedere nel luogo citato, e ch'io tralaſcio per brevità. Pareva, che il Sign. Ermanno prevedeſſe fin d'allora ciò, che doveano dire un giorno i Signori Bernulli, e ſe ben ſo, che eglino con la loro acutezza, veduta la formula, ne penetreranno il miſterio, non reſterà però, che non abbiano giudicata impoſſibile la quiſtione: e mi credano, che non gioverà interpretare queſto vocabolo, come anno fatto quello di diſperato. Non ſarà pertanto picciola lode di queſto inſigne Geometra, che i ſuoi ſforzi, per adottare la fraſe Bernulliana, tant'oltre s'eſtendano, che ſuperino l'impoſſibile, e che egli ſia arrivato fin dove i Matematici di prima ſfera nè pure ſperavan di giungere. Premeſſo ciò, io mi contento, che m'accuſino a loro talento di parzialità.

Ora capiranno, che non potea riuſcirmi nuova, ne la ſpirale iperbolica ſcoperta prima col metodo diretto dal Sig. Varignon, nè le infinite curve algebraiche riſpondenti alla legge di forza centrale in ragione inverſa de' cubi delle diſtanze. Per darne un ſaggio mi fermerò ſu queſt' ultimo punto, mettendo in chiaro l'analiſi occultata dal Sig. Bernulli negli Atti di Lipſia 1713., a cui profeſſa eſſere pervenuto per certi compendj di calcolo a lui noti.

Li-

Limitando dunque l'eſpreſſione generale delle forze centrali col porre nella noſtra ipoteſi $f = \frac{g}{y^3}$, troveremo $dx = \frac{dy}{\sqrt{c^2y^2+b^2-a^2}}$, equazione unica, che abbraccia curve infinite, ſecondochè ſi va alterando la relazione delle coſtanti.

Primieramente ſia $c^2 = 0$, e l'equazione apparterrà alla ſpirale logaritmica, ed anche al cerchio, quando nella ſteſſa ipoteſi foſſe $b^2 - a^2 = 0$.

Secondariamente poſta c^2 uguale ad una quantità poſitiva, e $bb = aa$, ſarà $dx = \frac{dy}{cy}$, o pure $\frac{ydx}{dy} = \frac{a}{c}$, di maniera che nella curva ſarà ſempre coſtante la ſuttangente, proprietà, che conviene alla ſpirale iperbolica.

In terzo luogo meſſe da parte le limitazioni, e conſiderata la noſtra formula con tutti i ſuoi termini, poſſiamo concepire la quantità bb maggiore, e minore dell'unità a^2, e preſa $b^2 - a^2 = g^2$, può eſſere la g^2 o affermativa, o negativa. Tolta per mano la ſeconda ſuppoſizione, eſaminiamo che conſeguenze ſe ne deducano.

Aſſunto il raggio $AF = g$ (Fig. 15.), e tirato l'arco di circolo KFI, ſi verificherà l'analogia AC, y: CE, dx:: AF, g: FG, dz; dunque $gdx = ydz$, e fatta nella formula l'opportuna ſoſtituzione $\frac{dz}{g} = \frac{dy}{y\sqrt{c^2y^2-g^2}}$. Pongo $cy = s$; dunque $\frac{dy}{y\sqrt{ccyy-gg}} = \frac{dz}{g} = \frac{ds}{s\sqrt{ss-gg}}$, e moltiplicando i membri dell'equazione per g^2, $gdz = \frac{g^2ds}{s\sqrt{ss-gg}}$: ma condotta la retta AK aſſe delle curve cercate, e preſo l'arco $KG = z$, e la ſua differenza $GF = dz$, la ſommatoria di gdz, vale a dire gz, ſarà un arco di cerchio, per eſempio KH in proporzione all'arco KG, come $g : a$. Di più è noto eſſere l'integrale $\int \frac{ggds}{s\sqrt{ss-gg}}$ un arco pure di circolo, il cui raggio è g, e la ſecante s, cioè a dire in forza dell'equazione premeſſa l'arco KH ſopra determinato; dunque dato l'arco KH, ſarà data la ſua ſecante $AL = s = cy$, e la ſecante AL ſarà all'ordinata AC delle curve cercate in proporzione coſtante: il che, ec.

COROLLARIO I.

L'arco KH ſi è ſuppoſto minore di KG, perchè nella formula generale alla quantità fdy s'è premeſſo il ſegno negativo, e le forze ſono ſtate conſiderate come centripete: ma cangiando ſiſtema, e ſupponendole centri-

centrifughe, la quantità b^2 si trasforma in negativa, ed allora g^2 è necessariamente maggiore dell'unità. Sarà pertanto d'uopo il prendere l'arco KG in data proporzione di minore inegualità all'arco KI, e condotta la secante AN, determinare l'applicata AC, che sia sempre ad AN in ragione costante.

COROLLARIO II.

Variata la relazione di GK ad HK, ovvero IK, si muta la natura, ed il grado della curva BCD. Se le due quantità a g serbano fra loro una ragione, o irrazionale, o trascendente, è fuor di dubbio, che sono meccaniche le curve descritte; ed all'incontro algebraiche, se la proporzione è razionale, e come di numero a numero. Ora si sa, che a misura della divisione, e moltiplicazione degli archi si muta l'equazione locale, ed il grado della curva. Così saranno infinite le curve geometriche, che soddisfanno al quisito.

COSTRUZIONE.

Sia GAK (Fig. 16.) asse delle curve, A il polo. Prendo l'arbitraria costante AB, e tiro ad AB la normale BD. Descritto col raggio variabile AK l'arco di cerchio KDFL, pongo l'arco KD intercetto fra le due perpendicolari BD, BK all'arco maggiore KF per le forze centripete, o all'arco minore KC per le centrifughe in ragione costante: i punti F, C saranno alle curve cercate.

Mi persuado essere diversa dalla mia l'analisi del Sig. Bernulli; mentre somministra bensì le curve stesse, ma in posizione differente, e riferite ad un'altro asse. Per vedere l'accordo di queste due costruzioni, che a prima vista non apparisce, facciasi come l'arco KD all'arco KF; così il quadrante KE all'arco KL, vale a dire in proporzione costante; e tirato dal polo A il nuovo asse AL, sopra di cui s'alzi la perpendicolare AH = AB, la linea HS condotta parallela ad AL taglierà l'arco IL = = ED. Perchè dunque KE: KL:: KD: KF, o pure KE: KD:: KL: KF, sara altresì ED: DK:: LF: FK, ovvero ED = IL: LF:: KD: KF; sarà perciò LI ad LF in ragione costante, come appunto richiede la costruzione Bernulliana.

Resta, che si prenda per mano il quarto caso, e supponga si affermativo il quadrato b^2, e nello stesso tempo maggiore dell'unità, ovvero negativa la costante aggiunta c^2: ma perchè da quel che s'è detto riesce facile il determinare le curve col mezzo de' logaritmi, e della rettificazione degli archi circolari, non ne parleremo di vantaggio.

Per chiudere la presente Dissertazione con qualche particolare, che abbia aria di novità, giacchè il Sig. Niccolò Bernulli ha fatto menzione nelle sue Note delle forze centrali nel pieno, credo non mi sarà disdetto l'estendere le speculazioni del Sig. suo Zio, come questi ha ampliate le Newtoniane, pubblicando con l'occasione, che favorevole mi si presenta,

ta, alcune mie riflessioni in tal proposito, comunicate fin l'anno 1712. a' Signori Ermanno e Zendrini. E se bene io le ho dedotte da certe formule di mia maniera, tuttavia per non fare il già fatto, e per isfuggire il tedio d'una prolissa dimostrazione, adotterò quelle del Sig. Giovanni, che non saranno sospette.

Osserva egli acutamente al suo solito, che posta la densità in ragione reciproca della distanza, e la resistenza del mezzo in duplicata della velocità, non viene descritta dal mobile la spirale logaritmica nell'unico caso, in cui sia la forza centrale in proporzione inversa del quadrato della distanza, ma di più quando la forza è come qualsivoglia potestà della distanza medesima o diretta, o reciproca. Non è la sola spirale dotata d'una sì bella proprietà; altre curve infinite di numero, e quello ch' è più, di natura algebraiche vantano un simile privilegio, purchè si vada opportunamente alterando la legge della resistenza. Eccone la dimostrazione.

Sia la curva BCD (fig. 17.) trascorsa dal mobile nel pieno con una data ipotesi di forza, e di resistenza. AC è l'ordinata $= y$, CE un arco minimo descritto intorno il centro A $= dx$, CD l'elemento della curva $= ds$, CM il raggio osculatore, CL il co-raggio, o come io lo chiamo, la sottoscolatrice $= z$. Dal polo A si tiri la retta AN normale a CM, e s'appelli t l'intercetta CN.

Le formule del Sig. Bernulli, che perfettamente s' accordano con quelle del Sig. Ermanno sono le seguenti. $uu = fz$, $\mp Rds + udu = \mp fdy$, nelle quali R significa la resistenza, u la velocità, f la forza centrale data per una funzione arbitraria dell'applicata.

Venga proposto di determinare tutte le curve infinite, in cui le due flussioni udu, fdy si rimirino con una proporzione costante.

Conciossiachè $udu : fdy :: a : 2b$; dunque $2budu = fdy$, ed integrando $buu = \mp g \mp \int fdy = \mp g \mp p$, posta $p = \int fdy$, che sarà data in conseguenza per y. Di più essendo $u^2 = fz$, sarà altresì $\mp g \mp p = bfz$, o pure $\frac{dy}{z} = \frac{bfdy}{\mp g \mp p} = \frac{bdp}{\mp g \mp q}$: ma per le cose dimostrate nella mia soluzione del problema de' raggi osculatori $\frac{dy}{z} = \frac{dt}{t} = \frac{bdv}{\mp g \mp p}$; dunque sommando, si scoprirà t essere data per p, ovvero per y e si farà facilmente transito alla costruzione delle curve desiderate.

COROLLARIO

Che se fosse $-fdy = udu$, allora, come ha notato il Signor Bernulli, restando il solo termine $R\,ds = 0$, le curve si descriverebbero nel vacuo; onde la nostra maniera di procedere ci suggerisce una nuo-

nuova formula generale con le variabili ſeparate per le forze centrali in un mezzo non reſiſtente.

Molte importanti rifleſſioni ſi potrebbero dedurre da' premeſſi principj, che io riſerbo a miglior congiuntura. Preſentemente limitando la formula col ſupporre $f = by^m$, ed ommeſſa l'addizione della coſtante g nel prendere l'integrale, la premeſſa analiſi ci farà ſcoprire, eſſere proprietà comune delle noſtre curve l'avere la ſottoſculatrice all'ordinata in proporzione coſtante. In fatti eſſendo $udu : by^m dy :: a : 2b$, cioè a dire $2budu = by^m dy$, ſarà integrando $bu^2 = \frac{by^{m+1}}{m+1} = bfz = bby^m z$, vale a dire

$$\frac{y}{m+1} = bz.$$

Giacchè dunque $y = cz$, abbiamo $\frac{dt}{t} = \frac{dy}{z} = \frac{cdy}{y}$, ed integrando $t = by^c$; la quantità b è una coſtante arbitraria. Per iſcoprire l'equazione generale delle curve abbracciate dalla formula, oſſervo verificarſi il ſeguente analogiſmo CE, dx : CD, ds :: CN, CA, y dunque $ydx - tds = by^c ds$, ed in conſeguenza $dx = \frac{by^{c-1}dy}{\sqrt{aa - oby^{2c-2}}}$.

Preſo AK aſſe delle curve, e dalla diſtanza AF $= a$ deſcritto l'arco IFK, avremo AC, y : CE, dx :: AF. a : FG, du, e perciò $ydu = dx$, e $du = \frac{by^{c-2}dy}{\sqrt{aa - b^2y^{2c-2}}}$.

Sia $by^{c-1} = q$, e fatta la dovuta ſoſtituzione, $\frac{1}{c-1} \cdot du = \frac{dq}{\sqrt{aa - qq}}$.

COSTRUZIONE.

Facciaſi come $c - 1$ ad a così l'arco FK all'arco HK, ovvero IK, e tirate le normali HP, IQ, ſarà data la relazione dei ſeni AP, AQ all'ordinata AC in virtù dell'equazione $by^{c-1} = q$.

Variato l'eſponente c ſi cambia la natura della curva, e dall'eſpreſſione generale oltre ad infinite curve meccaniche, vengono compreſe infinite geometriche, mentre la ragione di c ad a ſia razionale; fra le quali molte curve note, come la parabola riferita al foco, l'iperbola al centro, il circolo ad un punto preſo nella circonferenza, e la più ſemplice fra le epicicloidi al principio della rotazione. Dee eccettuarſi il caſo di $c = a$, che dà la ſpirale logaritmica.

Ora

Ora nell' ipoteſi aſſunta la formula Bernulliana $\pm R\,ds + u\,du = \pm f\,dy$ ſi trasforma nella ſeguente $\pm R\,ds = \pm Ay^m dy$, ed eſſendo nelle noſtre curve l'elemento $ds = \frac{dy}{\sqrt{aa - bby^{2c-2}}}$, avremo

$\pm \frac{R}{\sqrt{aa - bby^{2c-2}}} = \pm Ay^m$. Sia la reſiſtenza in ragione compoſta della denſità del mezzo, e di qualſivoglia poteſtà della velocità, cioè $R = Du^n$; ma eſſendo $u^2 = By^{m+1}$, ſarà altresì $u^n = Cy^{\frac{mn+n}{2}}$ e finalmente $\pm \frac{D}{\sqrt{aa - bby^{2c-2}}} = \pm Gy^{-\frac{nm-n+2m}{2}}$. Le lettere A, B, C, G dinotano quantità coſtanti ſurrogate in luogo d'altre più compoſte.

Primieramente ſia, giuſta la comune ipoteſi, la reſiſtenza in ragione duplicata della velocità, cioè $n = 2$ e l'eſponente $-\frac{nm-n+2m}{2} = -1$.

Lo ſparire che fa in queſt'incontro l'eſponente m indice della forza centrale dinota, che in ſua vece ſi può ſoſtituire qualſiſia numero, e più generalmente qualſiſia quantità determinata: da che ſi raccoglie eſſere proprietà comune delle noſtre curve, che poſta la denſità $D = \frac{\sqrt{aa-bby^{2c-2}}}{y}$, e la reſiſtenza come il quadrato della velocità, verrà ſempre dal mobile deſcritta una medeſima curva, quantunque ſi muti la legge della forza centrale, e ſi prenda o come coſtante, o ad arbitrio come qualſivoglia dignità della diſtanza. Che ſe foſſe $c = 1$, di modo che la quantità $\sqrt{aa-bby^{2c-2}}$ ſia coſtante, diventando l'eſponente $2c-2=0$, allora la curva ſarebbe una logaritmica ſpirale, che cade ſotto la noſtra univerſal eſpreſſione, e la denſità reciprocamente come la diſtanza.

Coſa maravigliosa ſi è, che nel voto, mutata la legge della forza, ſi cambia l'indole della curva, ed ogni ſuppoſizione richiede una linea diverſa; dove all'oppoſto nel pieno una ſola curva ſoddisfà a tutte le ſuppoſizioni.

In ſecondo luogo ſia la reſiſtenza come la velocità, cioè $n=1$; dunque $\pm \frac{D}{\sqrt{aa-bby^{2c-2}}} = \pm Gy^{-\frac{1+m}{2}}$. Sia $m = 1$, in maniera che

$y^{\frac{-z+m}{z}}$ ſia coſtante, ed in tutte le noſtre curve la denſità ſarà come $\sqrt{aa-bby^{2c-2}}$, e determinando la formula ad eſprimere la logaritmica ſpiale, la denſità diventa coſtante; e ſe nella curva ſteſſa foſſe $m = -1$, la denſità ſarebbe come y^{-1}, cioè come la forza centrale in ragione reciproca della diſtanza; ma in queſto caſo ſarebbe coſtante la velocità, la qual proprietà conviene a tutte le noſtre curve; imperocchè eſſendo $u^2 = fz$, e $z = \frac{y}{c}$, e per la ſuppoſizione $f = by^{-1}$, ſarà parimente $u^2 = \frac{b}{c}$.

La denſità poi è come $\sqrt{aa-bby^{2c-2}}$ non ſolo nel caſo di ſopra eſpreſſo, ma ripetendo la formula generale $\frac{\pm D}{\sqrt{aa-bby^{2c-2}}} = \pm Gy^{\frac{-nn-n+m}{2}}$ ogni qual volta ſia coſtante il ſecondo membro dell'equazione, e ſia $-nn - n + 2m = 0$, il che ſi verificherà, quando ſia $n = \frac{2m}{m+1}$; onde ſe $m = -2$, come nella comune ipoteſi, avremo $n = 4$, e così diſcorrendo.

Finalmente ſia coſtante la forza centrale, ed $m = 0$, troveremo $\frac{\pm D}{\sqrt{aa-bby^{2c-2}}} = \pm Gy^{\frac{-n}{2}}$, e nella logaritmica la denſità *com* $y^{\frac{-n}{2}}$.

Non mi fermerò a determinare i caſi dell'aſcendimento, e della diſceſa, come nè meno gl'incontri, che cangiano le forze di centripete in centrifughe, eſſendo ſtati queſti punti chiaramente ſpiegati dal Sig. Bernulli, che non ſi può deſiderar di vantaggio. Baſterà, che laſciate l'altre conſeguenze, dia fine col fiſſare i canoni delle forze centrali per le noſtre curve in un mezzo non reſiſtente. Sarà ſempre $\pm fdy = \frac{dt}{t3}$; ma $by^0 = t$; dunque $\pm fdy = \frac{cdy}{bby^{2c+1}}$, cioè $\pm f = \frac{c}{bby^{2c+1}}$.

Non ad altro oggetto ho pubblicate queſte mie meditazioni, che ſtarebbero meglio ſoppreſſe, ſe non per far vedere a' Matematici Oltramontani, ed in iſpecie al Sig. Niccolò Bernulli, che anche in Italia ſi ſpende da' Geometri qualche ora d'ozio in materie così ſublimi, ſenza che egli ſi prendeſſe la briga di riſvegliarli con un problema, e che gl'Italiani penſano quanto gli altri, ma non anno tanto prurito di farſi Autori.

Riſpoſta del Sig. Niccolò Bernulli Nipote del Sig. Giovanni a quelle coſe, che il Sig. Conte Jacopo Riccato inſerì nel Tomo XXI. del Giornale de' Letterati d' Italia all' Articolo VIII.

SArebbe ſtato da deſiderare, che il Sig. Conte Riccato non aveſſe mai eccitata queſta conteſa inutile, che è fra lui, e me, o che ſi foſſe acchetato alle riſpoſte, che diedi nelle mie annotazioni alle obbiezioni, colle quali ei ſenza cagione attaccò mio Zio, o almeno aveſſe riſpoſto alle mie

Si è ſtimato di far coſa grata al Lettore riſtampando le Annotazioni del Sig. Niccolò Bernulli allo Schediaſma III., come altresì la preſente Riſpoſta contenuta nel Tomo XXIV, Articolo IV. del Giornale de' Letterati d' Italia; acciocchè non gli reſtaſſe che deſiderare per intendere compiutamente la controverſia fra l' Autore, ed i Signori Giovanni, e Niccolò Bernoulli. Alla lettera del Sig. Jacopo Ermanno al Sig. Giovanni Bernoulli inſerita dal Sig. Niccolò nella ſua Riſpoſta ſi può contrapporre la ſeguente dello ſteſſo Sig. Ermanno al Sig. Bernardino Zendrini, che la comunicò al noſtro Autore con una ſua in data de' 29. Giugno 1715. Ecco il paragrafo della lettera. „ *Ho veduto la bella Riſpoſta del Dottiſſimo* „ *Sig. Conte Riccato in mio favore alle oppoſizioni del Sig. Gio: Bernoulli alla ſoluzione del Problema inverſo delle forze centrali nel voto.* „ *Mi riconoſco tanto più obbligato alla bontà di queſto Dottiſſimo Gentiluomo, quanto maggiore è l' affetto, che ha voluto paleſarmi con* „ *eſpreſſioni non ſolo a me onorevoliſſime, ma nè meno da me meritate,* „ *e con cattar briga col Sig. Bernoulli poco uſato a ſoffrire le altrui oppoſizioni. Prego V. S. di far conoſcere al detto Sig. Conte, riverendolo* „ *in mio nome, queſti miei ſinceri ſentimenti di gratitudine, fin a tanto* „ *che io abbia il modo di farlo da mia poſta con le lettere, non baſtandomi* „ *il tempo di farlo. Il Sig. Conte ha beniſſimo compreſo il motivo dell'* „ *eſame da lui ſtimato così ſevero della mia ſoluzione conſaputa. Non ho* „ *riſpoſto alla critica del Sig. Bernoulli, perchè non l'ho ſtimato neceſſario,* „ *conoſcendo io medeſimamente il motivo del Sig. Bernoulli, e potendo ſoffrir* „ *beniſſimo, che un Uomo tale dica la verità, preferendo la ſua ſoluzione* „ *alla mia. Come egli è mio amico, non ho ſtimato opportuno, nè ben fatto* „ *ingaggiarla con eſſo lui per un motivo di sì poca rilevanza. Ma come il* „ *Sig. Conte ha voluto ſupplire alle mie veci, non poſſo non ringraziarlo di vero cuore. La riſpoſta parmi ſoda, e dottiſſima, poichè è ripiena* „ *di rifleſſioni degne di lui. Egli ha ottimamente indovinato l' artifizio,* „ *con cui ſono arrivato all' integrazioni conſapute, col porre come fa* $\frac{x}{y}$

„ $= p$, *e poi* $\frac{y}{x} = q$, *o ſuppoſizioni ſimili a queſte.*

mie annotazioni con quelle modeſtia, ch'egli loda in noi (di che gli rendiamo moltiſſime grazie) nè aveſſe tante volte con replicate parole accuſato mio Zio d'ignoranza, come aveſſe diſperato dell'integrazione d'una certa formula, che facilmente avrebbe potuto integrare, ſe aveſſe ſaputo ſervirſi de' propri ſuſſidj; nè mi aveſſe appoſto per lo Problema, che propoſi a' Geometri d'Italia, ch'io aveva prurito di farmi Autore. Egli avrebbe potuto fare tutte queſte coſe, ſenza che niente perdeſſe della ſua riputazione il noſtro comune amico Sig. Ermanno, il quale, ſono fermamente perſuaſo, che ſia per diſapprovare queſta conteſa; e facendo ciò, non ci avrebbe data occaſione alcuna di ſoſpettare, che abbia moſſa la conteſa a mio Zio per puro fine di contraddire. Imperciocchè che coſa importano a lui quelle coſe, che gli amici con lettere familiari ſi comunicano, o delle quali amichevolmente ſi avviſano? Certamente s'egli non aveſſe avuto prurito di farſi Autore delle parole, forſe meno diligentemente proferite, come ſpeſſe volte accade nelle lettere familiari, mai non avrebbe cercata occaſione di contendere. Niega mio Zio aver detto, che la formula del Sig. Ermanno è diſperata; il Sig. Conte Riccato afferma. E quale utilità ricaverà il Pubblico da queſta conteſtazione? Spiega mio Zio le ſue parole in quel modo, ch'io notai nell'Articolo XIII. del Tomo XX. del Giornale a carte 319. (*a*), cioè eſſere il loro ſenſo, che cotali formule atterriſcono l'Analiſiſta, il quale ſoſpetta eſſerci ſotto maggiore difficultà, di quella, che veramente v'è, e che però potrebbe ſoſpettare alcuno, che il Sig. Ermanno aveſſe dedotta la ſua integrazione da qualche precedente notizia, che eſſo ha avuta dalla curva ricercata; queſte parole contengono conghiettura, e non una ſeria affermazione. Non diſſe mio Zio, la voſtra ſoluzione è fatta a diſegno, ma ſembra fatta a diſegno; le quali ſole parole moſtrano, che mio Zio non ha aſſolutamente dichiarata impoſſibile la formula Ermanniana. Conceduto dunque al Sig. Ermanno, come concedo facilmente, che abbia dedotta la ſua integrazione da qualche metodo a priori, ſolamente ne ſeguirebbe, che mio Zio non avrebbe bene conghietturato, ma non già, che eſſo ſi foſſe laſciato ingannare dalla prima apparenza, di modo che credeſſe, che qualche formula integrabile non ſi poteſſe integrare. A torto il Signor Conte Riccato a carte 307. vuole renderci ridicoli, perchè dicemmo, che il diſperato non ſignifica impoſſibile: ognuno che leggerà le mie parole a carte 319. (*b*) ritroverà eſſere ciò falſiſſimo: imperciocchè ivi diſſi tutto il contrario con parole chiariſſime, e ſpiegai il diſperato per l'impoſſibile. Le mie parole ſono queſte: *Non diſſe eſſere la coſa diſperata, cioè impoſſibile, poichè la conoſceva fatta, ed ei pure la fece*, ec. Quindi appare quanta gloria abbia riportata il Sig. Conte Riccato, cercando qualche coſa da contraddire, e quanto la ſua riſpoſta ſia più dottrinale, che contenzioſa. Ciò ſarà poi anche più evidente, ſe eſamineremo, che coſa riſponda il Sig. Conte alla ſeconda obbiezione fatta al Sig. Ermanno. Incolpa d'errore mio Zio, e me; quello, per-

(*a*) In queſto Tomo pag. 30.
(*b*) Nella preſente edizione pag. 30.

perchè opposè al Sig. Ermanno, che abbia trascurato d'aggiugnere all'uno, e all'altro membro dell'equazione la quantità costante nella prima integrazione; me, perchè opposi a lui, che aveva seguitate le pedate del Sig. Ermanno, ed aveva parimente tralasciata la quantità costante da aggiugnere nel prendere gl'integrali. Comanda, che noi leggiamo quelle cose, che ha scritte a carte 207. (*e*), e crede d'aver prevenuta l'opposizione in tale maniera, che ammira il nostro ardimento, perchè un'altra volta abbiamo toccato questo punto. Ho lette quelle cose, che sono scritte a carte 207., ma non vi ho ritrovati spaventi, che mi disturbino dal non fare una simile obbiezione al Sig. Conte Riccato. Confesso, che questa obbiezione niente leva alla soluzione del Sig. Ermanno, la quale lo stesso mio Zio lodò come buona, e degna della sua penetrazione; ma ne siegue dalla dimenticanza di quest'aggiunta, che il Sig. Ermanno avanti di aggiungere questa quantità costante, non avrebbe dovuto affermare per cosa certa (come fece nel principio della sua lettera, che è inserita ne commentarj di Parigi dell'anno 1710.) di avere ritrovato, che le sole sezioni del cono soddisfarebbono al Problema, il che solamente gli era stato proposto da ricercare da mio Zio. Imperciocchè quasi aggiunta avrebbe potuto mutare la natura della curva, e se bene in questo caso non muta le sezioni coniche in altre curve di più alto grado, muta però la specie delle sezioni coniche. Per esempio se $b=c$, la curva quisita sarà un' iperbola, e non una parabola, come asserì il Sig. Ermanno, se quell'aggiunta non sarà nulla. Esso Sig. Ermanno, conobbe nella sua risposta a mio Zio scritta a 6. di Dicembre 1710., che quest'aggiunta avrebbe potuto mutare la natura della curva, e che la sua soluzione potrebbe parer a qualcheduno adattata al quisito per consiglio; poichè egli così favella: = Gratum mihi feci$\mathfrak{s}$ti, quod cogitata tua super analysim meam inversi problematis virium centralium in speciali hypothesi harum virium quadratis distantiarum reciproce proportionalium aperire voluisti: videtur tibi solutio mea ex consilio ad quæsitum accomodata, quod quidem non miror, cum tibi solutionis fundamentum nondum expresserim. Sed scias nunc velim me ex suppositione $ax=ty$ didicisse, quod formula mea, ut feci, disponenda, & quod ex iis præcise quantitatibus, quas mihi recensès, integralia sumenda sint. Sed quid pluribus? en tibi totum processum calculi. Æquatio differentialis secundi gradus resolvenda hæc erat. $-\frac{addx\sqrt{xx+yy}}{x}=\overline{ydx-xdy}^{2}\cdot\frac{1}{xx+yy}$, quæ factis substitutionibus ope $ax=ty$, mutatur in $-\frac{addx\sqrt{aa+tt}}{t}=\frac{ydt^{2}}{aa+tt}$, & $ydx-xdy=\frac{yydt}{a}=$ const. unde $-addx=\frac{yytdt^{2}}{\overline{aa+tt}\sqrt{aa+tt}}=a\cdot\frac{yydt}{a}\cdot\frac{tdt}{}$

(*e*) In questo tomo pag. 48.

$\frac{tdt}{aa+tt\sqrt{aa+tt}}$; unde cum $\frac{yydt}{a}$ conſtans ſit, liquet ſponte ſua abſque

ulla accomodatione ad quæſitum, æquationem integrabilem eſſe, eritque $-dx = \frac{yydt}{a} \cdot \frac{-1}{\sqrt{aa+tt}}$.

Hic libenter fateor me feſtinanter nimis quantitatem conſtantem integrali ipſius $-ddx$ adjungere omiſiſſe, idque paulo poſt obſervans, quam meas ad te dediſſem, metuebam fore ut aliæ curvæ, quam ſectiones conicæ, exirent, ſed metus omnis evanuit, ubi calculus proſecutus eram, ec. =

Siccome dunque non ſi può negare, che mio Zio abbia giuſtamente oppoſto al Sig. Ermanno, che la ſua ſoluzione, benchè buona, ſia però difettoſa in queſta parte, e che eſſo non ſia ſtato certo ſenza queſta aggiunta fatta, che le ſole ſezioni coniche ſoddisfanno al quiſito; così io ho meritamente accuſato il Sig. Conte Riccato, perchè ha traſcurato nelle ſue prime integrazioni d'aggiungere a ciaſcun membro la quantità coſtante. Nè li giova la ſcuſa, colla quale dice di non aver voluto ſciorre il Problema, ma ſolamente moſtrare il metodo dell'integrazione. Imperciocchè come può egli eſſer ſicuro dell'eſito del ſuo metodo, ſe prima non ſa quelle coſe, che ricerca il calcolo? Non può dubitare alcuno, che per l'aggiunta della quantità coſtante forſe s'impediſce la ſeconda integrazione? Ma benchè ciò non accada, però avanti di aver fatta l'aggiunta non ſiamo certi, che la ſeconda integrazione non venga impedita, perloche ſenza paralogiſmo in queſti, e ſimili caſi non ſi può tralaſciar di fare queſt'aggiunta.

In quanto all'altra conteſa, che moſſe il Sig. Conte Riccato dell'eleganza della ſoluzione Ermanniana, e Bernulliana, e quale di queſte due ſoluzioni debba preferirſi; di ciò a noi non appartiene diſputare, poichè da tale diſputa la repubblica letteraria non ricaverà alcuna utilità. Ne giudichino i Geometri. Egli è però neceſſario, che io cancelli l'ignominia, che il Sig. Conte Riccato volle imprimere alla ſoluzione Bernulliana. Veramente è una coſa ridicola, che eſſo nieghi l'eleganza a queſta ſoluzione, perchè ſi ſerve della comparazione degli archi circolari. Egli vuole, che queſto ſia un picciolo errore, ma però ſimile, e anzi maggiore di quello, che commetterebbe quegli, che voleſſe coſtruire un problema piano co' luoghi ſolidi, o un problema lineare colle curve di un grado più alto, le quali curve eſſendo però che non ceſſano d'eſſere algebraiche. ne ſiegue, che ſia un'errore molto più grande trattare un caſo algebraico colle curve meccaniche. Pare, che il Sig. Conte adoperi più appoſtatamente il ſofiſma. Gli Antichi incolpavano quelle, che coſtruiſce il problema piano co' luoghi ſolidi, o un problema piano colle curve d'un grado più alto; e 'l Carteſio condanna quello, che coſtruiſce colle curve meccaniche un problema coſtruibile colle curve algebraiche; con-

dan-

danna pure il Carteſio quello, che per la ſoluzione del ſuo problema dimanda, che queſte ſorte di curve poſſano eſſer deſcritte. Hi dunque biſogno mio Zio della medeſima dimanda per la ſua ſoluzione? No: le quantità traſcendenti non entrano nella ſoluzione del problema, ma ſolamente nel calcolo; gli archi circolari poſſono eſſer comparati, ſenza che ſia biſogno di deſcrivere qualche curva meccanica. In oltre ſe per la coſtruzione del Problema aveſſe biſogno della deſcrizione di qualche curva meccanica, non però ſubito ſeguirebbe, che una tale ſoluzione doveſſe poſporſi ad un altra, che foſſe fatta colle curve algebraiche. Imperciocchè è noto da poco in quà, cha molte curve meccaniche più facilmente ſi coſtruiſcono, che molte curve algebraiche, e che i Geometri celeberrimi del giorno d'oggi anno meritamente ripreſo lo ſteſſo Carteſio, perchè eſcluſe dalla Geometria cotali curve meccaniche, e preferiſcono la ſoluzione, la quale ſi fa più facilmente, e più elegantemente con una curva meccanica facile da coſtruire, a quella che non ſi farebbe, ſe non con fatica con una curva algebraica. S'inganna dunque molto il Signor Conte, quando penſa, che ſia ſempre meglio ſchifare nel ſuo calcolo le quantità traſcendenti, che inveſtigare il metodo di comparare fra di loro queſte quantità; e anche quando crede, che meriti maggior lode quegli, che tratta qualche quiſtione d'analiſi volgare colle quantità reali, e razionali, che colui, il quale introduceſſe le quantità irrazionali ed immaginarie, benchè di poi moſtraſſe il metodo di ridurre cotali quantità alle ordinarie. Stupiſco, che il Sig. Conte tanto abborriſca queſta ſorta di quantità, che non voglia ammetterle nel calcolo, ſe non forzato da una ſomma neceſſità. Certamente il buon Analiſiſta niente ſi curerà, che le quantità entranti nel calcolo ſieno reali, o immaginarie, razionali, o irrazionali, algebraiche, o traſcendenti, anzi preferirà le ultime alle prime, ſe vedrà, che il problema poſſa ſciorſi più facilmente, più elegantemente, o più brevemente con queſte, che con quelle. Potrei ciò dimoſtrare con molti eſempj, ma nè addurrò un ſolo. La ſoluzione generale del Problema: data la tangente di qualche arco, ritrovar le tangenti degli archi moltiplici, e ſummoltiplici, la quale diede mio Zio negli Atti di Lipſia l'anno 1714 a carte 274., e nella quale introduſſe i logatitmi immaginarj, non dee forſe preferirſi inquanto all'eleganza a tutte l'altre, che finora abbiamo vedute? Giudichino di queſto i periti Geometri. Certamente non dubito, che ſieno per eſſere del mio ſentimento, e che lo ſteſſo Sig. Ermanno ſarà per condannare il Sig. Conte Riccato, perchè abbia incautamente accuſato mio Zio d'un error grande in Geometria, per avere adoperato nella ſua ſoluzione la comparazione di due archi circolari. Anzi ſono perſuaſo, che il Sig. Ermanno per queſta ſola ragione non poſporrà la ſoluzione Bernulliana (la quale grandemente lodò nella ſua lettera ſopracitata con queſte parole: = Geminam „ tuam ejuſdem problematis ſolvendi methodum magna cum voluptate per„ legi, quarum prior perelegans mihi viſa eſt, & Newtoniana multo „ ſimplicior; id tamen non efficit, ut alteram, quæ per differentialia ſecun„ da procedit, minus æſtimem, cum ſatis egregium artificium ſeparanda-

„ rum

„ rum differentialium, eaſdemque poſtea integrandi contineat, adeo ut „ tibi me oſtrictum etiam, hoc nomine agnoſcam, quod eam mecum „ communicare dignatus es „ alla ſua; ma nè anche per l'altra ragione, che adduce il Sig. Conte: a carte 327. (*d*), cioè perchè la ſua ſoluzione ha un non ſo che di ſingolare, cioè (come ſpiega eſſo Sig. Conte a carte 324. lin. 2.) perchè verſò ſopra un caſo ſingolare, per diſtinguere il quale dagli altri più miſterioſi (come dice a carte 207.) (*e*) ci fu biſogno d'una ſingolare induſtria, eſſendo queſto caſo l'unico, che poſſa maneggiarſi coll'equazioni analiticamente integrabili. Non abbiſognò alcuna induſtria per diſtinguere dagli altri queſto caſo, come propoſtogli da mio Zio; anzi queſto caſo non è l'unico, che poſſa maneggiarſi con equazioni analiticamente integrabili, come notai a carte 323. (*f*). Ma che coſa riſpoſe a queſte due coſe il Sig. Conte Riccato? Alla prima niente ha potuto riſpondere. Alla ſeconda riſponde, che noi abbiamo diſſimulato il vero ſenſo delle ſue parole, e che abbiamo tralaſciate, o troncate alcune ſue aſſerzioni; il che apparirà poi eſſer falſo. Dappoi francamente, e ſenza ragione ci dileggia il Sig. Conte dicendo a carte 331. (*g*), che è coſa aſſai notabile, che ſcandagliata fino al ſondo la noſtra Geometria, non abbiamo potuto ritrovare altro, che un ſolo caſo oltre il già conſiderato, nel quale poſſiamo procedere con quantità puramente algebraiche; onde conchiude, che la detta ipoteſi rimane privilegiata, benchè forſe (ſe foſſe vero ciò, che abbiam detto) ceſſarebbe d'eſſer ſingolare. Io veramente non aſpettava dalla modeſtia del Sig. Conte Riccato una tale obbiezione: altramente avrei portati molti caſi dove può farſi la medeſima coſa. Nel reſto chi gli ha detto, che per ritrovare il caſo predetto, nel quale le forze ſi ſuppongono proporzionali alle diſtanze, e che per ritrovare queſto caſo unico, abbiamo conſumata tutta la noſtra Geometria? Addotto un caſo, non ſi eſcludono gli altri. Per dimoſtrare, che l'ipoteſi delle forze reciprocamente proporzionali a'quadrati delle diſtanze non ſia la ſola, nella quale ſi può procedere con una integrazione analitica ſenza quantità traſcendenti, non baſtava forſe ancora aver portato un caſo, nel quale poſſa farſi il medeſimo, e anzi quel tal caſo, che ci offerì Il Sig. Conte, e che egli ebbe per diſperato? Indarno riſponde, che e'non ebbe per tale queſto caſo, ma che facilmente avrebbe potuta eſtendere la formula Ermanniana ad altri caſi più compoſti, ſe aveſſe giudicato ciò opportuno. Perchè dunque tentò queſto caſo, ſe non giudicò opportuno il perfezionarlo? Le ſue parole ſono sì chiare, che non può dolerſi, che noi abbiamo loro affiſſo un falſo ſenſo. A carte 207. (*h*) favellando del caſo del Sig. Ermanno adopera queſte parole: *Ha però la buona ſorte d'eſ-*

(*d*) In queſto Tomo pag.49.

(*e*) Qui il Sig. Bernoulli cita un luogo della prima riſpoſta del C. S., che in queſta edizione ſi legge a carte 28.

(*f*) Nella preſente edizione pag.32. 34.

(*g*) In queſto Tomo Pag.51.

(*h*) Citaſi un paſſo della prima riſpoſta, che ſi legge in queſto Tomo alla pag.28.

d' eſſer l' unico, che poſſa maneggiarſi con equazioni analiticamente integrabili. E a carte 200. (*i*) parlando del caſo preſente: *Io poſſo dire con verità, che forſe non ſi troverà ſtrada per conſeguire l'intento, ſenza che c' entrino, fatte le ſeparazioni, quantità traſcendenti.* Queſte parole, per talaſciarne altre ſimili, con ſufficiente chiarezza dimoſtrano, che egli ha creduto eſſerci il ſolo caſo del Sig. Ermanno, il quale poſſa maneggiarſi con una equazione puramente analitica. Forſe vuol dire, che il ſenſo delle ſue parole ſia queſto; cioè che certamente anche in altri caſi la formula Ermanniana ſi può analiticamente integrare, ma non già ſenza una previa riduzione, o preparazione; che nel ſolo caſo ſciolto dal Sig. Ermanno queſta formula conſervata nella ſua purità, nè mutata con alcune preparazioni, o riduzioni è analiticamente integrabile, e che in tutti gli altri caſi ſi richiede un nuovo artificio generalmente incognito; imperciocchè così intendo quelle coſe, che ſono ſcritte a carte 333. (*k*). Ma il Sig. Conte Riccato non riceve alcun ſuffragio da queſto ſuo rifugio. Per integrare l'equazione Ermanniana $\frac{-ddx\sqrt{xx+yy}}{x} = \frac{1}{xx+yy}$, ovvero (a cagione di $ydx - xdy =$ ad una quantità coſtante) $= \frac{\overline{ydx-xdy}^2}{xx+yy}$ non ſi ſerve forſe il Signor Conte Riccato di varie ſoſtituzioni, e moltiplicazioni? Non mutò forſe anche il Sig. Ermanno la ſua equazione differenzio-differenziale colle ſoſtituzioni, e moltiplicando l'uno, e l'altro membro per $\frac{x}{\sqrt{xx+yy}}$, e dividendo per xx ciaſcun membro dell'equazione riſultante da queſta differenzio-differenziale? Abbiamo avuto biſogno di maggior artificio per riſolvere il caſo delle forze direttamente proporzionali alle diſtanze, cioè per integrare l'equazione $\frac{-ddx\sqrt{xx+yy}}{x} = \sqrt{xx+yy}$, ovvero $-\frac{ddx}{x} = 1$? forſe la moltiplicazione per xdx conſerva meno nella ſua purità l'equazione, che la moltiplicazione per $\frac{x}{\sqrt{xx+yy}}$? E' forſe queſta riduzione così inſolita, ed incognita? E non cade ſubito ſotto gli occhj d'ognuno, che nell'equazione $-\frac{ddx}{x} = 1$.

(*i*) Luogo della prima riſpoſta in queſto Tomo pag. 25.
(*k*) Nella preſente edizione pag. 51.

(tralaſcio quì la quantità coſtante $\frac{\overline{ydx - xdy}^{2}}{a^{2}b}$, perchè non v'ha biſogno di conſervare l'omogeneità, prima di aver fatta l' integrazione) l'altro membro non ſi può integrare, ſe non ſi moltiplica per qualche differenziale, e che non poſſa moltiplicarſi per altra quantità differenziale, che per xdx, acciocchè l' uno, e l'altro membro divenga integrabile? Ma egli è chiaro, che il Signor Conte Riccato non ha inteſe queſte ſorte di riduzioni, il che ſarebbe coſa ridicola, poichè la maggior parte dell'integrazioni non ſi fa ſe non per cotali moltiplicazioni, e diviſioni; ma ſi ricava dalle carte 206., e 207. (*l*), che il Sig. Conte ha inteſo quelle faticoſe riduzioni, delle quali v'ha biſogno per levare la maſchera delle eſpreſſioni traſcendenti alle curve algebraiche, e che il ſuo ſentimento fu, che in tutte l'altre ipoteſi, oltre quella che pone le forze in ragione reciproca duplicata delle diſtanze, le curve algebraiche appajono ſotto tale maſchera, e perciò abbiano biſogno d' una tale faticoſa riduzione. Eſſendoſi dunque dimoſtrato, che la curva dell'ipoteſi $f = z$ non compariſce ſotto una tale maſchera, ed il medeſimo ſi potrebbe dimoſtrare di molt'altre ipoteſi, ſe foſſe neceſſario; ne ſegue, che il Sig. Conte abbia malamente attribuito queſto privilegio alla ſola ipoteſi predetta $f=z$. Queſti ſono ſtati i capi principali della noſtra diſputa. Ci ſarebbono ancora molte coſe da avviſare, le quali trapaſſo ſotto ſilenzio, per non dar occaſione al Sig. Conte di prolungar la conteſa, e di ſcordarſi della ſua promeſſa di non voler più riſpondere; però prima di finire queſta mia riſpoſta, che parimente prometto eſſer l' ultima, toccherò ſolamente alcune eſpreſſioni, colle quali eſſo Sig. Conte volle pungere mio Zio, e me. A carte 322. (*m*) dice, ch' io non ho negato eſſerci verun metodo certo di determinare le quantità, che debbono eſſer aſſunte per coſtanti, acciocchè nella ſeconda formula di mio Zio $2fx^{3}dy^{3} = dy^{3} + dx^{2}dy - xdyddx + xdxddy$ ſvaniſcano le due membra della ſeconda parte; ma che io ho ſolamente ritorto il detto, e che però l'ho ammeſſo tacitamente. Riſpondo, che noi abbiamo un metodo fermo per far ciò in queſto caſo, ed in altri ſimili, dove è ſtato differenziato fino a ſecondi differenziali, e dove nella ſeconda differenziazione non è ſtata preſa alcuna differenziale per coſtante, e che non ci ſia biſogno (come e' parla a carte 323.) (*n*) di mendicare quella quantità, che dee averſi per coſtante. Ma egli non è neceſſario, ch' io eſponga queſto metodo; baſta che abbia potuto giuſtamente ritorcere il detto del Sig. Conte Ricatto; eſſendo vero, che egli non dà alcuna regola certa, e fiſſa, qual ſoſtituzione debba farſi convenientemente, acciocchè nell' equazioni egualmente difficili ſi ſeparino d' inſieme le indeterminate. Nè può fuggi-

(*l*) Paſſi della prima Riſpoſta in queſto Tomo pag.28.
(*m*) Nella preſente edizione pag.43.
(*n*) Nella preſente edizione pag.48.

gire queſto ritorcimento con queſta proteſta, che non promette d' integrare tutto quello, che è integrabile, ed eſtendere il ſuo metodo a tutte l'equazioni poſſibili, e che baſti, che l'abbia eſteſo a qualche caſo, che è ſtato conſiderato come diſperato. La prima coſa mai non gli è ſtata dimandata da alcuno, e la ſeconda non baſta per rimuovere il ritorcimento, e perchè egli è falſo, che quel caſo ſia ſtato conſiderato per diſperato, e perchè nel medeſimo modo avrei potuto riſpondere, che baſta che mio Zio abbia applicato al caſo preſente il ſuo artificio d'integrare queſta ſorta d'equazioni differenzio-differenziali. Dice in vero a carte 323., (*o*), che la preparazione, della quale ſi ſerve, gli ſomminiſtra preciſamente quella quantità, che dee ſoſtituirſi in luogo dell'altra; ma queſta aſſerzione è troppo precaria, tali preparazioni ſuccedono in pochiſſimi caſi, e quando ſuccedono, non ſomminiſtrano altre ſoſtituzioni, che quelle, le quali ſono ſtate già molto tempo conoſciute, e primieramente adoperate da' miei Zii Jacopo, e Giovanni. Facilmente quì mi crederà quegli, che avrà lette quelle coſe, che negli Atti di Lipſia, ed altrove da per tutto ſono ſtate fin quì pubblicate ſopra il calcolo differenziale, ed integrale, e ritroverà a chi debbanſi tali ſoſtituzioni, ed altri artifizj di queſto calcolo. In vero ſe due uomini ſublimi, il Sig. Marcheſe de l'Hoſpital, e il Sig. Leibnizio, ſi ſono degnati di conoſcere, che queſto calcolo dee grandiſſima parte della ſua propagazione all'induſtria de' Bernulli, non mi riprenderà il Sig. Conte Riccato, nè mi accuſerà di parzialità, perchè ho detto, che eſſo ſe non immediatamente, almeno mediatamente è obbligato a' Bernulli; e laſcio giudicare a' lettori, che coſa debba dirſi di quella franca affermazione, con la quale contende il Sig. Conte Riccato a carte 322. (*p*) che le ſublimi fatiche de' Bernulli non vagliano tanto, che poſſano aver luogo nel preſente caſo. A carte 333. (*q*) accuſa la mia ſoluzione di petizione di principio: non capiſco, che coſa ſi voglia quì il Sig. Conte Riccato. Quegli ſi dice commettere petizione di principio, che ſenza dimoſtrazione, aſſume ciò, che è in queſtione. Ho io forſe fatto queſto? Ho io aſſunto ſenza dimoſtrazione, che le ſole ſezioni del cono ſoddisfanno al quiſito, come fece il Sig. Ermanno? Forſe dirà il Sig. Conte, che io ho ben sì dimoſtrato, che queſt'equazione $zz = \frac{acex}{bb-bx+ax}$ conviene alle ſezioni coniche, ma non alle ſole ſezioni del cono? Ma non vede il Sig. Conte, che queſta mia equazione $zz = \frac{acex}{bb-bx+ax}$ in qualſivoglia caſo determinato, cioè poſto per le lettere a, b, e, qualche valore determinato, dee convenire ad una ſola curva, poichè egli è impoſſibile, che il

(*o*) In queſto Tomo pag. 48.
(*p*) In queſta edizione pag. 48.
(*q*) In queſta edizione pag. 51.

ciprocamente proporzionali a' cubi delle distanze; e siccome in questa ipotesi mio Zio ha scoperte le curve da niuno avanti nominate, come la Spirale Iperbolica (la quale non capisco, perchè il Signor Conte Riccato a carte 336. (*t*), abbia detto, che è stata la prima volta scoperta con metodo diretto dal Sig. Varignon, poichè nè il Signor Varignon, nè alcun altro aveva avanti mio Zio fatta menzione di questa curva) ed altre sì algebraiche, come meccaniche; così colla medesima facilità per l'ipotesi delle forze reciprocamente proporzionali a' quadrati delle distanze egli avrebbe potuto scoprire le sezioni coniche, benchè queste curve prima non fossero state nominate da altri.

A carte 334. (*u*) dice il Sig. Conte Riccato, che la difficoltà di questo Problema inverso generalmente considerato non consiste, come noi crediamo, nella comparazione di due archi circolari, ma nella riduzione della differenziale proposta alla differenziale dell'arco circolare. Non capisco, perchè egli c'incolpi, che noi abbiamo in ciò creduto diversamente da lui, essendo certo, che noi abbiamo detto la medesima cosa, che egli a carte 342. (*x*). cioè la cosa difficilissima, che s' incontra in questo Problema, è la riduzione della differenziale proposta alla differenziale dell'arco, o dell'angolo; il che dipoi esso Sig. Conte contradicendo a se medesimo confessa, quando dice, che la cosa è per se stessa, almeno presa universalmente, sì ardua, che da noi è giudicata impossibile. Le mie parole registrate a carte 342. del Tomo ventesimo sono queste: *Ma determinare sempre se qualche quantità differenziale possa essere ridotta al differenziale dell' arco, o dell'angolo, è una difficoltà scabrosissima, ec.* Anzi ci dà una puntura, riprendendoci, perchè abbiamo giudicata questa cosa troppo difficile, e più da desiderare, che da sperare. Ma che che sia della formula, che dice di aver pubblicata il Sig. Ermanno nel Tomo VII. del Giornale a carte 227., e che noi non abbiamo veduta, desiderarei di vedere la dimostrazione di quella formula; imperciocchè ripetendo un'altra volta questa cosa, sono persuaso, che non possa darsi alcuna formula generale, che comprenda tutte le curve algebraiche, le quali soddisfanno a qualsivoglia ipotesi data delle forze centrali, se prima non si mostra insieme il metodo di ridurre in qualsisia caso le membra della nostra equazione alla differenziale dell'arco circolare, o, che è la medesima cosa, d' integrare quasi tutto ciò, che è integrabile, il che principalmente è quello, che al dì d'oggi desideriamo per la perfezione del calcolo integrale. Non credo necessario rispondere molte cose all'ultima riprensione, che mi fece nel fine della sua scrittura. Il giusto lettore giudicherà qual conto debba farsi di quella riprensione, ed a chi debbasi attribuire il prurito di farsi Autore, se a quello, il quale per promuovere la scienza propone qualche problema, o lo risolve proposto, o più tosto a quello, che non mai provocato attacca un altro con una pub-

(*t*) Nella edizione presente pag. 52.
(*u*) In questo Tomo pag. 52.
(*x*) In questo Tomo pag. 38.

pubblica ſcrittura? Che vi ſieno in Italia molti inſigni Geometri, i quali lodevolmente ſono verſati in queſti ſublimi calcoli, io non mai l'ho ignorato, ed a queſto fine propoſi a loro il Problema, acciocchè comunicati con noi i metodi, ci naſceſſe qualche occaſione d'imparare da eſſi. Avviſarono gli Autori di queſto Giornale all'Articolo X. del Tomo ventesimoprimo, che da molte parti d'Italia erano ſtate mandate molte ſoluzioni di queſto Problema, le quali tutte convengono nell'aſſegnare per la curva ricercata delle forze una Parabola cubica del primo grado. Non v'ha dubbio, che queſta Parabola ſoddisfi al queſito; ma poichè ſo, che il Signor Ermanno (al quale propoſe mio Zio due anni avanti queſto Problema, e che dimoſtrò, che quando la curva de' tempi è del genere delle Parabole, anche la curva delle forze dee eſſere del genere delle Parabole) nominò queſta curva a molti ſuoi amici Italiani, prima che uſciſſe il Tomo ventesimo del Giornale, dai quali poi poteste arrivare a molti queſta notizia; preghiamo quelli, i quali da ſe medeſimi anno ritrovata la ſoluzione di queſto Problema, che ſi degnino di pubblicare la loro Analiſi, o almeno di dimoſtrare, ſe la Parabola cubica ſia la ſola curva, che riſponda al queſito, o no. S'ingannano queſti Geometri, quando dicono, che queſto Problema non contiene alcuna difficoltà. Conobbe eſſo Sig. Ermanno, che il Problema era difficiliſſimo; e ſaremo molto obbligati a quello, che ci darà la dimoſtrazione analitica dedotta *a priori* ſenza petizione di principio.

P. S.

Terminata queſta riſpoſta, arrivò a noi comodamente la lettera del Sig. Ermanno ſpedita da Franckfort il dì undecimo dell'Ottobre paſſato, il cui contenuto aggiungerò quì, acciocchè ſappia il Sig. Conte Riccato, che è ſtata molto ſpiacevole al Sig. Ermanno la conteſa, che egli moſſe a mio Zio. Così ſcrive il lodato Sig. Ermanno a mio Zio. „ Quod Co„ mes Riccatus ſchediaſma in pubblicum miſerit Diario Veneto inſer„ tum, quo ſolutionem meam particularem inverſi problematis virium „ centralium adverſus ſtructuras tuas meretur, diu poſt demum reſcivi „ quam prodiiſſet, id quod moleſtum mihi accidit; alioqui ſi de pro„ poſito ejus mihi quicquam conſtitiſſet, litteras ad ipſum dediſſem ro„ gaturus, ut ab eo abſtineret..... Nam ſi ſolutionem meam apologia „ indigere credidiſſem, talem egomet ipſe conſcribere potuiſſem; ſed quia „ quæ monuiſti, potius ad elegantiam ſpectant, quam quod methodum „ feriant, minime neceſſum duxi ſpecimen illud meum, licet publice re„ prehenſum, pubblico ſcripto defendere.„ Soggiunge poi il Sig. Ermanno in quella medeſima lettera, che v'ha una ſola coſa nelle mie annotazioni inſerite nel Tomo ventesimo del Giornale, alla quale e' dee riſpondere. Dice dunque, che il Sig. Conte Riccato non ha certamente dette di lui coſe vane, e troppo magnifiche, quando ha promeſſo, che una volta darà il Sig. Ermanno la ſoluzione generale del Problema inverſo delle forze centripete per le curve algebraiche; e dice di aver fat-

ta

ta queſta coſa nel ſuo libro a carte 398. §. XIII., ed a carte 399. dove ha data una doppia ſoluzione del Problema già tempo da lui propoſto nel Tomo ſeſto del giornale di Venezia. *Exhibere generalem formulam virium centralium pro omnibus curvis algebraicis in infinitum, & generalem æquationem pro curvis, quibus formula virium centralium conveniunt*; e per conſeguenza e' dice, che io ho malamente creduto, che queſto Problema ſormonti i limiti della poſſibilità. Poichè dunque poco ſa ci è ſtata portata queſta ſublime opera del Sig. Ermanno *de Viribus, & Motibus Corporum*, della cui recente edizione mi rallegro e col Pubblico, e con l'Autore medeſimo, non ho traſcurato di leggere ſubito il luogo ſopraccitato; ma fuori della mia ſperanza ho ritrovato, che il Problema, di cui ivi eſibiſce l'Autore la ſoluzione generale per le curve algebraiche, è più toſto diretto, che inverſo. Io però non nego, che ſia per eſſere di grande uſo la formula delle forze centrali, che egli ha data; imperocchè da quella formula poſſono dedurſi innumerabili ſcale delle forze centrali, alle quali tutte ſoddisfacciano le curve algebraiche. Ma ritrovare per qualſivoglia data ſcala delle forze centrali tutte le curve algebraiche ſoddisfacenti, egli è un problema aſſai più difficile, anzi tale, la cui ſoluzione ſpero, che ſia per giudicar meco impoſſibile anche lo ſteſſo Sig. Ermanno, conſiderata la coſa più attentamente.

SCHEDIASMA V. (*)

De' Polinomj.

COl nome di Polinomj differenziali appello le frazioni, che anno per numeratore la fluſſione dx, e per denominatore un aggregato di poteſtà, gli eſponenti delle quali coſtituiſcano una progreſſione aritmetica, che va a terminarſi nel nulla. E mentre queſta condizione non ſi adempia, biſognerà ſupplire qualche termine affetto dal coefficiente $=0$.

Ab-

(*) *Da una lettera de' 17. Novembre 1725. dal Dottiſſimo Sig. Abbate Giuſeppe Suzzi ſcritta all' Autore ſi ricava, ch' egli in quel tempo lavorava intorno al preſente metodo. Si legge poi in una lettera de' 19. Luglio 1729. del rinomato Padre D. Ramiro Ramvinelli diretta al Conte Iacopo, che gli rimandava inchiuſo il Problema dei Polinomj. Queſto Schediaſma adunque è ſtato compoſto fra il 1725, ed il 1729. La celebratiſſima Signora Conteſſa D. Maria Agneſi a iſtanza dell' Autore lo inſerì nelle ſue Inſtituzioni Analitiche pubblicate in Milano l' anno 1748. Tomo II., pag. 693., e ne fanno particolare menzione li Signori Dortous de Mairan, e de Montigny nell' onorifico eſtratto della lodata Opera ſcritto per ordine della Real Accademia di Parigi, e ſegnato ſotto li dì 6. Decembre 1749.*

e per conſeguenza

$$\frac{}{x^{2m}+ax^m+b}^{p} = \frac{}{zz+\overline{2A+a}\times z+AA+aA+b}^{p}.$$

Dee farſi in maniera, che ſpariſcano le quantità $AA+aA+b$, prendendole $=0$, e ne' caſi, in cui A non è quantità immaginaria, ſuccede ottimamente la riduzione. E giacchè $x^m = z+A$, e preſe le differenze, $mz^{m+1}\,dx = dz$, ed $x = \overline{z+A}^{\frac{1}{m}}$; dunque $\frac{dx}{mx^{m-1}} = \frac{dz}{m\times\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}}$.

In paſſando alle neceſſarie ſoſtituzioni, onde nella noſtra formola principale in cambio di x, e delle ſue funzioni reſti ſurrogata la variabile aſſunta z colle ſue funzioni, troveremo $\frac{dx}{\frac{}{x^{2m}+ax^m+b}^{p}} = \frac{dz}{m\times\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}\times\frac{}{zz+\overline{2A+a}\times z}^{p}}$, e liberando la quantità z, che moltiplica il binomio $z+2A+a$ ſotto il ſegno, ſarà

$$\frac{dx}{\frac{}{x^{2m}+ax^m+b}^{p}} = \frac{z^{-p}\,dz}{m\times\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}\times\overline{z+2A+a}^{p}}.$$

Il caſo più ſemplice vuole l'eſponente p eguale all'unità, eſſendo l'altro m qualſivoglia numero intero, o rotto, affermativo, o negativo; e fatto per brevità $2A+a=g$, l'eſpreſſione generale paſſa nella particolare

$$\frac{z^{-1}\,dz}{g\times\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}+z\times\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}} = m\,dy;$$

Istituisco una prima divisione, partendo cioè il numeratore della frazione per lo suo denominatore, ed il primo quoziente sarà $\frac{z^{-1}dz}{g \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}}$, e fatta la moltiplicazione, e la sottrazione, conforme la pratica ordinaria, il residuo sarà $-\frac{dz}{g}$ da essere partito per lo denominatore, e perciò

$$\frac{z^{-1}dz}{g \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}} + z \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}} = \frac{z^{-1}dz}{g \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}} - \frac{-dz}{gg \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}} + gz \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}}.$$

Il primo termine del secondo membro è già ridotto alle quadrature note, e l'altro termine facilmente vi si riduce, ponendo $z+A=u$, e fatte le debite sostituzioni, avremo

$$\frac{-dz}{gg \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}} \; gz \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}} = \frac{u^{\frac{-m+1}{m}} du}{gg - gA + gu}.$$

Seguitando la nostra ricerca, sia l'esponente p eguale a qualsivoglia numero positivo, ed intiero: per ottenere l'intento basterà prolungare alquanto l'operazione. Ripigliata per mano la formula generale

$$\frac{yx}{\overline{x^{2m}+ax^m+b}^{p}} = \frac{z^{-1}dz}{m \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}} \times \overline{z+g}^{p}} = dy,$$

e posto per esempio $p=$ al binario, si ridurrà alla seguente

$$\frac{z^{-2}dz}{gg \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}} + 2gz \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}} + zz \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}} = mdy.$$

Di-

Divido come ſopra il numeratore di queſta frazione per lo ſuo denominatore, ed il primo quoziente ſarà $\frac{z^{-2}dz}{gg \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}}$, e dopo le neceſ-

ſarie operazioni avremo il reſiduo $-\frac{2z^{-1}dz}{g} - \frac{dz}{gg}$ da eſſere nuovamente

per l'intero denominatore diviſo. Iſtituiſco una ſeconda diviſione nella frazione $\frac{-2z^{-1}dz}{g^1 \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}} + 2ggz \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}} + g^2z^2 \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}}$,

e dopo le debite operazioni ſi avrà il reſiduo $\frac{4dz}{g} + \frac{2zdz}{gg}$ da partirſi

per l'intiero denominatore. Naſcerà pertanto la ſeguente equazione

$$\frac{z^{-2}dz}{\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}} \times \overline{z+g}^{2}} = \frac{z^{-2}dz}{gg \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}} - \frac{2z^{-1}dz}{g^1 \times \overline{zA}^{\frac{m-1}{m}}} + \frac{4z^{-1} \times dz}{gg \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}} \times \overline{z+g}^{2}} + \frac{2zdz}{gg \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}} \times \overline{z+g}^{2}}.$$

I primi due termini nell'omogeneo di comparazione ſono due binomj, e gli altri due poſſono facilmente ridurſi alla forma del binomio, facendo $z + A\,u$, ovvero $z + g - u$. Ne' caſi più compoſti, in cui ſi mette $p = 3, 4, 5$ cc., creſce il tedio del calcolo, ma il metodo non ci abbandona.

Eſſo metodo ſi eſtende a tutti i polinomj in infinito, mentre p ſia numero intiero, e poſitivo, perche ſe foſſe negativo, ed intiero, la coſa rieſce talmente facile, che non occorre favellarne. Per applicare il metodo, altro non ſi richiede, che replicare la ſoſtituzione $x = z + A$, $z = u + B$, facendo ſempre ſvanire que' termini, ne' quali le ſole quantità coſtanti ſi ritrovano; laonde per cagion d'eſempio ſi riduca il quadrinomio al trinomio, e queſto al binomio. In oltre è d'uopo di valerſi di tempo in tempo d'una dimezzata diviſione, perchè non abbiano a turbarci gli eſponenti negativi, che bene ſpeſſo ci ſi preſentano nel nu-

meratore della frazione. Fra tanto il modo di operare si mostra più speditamente cogli esempj, che coi precetti.

Sia il quadrinomio $\frac{dx}{\overline{x^{3m} + ax^{2m} + bx^m + c}^{p}} = dy$. Le costanti a, b possono essere $= o$. Pongo $x^m = z + A$, ed avrassi

$$x^{3m} + ax^{2m} + bx^m + c = z^3 + 3Azz + 3AAz + A^3 + azz + 2aAz + aAA + bz + Ab + c.$$

Faccio $A^3 + aAA + Ab + c = o$, e così determino il valore della costante assunta A. Quinci ripetute le operazioni come nel trinomio, trovo

$$\frac{z^{-1}dz}{\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}} \times \overline{zz+gz+h}^{p}}.$$

Le specie g, h sono costanti surrogate in luogo d' altre più composte, e stante che p è un numero positivo, ed intiero, alzo il trinomio $zz+gz+h$ alla potestà p.

Dopo ciò intraprendo tante divisioni, quante sieno bastanti per fare, che laddove nel numeratore ci sia l'esponente negativo, nel denominatore non si rinvenga altra quantità, che il binomio $\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}$, e metto da parte sì fatte frazioni, che trascurati i coefficienti, saranno analoghe alla seguente $\frac{z^{-n}dz}{\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}}$, posto n qualsivoglia numero positivo ed intiero. Gli altri termini sono rappresentati dalla formola generale

$$\frac{z^{n}dz}{\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}} \times \overline{zz+gz+h}^{p}}.$$

Ripeto dunque l'operazione, facendo $z = u + B$, indi fatto sparire l'ultimo termine, conforme il solito, e surrogati in cambio di z, e delle sue funzioni i valori esposti per la nuova indeterminata u, arriveremo

alla

alla espressione $\frac{\overline{u+B}^{n} \cdot du}{\overline{u+A+B}^{\frac{m-1}{m}} \times \overline{u^2+Ku}^{p}}$. La specie K è posta in luogo di altre quantità più composte. E quindi alzato il binomio $u+B$ alla potestà n avremo la seguente serie

$\frac{u^n + nu^{n-1}B + \frac{n-1}{2} \cdot nu^{n-2}B^2 \times du}{\overline{u+A+B}^{\frac{m-1}{m}} \times \overline{u^2+Ku}^{p}}$, la quale si dovrà interrompere

sicuramente; atteso che si suppone n numero intero, ed affermativo. Ciascun termine di questa serie si potrà generalmente esprimere dalla formula $\frac{u^n\,du}{\overline{u+A+B}^{\frac{m-1}{m}} \times \overline{u^2+Ku}^{p}} = \frac{u^{n-p}\,du}{\overline{u+A+B}^{\frac{m-1}{m}} \times \overline{u+K}^{p}}$,

avvertendo, che il valore di n non è lo stesso in ciaschedun termine della prefata serie. Quando sia p maggiore di n, onde l'esponente $n-p$ sia negativo, si mettano in pratica le divisioni, e la formola indi nascente sarà

$\frac{u^{-s}du}{\overline{u+A+B}^{\frac{m-1}{m}}}$, essendo poi $n-p$ positivo, avremo

$\frac{u^n\,du}{\overline{u+A+B}^{\frac{m-1}{m}} \times \overline{u+K}^{p}}$; e finalmente ponendo $u+K=\omega$, ed essendo

tanto n, quanto p numeri intieri, saranno sempre riducibili alle quadrature più semplici i binomj, che nasceranno dalle accennate operazioni.

Egli è vero, che a cagione delle immaginarie il metodo riesce limitato; ma oltrechè bene spesso le radici, o tutte, o in parte sono reali; oltrechè in molti casi particolari possono scansarsi le quantità immaginarie, non bisogna trascurare quel molto, che si può avere, perchè il tutto non può conseguirsi.

Ab-

Abbiasi per esempio il trinomio $\frac{dx}{\overline{x+2\sqrt{x+2}}^{p}}$. Faccio $x^{\frac{1}{2}}=z+A$,

dunque $x+2\sqrt{x+2}=zz+2Az+2z+AA+2A+2$. Mettendo $AA+2A=0$, trovo $A=\sqrt{-1}-1$; ed ecco in campo una grandezza mista di reale, ed immaginario, e procedendo a norma del metodo, avremo $\frac{z^{n-1}dz}{\overline{z+A}^{-s}\times\overline{z+2A+2}^{p}}=\frac{z^{n-1}dz}{\overline{z+2\sqrt{-1}}^{p}}+$

$+\frac{Az^{n-1}dz}{\overline{z+2\sqrt{-1}}^{p}}$. Perchè si tolgano di mezzo le immaginarie, mutiamo maniera, e nella grandezza $zz+\overline{2A+2}\times z+AA+2A+2$ facciamo, che si dilegui il termine di mezzo $2Az+2z$, ponendolo $=0$, onde sia $A=-1$, e di più $AA+2A+2=1$, e la formula sarà, come segue

$$\frac{dz}{\overline{z-1}^{-s}\times\overline{zz+1}^{p}}=\frac{zdz}{\overline{zz+1}^{p}}-\frac{dz}{\overline{zz+1}^{p}}$$

; e ne'due binomj dell'omogeneo di comparazione, che sono equivalenti agl'altri due già considerati, non s'incontra difficoltà.

SCHE-

SCHEDIASMA VI.

De recta ratione analytice exprimendi lineolam interceptam inter tangentem, e curvam.

CLARISSIMO VIRO JOSEPHO SUZZIO

S. D.

JACOBUS RICCATUS.

GRatulor mihi, Eruditiſſime Suzzi, ſententiam illam meam, quam aliis curis diſtractus, & ex tempore in medium protuli, veluti ſemen fœcundo ſolo commiſſum in largam, atque uberem ſegetem excreviſſe. Gratulor tibi, quod rem difficultatibus implicitam ita perfeceris, ut quid addam, quid demam, quid emendem prorſus non inveniam. Ne tamen vel tibi, vel mihi deeſſe videar, unicam obſervationem ad computum differentio-differentialem facientem tuo examini ſubmittere decrevi.

Magnus Nevvtonus in prima editione Principiorum Mathematicorum Philoſophiæ naturalis lib. 2. prop. 10. hoc arduum problema ſibi propoſuit. Tendat uniformis vis gravitatis directè ad planum Horizontis, ſitque reſiſtentia ut medii denſitas, & quadratum velocitatis conjunctim, requiritur tum medii denſitas in locis ſingulis, quæ faciat ut corpus in data quavis curva moveatur, tum corporis velocitas in iiſdem locis. Dum quæſtioni perplexa, & difficili aggreſſione ſatisfacere conatur, ſe hominem eſſe oſtendit, & canonem generalem variis curvis, & præſertim ſemicirculo (Fig. 18.) applicando, a propoſito excidit; putavit enim reſiſtentiam ad gravitatem in dato circumferentiæ punto G ſe habere ut abſciſſa OB ad ſemidiametrum OK. Sed cum priores curvæ a poſterioribus perficiantur, in ſecunda aurei Operis editione inadvertentiam ſuſtulit, veramque proportionem, ut tripla abſciſſa ad circuli diametrum ſubſtituit.

Antequam correctio Nevvtoniana prodiret, eamdem ſpartam in Actis Lipſienſibus pro Anno 1713. ornandam ſuſcepit Clariſſimus Vir Johannes Bernoullius, at Illuſtris Angli errore notato, dum in ejus originem ſollicitè inquirit, ſequentia protulit. „ Error iſte, qui tanto Viro excidit, non quidem in ipſa ejus ſolutione latet, quam juſtam eſſe, & ab omni paralogiſmi vitio immunem, quanquam non parum detortam, & intellectu difficilem, ſed quærendus ille eſt in ipſo applicandi modo, qui eo la-

Queſta lettera è ſtata pubblicata dal Sig. Abb. Suzzi nella ſua opera Diſquiſitiones Mathematicæ ſtampata in Venezia appreſſo Domenico Louiſa l'anno 1725.

laborat, quod in ſerie, quæ exprimit DG terminum quemlibet ſumens pro aliqua indeterminatæ DG differentiali, ſeu ut ipſe vocat fluxione tanti gradus, quantæ dimenſionis exiſtit littera o in ipſo termino, quod in primo, & ſecundo verum eſſe poteſt, in reliquis verò minimè. „ Verum Newtonus emendationem aliter inſtituit; totam enim propoſitionem principalem reformat, nova formulæ ſubrogata, ſed eamdem applicationem, poſthabita Bernoulliana animadverſione, coſtanter retinet.

Quæſtio non eſt, Eruditiſſime Suzzi, utrum termini, qui ex repetita differentiatione quantitatum indeterminatarum oriuntur, ab his diverſi ſint, quos ſeries Newtonianæ ſubminiſtrant. Sed ex calculo manifeſtum eſt, & optime oſtenditur a Bernoullio. Difficultas potius in hoc ſita eſt, utrum lineola FG inter tangentem, & curvam, cujus valorem loco citato Newtonus inveſtigandum ſibi propoſuit, exponi debeat, ut ipſe vult, per tertium ſuæ ſeriei terminum, an per ſecundam differentiam ordinatæ BC juxta Bernoullii ſententiam. Hunc longiſſimè a veritate aberrare pro certo habeo, quamquam vix affirmare audeo tantum Virum in errorem incidiſſe. Ut autem ſaltem tibi fidem faciam, hæc accipe.

Ne a circulo, quem præ manibus habemus, diſcedamus: potius CK $= a$, OB $= x$, BD $= dx$, BC vel DI $= y$, ordinata DG ipſi BC indefinite proxima a ſequenti ſerie more Newtoniano exprimitur DG $= y - \frac{xdx}{y} - \frac{aadxx}{2y^3} - \frac{a^4xdx^3}{2y^5}$ & cæt.,

in qua primus terminus exponit totam DI, ſecundus ejus portionem IF, tertius cum infinitis ſequentibus interceptam FG. Summa autem omnium terminorum poſt tertium ad tertium terminum relata proportionem habet minorem quacumque data; igitur lineola FG per ſolum tertium terminum ſecundum Newtonum exponitur.

Modo ex æquatione locali circuli $aa - xx = yy$ ſumpta prima differentia, habebimus $-xdx = ydy$, vel $-xdx : y = dy$, & rurſus differentiando, accepta dx pro coſtante, $-\frac{dxx}{y} + \frac{xdxdy}{yy} = ddy$: & loco dy ejus valorem $-xdx : y$ ſubrogando, $-\frac{dxx}{y} - \frac{xxdxx}{y^3} = ddy$, hoc eſt $\frac{yydxx - xxdxx}{y^3} = ddy$; ſed $yy + xx = aa$; ergo $-aadxx : y^3 = ddy$. Secunda igitur differentia applicatæ BC, ſeu $-aadxx : y^3$ ad tertium terminum $-aadxx : 2y^3$ ſeriei Newtonianæ proportionem habet duplam, & cum jam a te demonſtratum ſit interceptam FG dimidium eſſe ſecundæ differentiæ ddy, vel $-aadxx : y^3$, patet hanc lineolam optime exprimi a Newto-

no

so per tertium terminum ſuæ ſeriei, & malè a Bernoullio per ſecundam differentiam ordinatæ BC.

Ut veritas clarius eluceſcat, tangens CF prorogetur uſque quò concurrat cum axe producto in puncto R, & intercepta FG, quæ ad ſecundum fluxionum ordinem ſpectat, vocetur *ddz*. Cum ſit OB: BC:: BC: BR, erit ſubtangens $BR = yy : x$: eſt autem RB: BC:: CI: IF, hoc eſt $yy : y :: dx : \frac{xdx}{y} = IF$; ergo invento valore ordinatæ GD, qui habetur ſubtrahendo quadratum OD, hoc eſt $\overline{x + dx}^2$ quadrato radii, erit DI − DG − FI = FG, ſcilicet in terminis analyticis $y - \frac{xdx}{y} - \sqrt{yy - 2xdx - dxx} = ddz$, vel $y - \frac{xdx}{y} - ddz = \sqrt{yy - 2xdx - dxx}$, & quadrando, $yy - 2xdx + \frac{xxdxx}{yy} - 2yddz + \frac{2xdxddz}{y} + ddzz = yy - 2xdx - dxx$, & deletis delendis, & reducta æquatione, $\frac{xxdxx}{yy} + dxx = 2yddz + \frac{2xdxddz}{y} - ddzz$ vel $\frac{xxdxx + yydxx}{2y^3} = \frac{aadxx}{2y^3} = ddz + \frac{xdxddz}{yy} - \frac{ddzz}{2y}$. Porro in homogeneo comparationis ſublatis termino ſecundo, & tertio, qui reſpectu primi evaneſcunt; ſecundus enim ad tertiam, & tertius ad quartam claſſem differentialium pertinet, remanet intercepta FG, ſeu $ddz = \frac{aadxx}{2y^3}$, prout Newtonus ope ſuæ progreſſionis invenerat.

Sicut igitur Illuſtris Anglus per tertium terminum ſuæ ſeriei cum omnibus ſubſequentibus, qui tertio infinite minores ſunt, deſignat interceptam FG, quæ determinat angulum contactus FCG a tangente, & chorda contentum, ſeu curvaturam, quam curva obtinet in puncto C, ita per quartum terminum exponit variationem curvaturæ, per quintum variationem variationis, & ſic deinceps.

Neque putandum cum eximio Geometra Nicolao Bernoullio (Vide Com. Ac. Regiæ Pariſ. pro anno 1711.) olim Profeſſore Patavino, ex his, quæ tradidit Newtonus tractatu de Quadratura curvarum perinde eſſe juxta celeberrimi Angli ſententiam ſumere differentias more conſueto, ac illas ex ſeriebus eruere, ita ut terminus quilibet in progreſſione haberi

debeat pro differentia tot gradus, quot unitates continentur in exponente quantitatis dx.

Tam craſſus error acutiſſimo Analyſiſtæ nimis liberaliter affingitur. Optimè Newtonus fluxiones ab incrementis diſtinguit. Fluxiones vocat, quas Leibnitiani differentias appellant, & Prop. prima ita inveniendas docet, ut ejus methodus a vulgari non differat, præter quam in ſignis arbitrariis. Incrementa, vel differentiæ apud ipſum ſunt quantitates minimæ, puta FG, quæ licet plerumque fluxionibus æquales non ſint, ſunt tamen ſemper ipſis proportionales, atque has per ſerierum terminos inveſtigat. Sed ipſum audiamus in ultimo Scholio citati libelli de Quadratura.

„ Quantitatum fluentium fluxiones eſſe primas, ſecundas, tertias, quartas, aliaſque diximus ſupra. Hæ fluxiones ſunt ut termini ſerierum infinitarum convergentium. Ut ſi z^n ſit quantitas fluens, & fluendo evadat $\overline{z+o}^n$, deinde reſolvatur in ſeriem convergentem $z^n + noz^{n-1} + \frac{\overline{nn-n}.oo z^{n-2}}{2} + n^3 - 3nn + 2n . o^3 z^{n-3}$ & cæt., terminus primus hujus ſeriei z^n erit quantitas illa fluens, ſecundus noz^{n-1} erit ejus incrementum primum, ſeu differentia prima, tertius $\frac{\overline{nn-n}.oo z^{n-2}}{2}$ eſt ejus incrementum, ſeu differentia ſecunda, cui naſcenti proportionalis eſt ejus fluxio ſecunda, quartus $\overline{n^3-3nn+2n} . o^3 z^{n-3}$ erit ejus incrementum tertium, ſeu differentia tertia, cui naſcenti fluxio tertia proportionalis eſt; & ſic deinceps in infinitum. „

Quid clarius Eruditiſſime Suzzi? Non fallitur ergo Newtonus, dum fluxiones ab incrementis ſejungit, & diverſa ratione nobis exhibet. Fallitur Bernoullius, dum quantitatem FG, aliaſque ejuſdem generis per ſecundam fluxionem exprimit.

Neque audiendus egregius Johan. Bernoullius, qui cenſuram de ſeriebus Newtonianis ita concludit. " Judicet itaque æquus Lector, quid tenendum ſit de uſu hujus regulæ, quam deprædicat Author p. 264. in ſolvendis iſtiuſmodi problematibus, quandoquidem uſus tam facile in abuſum degeneret. „ Dicendum potius, quod aſſeruit Newtonus in prima editione, & in ſecunda confirmavit. " Unde obiter patet uſus non contemnen-

mendus harum ferierum in ſolutione Problematum, quæ pendet a tangentibus, & curvatura curvarum. „

Hæc dicta ſint ad dirimendam litem inter Clariſſimos Geometras Nevvtonum, & Bernoullios; qua in re ſi forte decipior, ſaltem haud turpe erit cum tam illuſtri Mathematico erraſſe. Vale

Caſtrifranci 5. Septem. An. 1725.

SCHEDIASMA VII. (*)

Animadverſiones in æquationes differentiales ſecundi gradus.

REductio æquationum differentialium ſecundi ordinis plerumque eſt adeo perplexa, atque involuta, ut Analyſtam minus attentum frequentiſſime eludat. Dum Syntheticæ viæ inſiſtimus, & a primis fluxionibus ad altiorem gradum aſcendimus, cum aſſumatur tamquam conſtans vel nota differentia, vel nulla, eæ difficultates, de quibus ſermo erit, vix occurrunt; quæ tamen evitari nequeunt, ſi problema aliquod proponatur ſecunda elementa involvens, & analytica methodo procedendum ſit: Infinitas dari formulas differentio-differentiales, ad quas pervenitur, nulla adhibita conſtante, nemo profecto ignorat: totidem quoque exhiberi poſſe, ad quas pervenire non conceditur, niſi conſtante in ſubſidium vocata, acutiores non latet Analyſtas: at quomodo ab invicem dignoſci queant, & qua ratione tractandæ ſint, non ita compertum, neque obvium puto; cum tamen ſublimioris Geometriæ officium ſit inſpicere, quouſque, & quibus in circumſtantiis expreſſiones iſtæ ſolutionem admittant.

Sit ex. gr. conſtruenda curva, in qua quælibet abſciſſæ dignitas ſe habeat directe ut ſecunda differentia ordinatæ, & inverſe ut ſimilis differentia ejuſdem abſciſſæ, quæ curva exponitur per æquationem differentialem ſecundi ordinis $x^m\,ddx = dd y$: ajo nullam curvam inter poſſibiles quæſtioni ſatisfacere, ſi a primis ad ſecundas fluxiones fiat tranſitus, abſque eo quod aliqua prima differentia uſurpetur pro conſtante, nec juvabit, ſalva æqualitate, æquationes ipſas quomodocumque alterare, ſive

(*) *Lo Schediaſma del C. I., e le Annotazioni del Sig. Daniele Bernoulli comparvero alla luce delle ſtampe l'anno 1722. nel Tomo VIII. Sezione II. de' Supplementi degli Atti di Lipſia. S'avverte il Lettore eſſerſi corretto un errore o di penna commeſſo dall' Autore nello traſcrivere lo Schediaſma, o pure di ſtampa, ponendo c' in cambio di 1' ; falſa lezione per l'uno, o per l'altro degli addotti motivi inſinuataſi nei Supplementi ſuddetti. Abbiamo pure effettuate due correzioni ricordate dal C. I. nel ſeguente Schediaſma VIII.*

per additionem terminorum æqualium, ſive per valorum ſubſtitutionem; & ex oppoſito, conſtante determinata, inveniuntur quidem curvæ problematis conditionem implentes, ſed numero infinitæ, & indole differentes; utpote quæ variantur ad arbitrariæ conſtantis mutationem. Poſteriores haſce expreſſiones, quæ ſub falſa ſpecie nobis imponunt, a veris, atque legitimis ſecernere, videtur eſſe profundioris indagationis; nihilominus certum, & quantum ſubjecta materia patitur, generale Criterium Mathematicis examinandum propono, quod ſaltem uſui erit in his omnibus caſibus, in quibus nos calculus integralis haud deſerit.

Porro ad formulas primis tantum differentiis implicitas revocantur æquationes omnes differentiales ſecundi gradus, ad quas, ſive aſſumpta, ſive non aſſumpta conſtante, perventum eſt, & in quibus ſecundæ fluxiones cum primis, & cum finitis magnitudinibus quomodocumque miſcentur, dummodo alterutra ex indeterminatis fluentibus cum ſuis functionibus æquationem propoſitam non ingrediatur: quod dicendum pariter de illis expreſſionibus, quæ ad hanc formam aliqua adhibita induſtria redigi poſſunt: cæterum in reliquis, quas progreſſus noſter non complectitur, ad aliquos caſus particulares ſe extendere poteſt Analyſtarum ſolertia; at ſi quis canonem generalem inveniret, is profecto eſſet mihi magnus Apollo. Interim conſideranda venit æquatio catholica (A) $z dx = dy$, in qua omnes formulæ differentiales primi gradus continentur; cum littera z deſignet magnitudinem utcunque datam per functiones coordinatarum x, & y. Tranſeo ad altiores differentias, nulla aſſumpta conſtante, proditque æquatio (B) $z ddx + dz dx = ddy$, quæ, dum in eodem ſtatu permanet, nullo negotio integratur. Quod ſi ipſius forma immutetur, ſubrogatis valoribus ab expreſſione (A) mutuo acceptis, tunc infinitæ formulæ oriuntur, quæ majus artificium poſtulant. A ſimplicioribus exemplum peto: loco ipſius dx ſubſtituatur quantitas æqualis $dy : z$, & primus terminus æquationis (B) multiplicetur per dignitatem $z^m dx^m$, reliqui vero per æquivalentem dy^m, unde reſultet nova æquatio (D) $z^{m+1} dx^m ddx + dy^{m+1} dz : z = dy^m ddy$.

Hujuſmodi formulæ expedite reducuntur ope alicujus conſtantis, quod ut fiat quantum fieri poteſt, generaliter deſigno pro conſtante fluxionem $dx : q$, eſt autem q magnitudo quomodocumque data per indeterminatas x, y, & conſtantes. Pono $dx : q = dp$, & cum ſit $dx : q$ conſtans, erit pariter conſtans dp. Hinc in æquatione $dx = q dp$ tranſeundo ad ſecundas differentias, habebimus $ddx = dq dp$. Præterea ſtatuo $dy = u dp$, & ſumptis ſecundis differentiis in eadem hypoteſi conſtantis dp, erit $ddy = du dp$. Subrogatis in expreſſione (D) valoribus ut ſupra determinatis, & inventis, orietur æquatio

$z^{m+1} q^m dq dp^{m+1} + u^{m+1} dz : z . dp^{m+1} = u^m du dp^{m+1}$, & dividendo per dp^{m+1}, $z^{m+1} q^m dq + u^{m+1} dz : z = u^m du$, & ſummando per regulas vulgares, non omiſſa coſtantis g additione, $g + q^{m+1} : \overline{m+1} =$

$u^{m+1} : \overline{m+1} \cdot z^{m+1}$, quæ æquatio dat $u = z \cdot \sqrt[m+1]{q^{m+1} + gm+g}^{m+1}$, & quia $dy = udp = udx : q$, opportuna adhibita ſubſtitutione, occurrit

æquatio reducta (E) $dy = \sqrt[m+1]{q^{m+1} + gm+g}^{m+1} \cdot zdx : q$.

Ex hoc operandi modo ſponte fluunt nonnulla conſectaria.

Si determinata magnitudine z, æquatio (E) conſtruatur ſaltem per quadraturas quando fieri poteſt, & indeterminatæ ſunt ſeparabiles, manifeſtum puto curvas infinitas noſtræ formulæ reſpondere, variatur enim natura curvæ, ob mutatam coſtantem $dx : q$, & quilibet valor quantitatis q novam ſemper æquationem localem, ſive algebraicam, ſive tranſcendentem ſubminiſtrat.

2. Quamquam alterato valore magnitudinis q curvæ diverſæ originem ducant, certum tamen eſt in quacumque hypoteſi locum invenire inter ipſas curvam, ut ita loquar, principalem dependentem ab æquatione fundamentali (A) $zdx = dy$, nam ſi fiat æqualis nihilo conſtans g, quam addidimus integrando, ſtatim æquatio (E) tranſit in æquationem (A). In hoc caſu nihil refert, quænam differentia $dx : q$ accepta ſit pro conſtante, cum evaneſcente g, etiam quantitas q evaneſcat.

3. Si æquatio (E) ulterius differentietur, non reſtituet expreſſionem (D) niſi duobus in caſibus; vel ponendo $g = o$, & procedendo ad ſecundas differentias nulla conſtante aſſumpta, multiplicatis tamen terminis per quantitates æquivalentes, ut ſupra factum eſt; vel iterum differentiando, determinata prius pro conſtante fluxione $dx : q$. Utrumque patet relegendo analyſeos veſtigia. Cæterum æquatio (E) rurſus differentiata, neutra conditione impleta, formulam toto cælo diverſam ab expreſſione (D), quam reducendam aſſumpſimus, exhibet.

4. Idem omnino contingit, ſumpto pro conſtante elemento $dy : q$; nam operationem juxta traditam methodum inſtituendo, quam brevitati conſulens omitto, deveniemus ad æquationem reductam $dx = dy : z - dy \cdot \sqrt[m+1]{gm+g}^{m+1} : q$ reſpondentem noſtræ formulæ (D), in quo pariter notandum; quod facta coſtante ſuperaddita $g = o$, prodit expreſſio fundamentalis (A) $zdx = dy$.

5. Denique ex dictis colligi poſſe videtur, quod propoſita nuda formula differentiali ſecundi gradus (D) $z^{m+1} dx^m ddx + dy^{m+1} dz : z = dy^m ddy$, putarem ex aſſe me ſatisfeciſſe Analyſtæ quantumvis moroſo, obſervando ad hanc expreſſionem perveniri potuiſſe, vel nulla aſſumpta coſtante, quo in caſu locum invenit æquatio integralis $zdx = dy$, vel deſignando pro coſtantibus fluxiones $dx : q$; $dy : q$, & tum ſummatorias eſſe $dy =$

$\overline{q^{n+1}+gn+g}^{\frac{1}{n+1}} \cdot zdx : q ; dx = dy : z - dy \cdot \overline{gm+g}^{\frac{1}{n+1}} : q$. Adderem æquationem unicam $zdx = dy$, quæ differentiata abſque conſtantis beneficio tranſit in æquationem (D), ab aliis infinitis artificio ſupra explicato diſtingui poſſe, quia ſemper eadem manet in quacunque conſtantis ſuppoſitione, reliquæ vero variata conſtante mutationi ſunt obnoxiæ.

Supereſt ut videamus, utrum in aliis expreſſionibus, & præcipue in æquatione (F) $x^m ddx = ddy$ reſpondente problemati ab initio propoſito aſſignatæ conditiones adimpleantur, an ſcilicet inveniri poſſit æquatio differentialis, quæ non mutetur ad mutationem conſtantis, & quæ rurſus differentiata, nulla conſtante aſſumpta formulam (F), ſaltem terminis additis, vel ſubductis, aut valoribus ſubrogatis, ſalva æqualitate reſtituat. Fat igitur de more $dx = qdp$, eritque propter conſtantem dp, $ddx = dqdp$. Sit iterum $dy = udp$, hoc eſt $ddy = dudp$ & ſubſtituendo $x^m \, dqdp = dudp$. ſeu $x^m \, dq = du$, & integrando $\int x^m dq + g = u$; ſed $dy = udx : q$; ergo $dy = \int x^m dq \cdot dx : q + g dx \; q$.

Hic noto, quod facta $g = o$, & reducta ultima æquatione ad ſimpliciorem formam, videlicet $dy = \int x^m \, dq \cdot dx : q$ quilibet valor ipſius q æquationem, & curvam diverſam ſubminiſtrat, niſi fortaſſe poneretur exponens $m = o$, quod aſſumptam hypotheſim evertit. Idem dicendum ſtatuta conſtante fluxione $dy : q$, ex quibus infero fruſtra quæri æquationem differentialem primi ordinis, quæ propoſitum præſtare queat, & formulam (F) $x^m ddx = ddy$, ſine conſtantis auxilio, reſtituere; nam ſi daretur talis æquatio, prodere ſe deberet in quacunque conſtantis ſuppoſitione, cum tamen noſtra analyſis contrarium oſtendat.

Conſtat igitur problema propoſitum, nempe curvam invenire, in qua data dignitas abſciſſæ ſit ſemper directe ut ſecunda fluxio ordinatæ, & reciproce ut ſimilis fluxio ejuſdem abſciſſæ, ſolvi non poſſe, ſi curva quæſita talem proprietatem obtinere debeat, ſumptis ſecundis differentiis nulla conſtante determinata, & ex oppoſito curvas infinitas ſatisfacere, ſi modo una, modo altera conſtans uſurpanda ſit.

Non erit abs re aliud exemplum in medium afferre, & ſequentem formulam (G) $x^m ddx = zddz + dz^2 + zzdz^2$ examini ſubjicere. Hanc ſub canone noſtro non comprehendi, videtur primo aſpectu colligi ex eo, quod æquatio utramque indeterminatam x, z, cum ſuis functionibus contineat: verum ſi fiat $zdz = dy$, nova expreſſio (H) $x^m ddx = ddy + dy^2$ ex hac ſubſtitutione reſultans juxta regulas ſupra explicatas ſolutionem non reſpuit.

1. In primis deſigno pro conſtante differentiam dx, unde fit $ddx = o$. Evaneſcente igitur termino $x^m ddx$, remanent $-ddy = dy^2$, vel $-\frac{ddy}{y} : \frac{dy}{y} =$

$= dy$, & integrando $log : dx : dy = y$, vel $dx : dy = c^y$, hoc eſt $dx = c^y dy$, & tandem $dx : x = dy$, quæ æquatio dat logarithmicam vulgarem.

2. Statuo tanquam conſtantem alteram differentiam dy, in qua hypotheſi, exiſtente $ddy = 0$, erit $x^m ddx = dy^2$. Pono $dx = sdy = cdy$, c conſtans eſt ſive affirmativa, ſive negativa, & s variabilis determinanda. Tranſco ad ſecundas differentias, & ſeſe offert æquatio $ddx = dsdy$. Hinc ſubſtituendo, $x^m ds - dy$: ſed $dy = dx : \overline{s+c}$; igitur $sds + cds = x^{-m} dx$, & ſummando, omiſſa inutili conſtantis g additione, $ss : 2 + cs = x^{-m+1} : -\overline{m+1}$, ſeu $s + c = \sqrt{2x^{-m+1} : -\overline{m+1}) + cc}$: atqui $dx = \overline{s+c}$. $dy = dy \cdot \sqrt{2x^{-m+1} : \overline{m+1}) + cc}$, igitur $dx : \sqrt{2x^{-m+1} : -\overline{m+1} + cc} = dy$.

3. Quæro utrum logaritmica inventa num. 1. adhibita conſtante dx, locum pariter habere poſſit in ſuppoſitione conſtantis dy num. 2. uſurpata. Facta conſtante $c = 0$, periculum facio, an forte quantitas $\sqrt{2x^{-m+1} : -\overline{m+1}}$ poſſit eſſe æqualis magnitudini x. Quoniam hinc inde quadrando, $2x^{-m+1} : -\overline{m+1} = xx$, igitur $2x^{m+1} = -\overline{m+1} \cdot xx$, & cum eadem quantitas debeat eſſe tam in coefficiente, quam in exponente binario æqualis, ſequitur ad æqualitatem non perveniri, niſi ponendo $-m+1 = 2$, quo in caſu determinatur valor exponentis $m = -1$.

In formula (H $x^m ddx = ddy + dy^2$ limitando, ut dictum eſt, valorem exponentis $m = -1$, tunc ad æquationem $x^{-2} ddx = ddy + dy^2$ pervenire poſſumus nulla aſſumpta conſtante, ejuſque ſummatoria in hac hypotheſi eſt æquatio differentialis ad logiſticam $dx : x = dy$; non aſcendendo ad ſecundas differentias abſque conſtantis auxilio, habebimus $ddx : x - dx^2 : xx = ddy$: ſed $dx^2 = 1$ ergo $ddx : x = ddy + dy^2$.

5. Quod ſi valor ipſius m non ſit æqualis quantitati negativæ -1, ad expreſſionem (H) nullo modo pervenire conceditur, niſi aliqua fluxio tanquam conſtans determinetur.

6. Procedendo autem generaliter, ut ſupra factum eſt, repeto æquationem (H) $x^m ddx = ddy + dy^2$. Sumo pro conſtante elementum $dx : q = dp$, & ſtatuo pariter $dy = udp$, ut obtineam rurſus differentiando $ddx = dq$

$dqdp$; $ddy = dudp$, & ſubſtituendo, $x^m dqdp + dudp = dy^2 = dudp + udydp$, & dividendo per dp, $x^m dq = du + udy$; ſed $dy = udp = udx : q$; igitur $x^m dq = du + uudx : q$.

7. Methodus generaliter ſeparandi variabiles in hac expreſſione, etiamſi quantitas q detur quocunque modo per functiones ſolius ignotæ x, pro deſperata habenda eſt. Moneo tamen, quod ſi fiat exponens $m = -1$, ſimplicior indeterminatæ u valor prodit æqualis fractioni $q : x$; nam loco ipſius u hoc valore ſubrogato, omnes termini in æquatione ſe mutuo deſtruunt. Hinc collocata in æquatione ſubſidiaria $dy = adp = udx : q$ hoc valore, redit æquatio ad logarithmicam $dy = dx : x$, quæcunque fuerit conſtans aſſumpta per magnitudinem $dx : q$ expreſſa.

Denique manifeſtum eſt, noſtrum operandi progreſſum in maximam difficultatem ſeparationis indeterminatarum poſtremo deſinere. Hanc ſpartam olim exornandam ſuſcepi, ſpecimenque aliquod in Diario Italico exhibui: ſed aut ego fallor, aut negotium tam ſubtile, tam arduum, ex quo potiſſimum pendet calculi infinitorum optata perfectio, non niſi conjunctis viribus promovendum eſt. Ut igitur ad hanc inquiſitionem profundioris analyſis, & Geometriæ cultores excitem, ſequens problema propono.

In ſuperiori formula $z^m dq = du + uudx : q$, dato ad libitum exponente m, ſtatuatur quantitas $q = x^n$. Petitur qua ratione determinandi ſint valores alterius exponentis n, ut ſuccedat indeterminatarum ſeparatio, & æquationis conſtructio per ſolas quadraturas.

Danielis Bernoulli, Joh. Fil. Med. Cand. Notata in præcedens ſchediaſma.

ILLUSTRISS. CO. JACOBI RICCATI.

ANimadverſiones has *in æquationes differentiales ſecundi gradus* ab Autore acceptas Frater meus Nic. Bernoulli, apud Italos h. t. agens, tranſmiſit ad Patrem, quem nomine Autoris rogavit, ut illas una cum ſcriptis ſuis Actis inſerendas Lipſiam deferri curaret. Perlectis, priuſquam mitterentur, Riccatianis Animadverſionibus, ſequentia in illas mihi obſerta fuerunt.

Recte quidem aſſerit Ill. Riccatus, ſæpiſſime difficulter methodo, quam vocant a priori, formulam integrari, cujus integratio a poſteriori nullo negotio exhiberi poteſt: ſed exemplum, quo illud probare contendit, ſcopo, quem habet, non ſat bene reſpondere videtur. Æquatio differentio-differentialis exempli loco allata hæc eſt (D) $z^{m+1} dx^m ddx + dy^{m+1} dz : z = dy^m ddy$, quam peractis nonnullis ſubſtitutionibus deduxit ex æquatione differentiali $zdx = dy$. Hæc enim æquatio (D) differentialis ſecundi gradus haud magno negotio a priori reducitur ad æquationem ſimpliciter differentialem, nimirum hoc modo. Æquatio (D)

æqui-

(D) æquivalet huic $dx^m\, ddx = dy^m\, z^{-m-1}\, ddz - dy^{m+1}\, dz$, quæ poſitis $dy = q$, & $ddy = dq$ (ut integrabilitas terminorum eo melius pateſcat) degenerat in hanc $dx^m\, ddx = q^m\, z^{-m-1}\, dq - q^{m+1}\, z^{-m-1}\, dz$, quæ integrata dat $\frac{1}{m+1}\, dx^{m+1} = \frac{1}{m+1}\, q^{m+1}\, z^{-m-1} + \frac{C}{m+1}\, dr^{m+1}$

(per $\frac{C}{m+1}\, dr^{m+1}$ intelligo quantitatem conſtantem arbitrariam reliquis terminis homogeneam) & tandem reſubſtituto pro q valore dy, habebitur æquatio differentialis gradus primi $\frac{1}{m+1}\, dx^{m+1} = \frac{1}{m+1}\, dx^{m+1} z^{-m-1} + \frac{C}{m+1}\, dr^{m+1}$, ſeu $dx^{m+1} = dy^{m+1}\, z^{-m-1} + c\, dr^{m+1}$; poſito autem $c = 0$, poſteaque reducta æquatione habetur $z\, dx = dy$. Q. E. F. Errat quoque ex inadvertentia Ill. Riccatus, cum æquivalentem ſtatuit æquationem $log: dx : dy = y$ huic æquationi $dx : dy = 1^y$; illa enim eſt pro logarithmica, hæc pro linea recta, ſiquidem 1^y, ſeu unitas ad quamcumque poteſtatem, ſive determinatam, ſive indeterminatam elevata nil niſi ipſam producit unitatem. Auctor in animo haud dubie habuit dicere æquationem $log: dx : dy = y$, ſumptis logarithmorum numeris, abire in hanc $dx : dy = n^y$, ubi per n non quidem ipſa unitas, ſed talis intelligendus eſt numerus, cujus logarithmus eſt unitas, adeo ut Auctori contigerit confundere unitatem cum numero, qui unitatem habet pro logarithmo, quem numerum deſigno per n. Poſtea transformat æquationem $dx : dy = n^y$, (loco 1^y ſubſtituam ſemper n^y) in hanc $dx = n^y\, dy$, ex qua colligit $dx : x = dy$, id quod verum quidem eſt, ſed patet Cl. Riccatum hanc conſequentiam formando ſupponere $x = n^y$, quæ jam eſt ipſiſſima æquatio pro logarithmica, uti dudum hoc oſtendit Parens meus, vid. Act. 1697. p. 294. unde liquet Riccatum delabi in petitionem principii, dum ſupponit æquationem eſſe pro logarithmica, quod id ipſum eſt, quod demonſtrare ſibi propoſuit.

Oſtendit tandem doctiſſ. Riccatus, quam neceſſaria ſit ſeparationis indeterminatarum doctrina, in qua excolenda multus fuit, ſtrenueque, ut audimus, etiamnum ſe exercet non ſine ſucceſſu egregio; quin & ſtimulos admovet Mathematicis, ut conjunctis viribus negotium hoc promovendum amplectantur. Hunc in finem iiſdem problema proponit dignum a ſe habitum, cuius ſolutionem tentent. Perſcribit Frater meus, ſe illud ſolviſſe; ſed præter ipſum alii quoque exiſtunt ſolutores, ſolutionem enim erucrunt Pater, & Patruelis Nic. Bernoulli, pariter ac egomet; eorum vero analyſes nondum vidi, excepta illa a Parente excogitata, quæ ra-

ratione operationis, & in procedendi modo a mea diversa est. Interim nos singuli sua quisque methodo utentes in eosdem valores exponentis n incidimus, unde suspicor, alios non dari separabilitatis casus, quam quos per diversas vias deteximus; solutionem addo, ne tamen aliis idem tentandi occasionem adimam, illam characteribus occultis involvo, revelaturus significationem, quando tempus postulaverit.

Solutio problematis ab Illustriss. Riccato proposiți characteribus occultis involuta.

$24a$, bb, bc, $8d$, $33e$, $5f$, $2g$, $4h$, $33i$, bl, $21m$, $26n$, $16o$, $8p$, $5q$, $17r$, $16s$, $25i$, $32u$, $5x$, $3y$, $+$, $-$, $—$, $\pm$, $=$, 4, 2, 1.

SCHEDIASMA VIII. (*)

Appendix ad Animadversiones in æquationes differentiales secundi gradus.

CUm suadente doctissimo, & amicissimo Viro Nicolao Bernoullio tunc temporis apud nostrates agente, qualescunque meditationes meas de æquationibus differentialibus secundi ordinis ad illustrem Patrem Johannem Basileam transmisissem, ut nonnisi ipso probante Actis Eruditorum Lipsiensium insererentur; hæ cum Annotationibus egregii Juvenis Danielis Bernoullii, ejusdem Nicolai Fratris, in publicam lucem prodiere. Quanquam autem me tanto scholiaste dignum haud putarem; suspicor tamen illum minus attentum se præbuisse, & instituti mei rationem nullo modo fuisse assecutum.

Propositum mihi non fuit ex separatione indeterminatarum laudem quærere; hæc enim investigatio ab intentione mea longissime aberat, ut sequentia verba satis superque indicant, quæ nulla interpretatione in alium sensum detorqueri possunt. Observabam (infinitas dari formulas differentio-differentiales, ad quas pervenitur nulla adhibita costante: totidem quoque exhiberi posse, ad quas pervenire non conceditur, nisi constante in subsidium vocata: at quomodo ab invicem dignosci queant, & qua ratione tractandæ sint, non ita compertum, neque obvium putabam). Exemplo deinde allato, quod mihi subministrabat formula $x^m ddx = ddy$, ita pergebam. (Posteriores hasce expressiones, quæ sub falsa specie nobis imponunt, a veris, atque legitimis secernere, videtur esse profundioris in-

(*) *Fù impresso questo Schediasma negli Atti di Lipsia dell'anno* 1723.

indagationis: nihilominus certum, &, quantum ſubjecta materia patitur, generale criterium Mathematicis examinandum propono, quod ſaltem uſui erit in his omnibus caſibus, in quibus nos calculus integralis haud deſerit.)

Porro generale criterium in hoc conſiſtit, ut aſſumpta ad libitum æquatione differentiali ſecundi ordinis, cujus integratio ſit in noſtra poteſtate, ſi, quacunque uſurpata conſtante, eadem ſemper ſummatoria nobis occurrat, aut ſaltem, deletis conſtantibus, quas integrando addidimus, occurrere queat; ſignum eſt ad noſtram æquationem differentio-differentialem perveniri, abſque eo quod neceſſe fuerit conſtantem adhibuiſſe. Quod ſi oppoſitum contingat, concludere par eſt, ſine conſtantis beneficio, propoſitam formulam per ſecundas differentias expreſſam ab æquatione elementa tantum prima involvente deduci non potuiſſe. Canonis hujus utilitas manifeſte ſe prodit; cur enim infinita Problemata proponi non poſſunt, quæ ſecundas differentias neceſſario involvant? Quomodo autem ab hujuſmodi quæſtionibus Analyſta ſe expediet, niſi noverit, quibus in caſibus æquationes conſtantis aſſumptionem ſupponant, aut gigni queant, nulla uſurpata conſtante?

Hinc ut methodo inſervirem, & Analyſtis minus peritis morem gererem, (non enim ſolis Bernoulliis canimus.) Synthetica via, &, ut ajunt, a poſteriori procedere conſtitui; ut deinde relictis veſtigiis, rem a priori perficerem. Eligendum itaque exemplum fuit, quod in quacumque conſtantis hypotheſi integrationem non reſpueret, & propoſito ex omni parte reſponderet. Hoc autem, ni fallor, obtinui rurſus differentiando formulam (A) $zdx = dy$, & poſt aliquas ſubſtitutiones in ſequentem transformando (D) $z^{m+1}\,dx^m\,ddx + dy^{m+1}\,dz : z = dy^m\,ddy$, quam inter ſimpliciores numeravi, ejuſque reductionem ope conſtantis $dx : q$ tali pacto ſum aſſecutus. (Pono $dx : q = dp$, eſt autem q quomodocunque data per indeterminatas x & y, vel earum functiones, & cum ſit $dx : q$ conſtans, erit pariter conſtans dp. Præterea ſtatuo $dy = udp$, & ſumptis ſecundis differentiis, erit $ddx = dq\,dp$, $ddy = du\,dp$, ſurrogatis in expreſſione (D) valoribus ut ſupra determinatis, orietur æquatio $z^{m+1}\,q^m\,dq\,dp^{m+1} + u^{m+1}\,dz\,dp^{m+1} : z = u^m\,du\,dp^{m+1}$, & dividendo per dp^{m+1}, $z^{m+1}\,q^m\,dq + u^{m+1}\,dz : z = u^m\,du$, & ſummando, non omiſſa conſtantis g additione, $g + q^{m+1} : \overline{m+1} = u^{m+1} : \overline{m+1} \,.\, z^{m+1}$, quæ

æquatio dat $u = z \,.\, \overline{\dfrac{1}{q^{m+1} + g\,m + g}}^{\frac{1}{m+1}}$: & quia $dy = udp = udx : q$, opportuna adhibita ſubſtitutione, occurrit æquatio reducta (E) $dy = \overline{\dfrac{1}{q^{m+1} + g\,m + g}}^{\frac{1}{m+1}} \,.\, z\,dx : q$, vel ſi fiat conſtans addita $g = 0$, $dy = z\,dx$. Q. E. F.)

Cum igitur ſancitus canon, ad quem tanquam ad ſcopum collineant animadverſiones meæ, & de quo apud Eruditum Adoleſcentem (quod mirum profecto eſt) altum ubique ſilentium, in tuto ſit, & extra cenſuræ jactum poſitus, exemplumque canoni illuſtrando adhibitum optime procedat; neſcio quid ipſi in mentem venerit, ut me dixiſſe putet. (Recte quidem aſſerit Ill. Riccatus, methodo, quam vocat, a priori ſæpiſſimè difficulter formulam integrari, cujus integratio a poſteriori nullo negotio exhiberi poteſt.) Id ſi dixiſſem, verum utique dixiſſem, ſed extra chorum ſaltando, & propoſitionem in medium afferendo ab inſtituto meo prorſus alienam. Addit (ſed exemplum, quo illud probare contendit, ſcopo, quem habet, non ſat bene reſpondere videtur, æquatio enim differentio-differentialis exempli loco allata hæc eſt (D) $z^{m+1} dx^m ddx + dy^{m+1} dz : z = dy^m ddy$, quam peractis nonnullis ſubſtitutionibus, deduxit ex æquatione differentiali $z dx = dy$.) Profecto ut conſtat ex dictis, exemplum finem alium toto cælo diverſum reſpicit: & ineptus equidem fuiſſem ſi formulam inverſa methodo, & a priori a me jam integratam, pro deſperata vendidiſſem. Interim videamus, quomodo defectum meum ſupplere contendat Juvenis nimis fortaſſe ingenioſus.

(Hæc æquatio, inquit (D) differentialis ſecundi gradus haud magno negotio a priori reducitur ad æquationem ſimpliciter differentialem, nimirum hoc modo. Æquatio (D) æquivalet huic $dx^m ddx = dy^m z^{-m-1} ddy - dy^{m+1} z^{-m-2}$, quæ poſitis $dy = q$, & $ddy = dq$, ut integrabilitas terminorum eo melius pateſcat, degenerat in hanc $dx^m ddx = q^m z^{-m-1} dq - q^{m+1} z^{-m-2} dx$, quæ integrata dat $\frac{1}{m+1} dx^{m+1} = \frac{1}{m+1} q^{m+1} z^{-m-1} + \frac{C}{m+1} dx^{m+1}$ (per $\frac{C}{m+1} dx^{m+1}$ intelligo quantitatem conſtantem arbitrariam reliquis terminis homogeneam) & tandem reſubſtituto pro q valore dy, habebitur æquatio differentialis gradus primi $\frac{1}{m+1} dx^{m+1} = \frac{1}{m+1} dy^{m+1} z^{-m-1} + \frac{C}{m+1} dx^{m+1}$, ſeu $dx^{m+1} = dy^{m+1} z^{-m-1} + c dx^{m+1}$; poſito autem $c = 0$, poſteaque reducta æquatione, habetur $z dx = dy$. Q. E. F.)

Pace acutiſſimi Scholiaſtis ſit dictum, hoc nihil aliud eſt, quam actum agere. In ejus integrali $dx^{m+1} = dy^{m+1} z^{-m-1} + c dx^{m+1}$ fiat $dx = dx : q$; id enim permittit indeterminata arbitraria q; erit igitur $dx^{m+1} - c dx^{m+1} . q^{-m-1} = dy^{m+1} z^{-m-1}$, vel $\frac{q^{m+1} - c}{m+1} . dx^{m+1} =$

$= \frac{dy^{m+1}}{z^{m+1}}$, & extracta hinc inde radice $\overline{q^{m+1} - c}^{\frac{1}{m+1}}\, q \,.\, dx : q = dy : z$.

Conferatur modo hæc formula cum noſtra (E), ſcilicet.

$dy = \frac{zdx}{q} \,.\, \overline{q^{m+1} + gm + g}^{\frac{1}{m+1}}$, & patebit nullum aliud intercedere

diſcrimen, niſi quod magnitudo conſtans, quam vocat $-c$ Clariſſ. Bernoullius, a me deſignatur per $gm + g$. Tota ergo differentia in hoc ſita eſt, quod iſte methodo particulari, ego vero generali, quæ ad caſus infinitos difficiliores extenditur, rem ſum proſequutus, ita inſtituti mei ratione poſtulante.

Quod ſi nonniſi de præmiſſa æquatione (D) ſermo fuiſſet, ita ſecundæ differentiæ ad primas nullo negotio redigi poterant. Formula tranſeat in ſequentem $\frac{z^{m+1}\, dx^m ddx}{dym + 1} = \frac{ddy}{dy} - \frac{dz}{z} = \frac{dp}{p}$; igitur $dy = zp$, & ſubrogando in primo termino loco ipſius dy^{m+1} ejus valorem $z^{m+1} \,.\, p^{m+1}$, erit $dx^m ddx = p^m dp$, & integrando, $\frac{dx^{m+1}}{m+1} + \frac{cdx^{m+1}}{m+1} = \frac{p^{m+1}}{m+1}$, vel $dx^{m+1} + cdx^{m+1} = p^{m+1} = dy^{m+1} : z^{m+1}$. Q. E. F.

Verum ut methodi generalis, quam nonnullis exemplis pro re nata aptandam cenſui, fæcunditatem demonſtrem, obſervo ad diſtinguendas æquationes differentio-differentiales, ad quas pervenitur, nulla ex primis fluxionibus uſurpata tanquam conſtante, neceſſe non eſſe eas integrare in quacunque conſtantis ſuppoſitione, ſed ſufficere, ut habeatur ſummatoria ſaltem in aliqua particulari hypotheſi, aſſumendo pro conſtante illam magnitudinem, cujus ope formula propoſita facilius ad prima elementa reduci queat: imo ſi nihil aliud inveſtigandum ſit, quam utrum ad exhibitam expreſſionem pervenire poſſimus, nullo elemento primi ordinis pro conſtante deſignato, id conſequi licet, etiamſi aſſumptæ æquationis integratio non ſit in noſtra poteſtate.

Ut dicto fidem faciam, ſit formula $zddx = uddy + \omega dy^2$. Quantitates z, u, ω uſurpantur pro arbitrariis functionibus coordinatarum x, & y. In primis ſtatuatur tanquam conſtans fluxio dy, & ob id, cum ſit $ddy = 0$, erit $zddx = \omega dy^2$. Fiat $dx = pdy$, & $ddx = dpdy$; igitur $zdpdy = \omega dy^2$, vel $dp = \frac{\omega dy}{z}$, & integrando omiſſa conſtantis additione, $p = \int \frac{\omega dy}{z}$; ſed $p = dx : dy$ ergo (A) $dx = dy \,.\, \int \frac{\omega dy}{z}$. Iterum cum ſit

dp

$dp = \frac{\omega dy}{z}$, & $dy = dx : p$; ergo $pdp = \omega dx : z$ & ſummando, $p^2 = 2 \int \frac{\omega dx}{z}$, vel $p = \sqrt{2 \int \frac{\omega dx}{z}}$ & collocando pro quantitate p valorem $dx : dy$, habebimus (B) $dx = dy \cdot \sqrt{2 \int \frac{\omega dx}{z}}$.

Sumatur modo in formula principali conſtans dx, & ſit $ddx = 0$; igitur $- uddy = \omega dy^2$. Fiat de more $dy = qdx$, & $ddy = dqdx$. Hinc $- uddy = - udxdq = \omega dy^2$: ſed $dy^2 = q^2 dx^2$; ergo facta ſubſtitutione, $- dq : q^2 = \omega dx : u$, & ſummando neglecta ut ſupra conſtantis additione, $\frac{1}{q} = \frac{dx}{dy} = \int \frac{\omega dx}{u}$, & tandem $dx = dy \int \frac{\omega dx}{u}$ (C).

Rurſus cum ſit $- udqdx = \omega dy^2$, & $dx = dy : q$; igitur $- dq : q = \omega dy : u$, & integrando, Log. $1 : q = \int \frac{\omega dy}{u}$, ſcilicet $1 : q = dx : dy = c \int \overline{\omega dy : u}$, hoc eſt (D) $dx = c \int \overline{\omega dy : u}\, dy$.

Comparentur modo expreſſiones A, B, quæ pendent ab uſurpata conſtante dy, cum expreſſionibus C, D originem ducentibus ex alterius conſtantis dx aſſumptione. Quoniam ex æquatione (A) habemus $dx = dy \int \frac{\omega dy}{z}$, & ex æquatione (C) $dx = dy \int \frac{\omega dx}{u}$, & utraque æquatio ex canone generali in eandem curvam deſinere debet, ſi ad noſtram æquationem ſecundi gradus nulla adhibita conſtante perventum ſit; ergo $dy \int \overline{\omega dy : z} = dy \int \overline{\omega dx : u}$, hoc eſt $dy : z = dx : u$. Hac æqualitate ſervata, quemcumque valorem obtineat altera quantitas ω, ad æquationem $zddx = zdxddy : dy + \omega dy^2$, in qua loco ipſius u facta eſt debita ſubrogatio, pervenire poſſumus abſque conſtantis auxilio.

Iterum comparentur æquationes (B), & (C), hoc eſt $dx = dy \sqrt{2 \int \overline{\omega dx : z}}$, & $dx = dy \int \overline{\omega dx : u}$, eritque $\sqrt{2 \int \overline{\omega dx : z}} = \int \overline{\omega dx : u}$, & differentiando, $\omega dx : z = \frac{\omega dx}{u} \int \frac{\omega dx}{u}$, vel $\frac{u}{z} = \int \frac{\omega dx}{u}$.

In

In hoc quoque caſu facta opportuna ſubſtitutione, haberi poteſt formula principalis per ſecundas differentias expreſſa, & ad quam pervenire licet nulla aſſumpta coſtante. Aliæ operationes, & comparationes inſtitui poſſunt, ſed hæc ulterius proſequi non vacat, cum hucuſque dicta ſatis ſuperque methodi uſum oſtendant.

Redeo ad doctiſſimum Danielem Bernoullium, qui ſecundo loco inadvertentiæ me accuſat, dum ab æquatione Log. $\frac{dx}{dy} = y$ tranſeo ad ſequentem $\frac{dx}{dy} = 1^y$. Legendum porro erat $\frac{dx}{dy} = c^y$, quem errorem in notis ſive ipſarum ſimilitudini, ſive meæ inſcribendo, vel exſcribendo oſcitantiæ tribuam, neſcio. Hoc unum ſcio, conſequentiam eſſe legitimam, & cum defectus non in re, ſed in ſpeciebus conſiſtat, corrigendus potius erat quam notandus; hanc enim veniam damus & petimus viciſſim, ut lapſum in ſignis negligamus, niſi in paralogiſmum concluſionis deſinat. Vix hujusmodi errores vitari poſſunt, & data occaſione admoneo in mea Diſſertatione p. 69. n. 4. (a) pro æquatione $dx = dy : q . \overline{mq+g}^{\frac{1}{m+1}}$ hanc aliam ſubſtituendam eſſe $dx = dy : z - dy . \overline{m+g}^{\frac{1}{m+1}} : q$.

Similiter pag. 70. (b) §. *Supereſt*, poſt ea verba (aſſignatæ conditiones adimpleantur) legendum eſt an ſcilicet inveniri poſſit æquatio differentialis, quæ non mutetur ad mutationem conſtantis, & quæ rurſus differentiata &c. Ita ſenſus, qui nullus erat, fit planus, & apertus, atque humaniſſimo Scholiaſti gratias ago, quod correctioni locum dederit, & defectum ſive ſcripturæ, ſive impreſſionis mihi non imputaverit.

Fateor interim me conjicere non potuiſſe, quid ſibi velit laudatus Bernoullius his verbis. (Poſtea transformat æquationem $dx : dy = n^y$ (loco 1^y ſubſtituam ſemper n^y) in hanc $dx = n^y dy$, ex qua colligit $\frac{dx}{x} = dy$, id quod verum eſt, ſed patet, Cl. Riccatum hanc conſequentiam formando ſupponere $x = n^y$, quæ eſt ipſiſſima æquatio pro logarithmica, uti dudum hoc oſtendit Pater meus Vid. Acta 1697. p. 293.; unde liquet Riccatum delabi in petitionem principii, dum ſupponit æquationem eſſe pro logarithmica, quod id ipſum eſt, quod demonſtrare ſibi propoſuit.)

Quod formula $dx = c^y dy$ in alteram $dx : x = dy$ tranſire queat, non ut demonſtrandum aſſumpſi, ſed ut notum ſuppoſui. Quid pluribus verbis

(a) Nel preſente Tomo pag. 89.
(b) pag. 86.

bis opus erat in re tam facili? Mirari ſubit Clariſſimi Juvenis nimiam fortaſſe confidentiam; quomodo enim hariolari potuit me ad deductionem proceſſiſſe, nonniſi ſubrogando x pro quantitate exponentiali c^y, & ob id petitionem principii admittendo? Cum de methodo reductionis verba non fecerim, Bernoulliana oppoſitio mera ſuſpicio eſt, quæ nulli conjecturæ innititur & ſola negatione eliditur. Sed ipſi in re ſatis obvia morem geramus. Quoniam $dx = c^y dy$, fiat $c^y = z$; igitur $y = \log. z$, & differentiando, $dy = \frac{dz}{z}$; ſcribo z, pro c^y, & dx pro dy; ergo $dx = dz$, z

& integrando, $z = x + a$, quo valore ſubſtituto in formula $dy = \frac{dz}{z}$ altera oritur $dy = \frac{dx}{x+a}$, vel $dy = \frac{dx}{x}$, poſita $a = 0$. Æquatio itaque $dx = c^y dy$ tranſit in ſequentem $\frac{dx}{x} = dy$ Q. E. D.

Quod attinet ad Problema, nempe in formula $x^m dx = du + \frac{nudx}{x^n}$; dato exponente m, determinare valores alterius exponentis n, ut ſuccedat indeterminatarum ſeparatio, illud non ea mente propoſui, ut Mathematicis veteranis, & præcipue Geometricæ, ut ita loquar, Bernoulliorum familiæ impervium putarem. Cum enim ejus ſolutionem invenerim, dum adhuc utrum ſolvi poſſet ambigerem, cur ab aliis, quos de ſucceſſu certiores feceram, enodationem non expectarem? Noveram inſuper Cl. Virum Nicolaum Bernoullium laudati Johannis filium huic quæſtioni, quam ipſi amice communicaveram, elegantiſſime ſatisfeciſſe. Problema igitur non e trivio petitum, & quod novam requirit induſtriam, cui bono in publicam lucem emiſerim, ex noſtra diſſertatione colligi poteſt. Non enim id factum, ut quemquam laceſſerem, quod profecto ab ingenio meo nimis alienum eſt; ſed ut comparando inter ſe varias methodos, quibus Viri doctiſſimi propoſitum aſſecuti fuiſſent, aliquid luminis indeterminatarum ſeparationi affunderetur. Vix fieri poteſt, ut ſinguli Analyſtæ eadem progreſſione utantur, & ut methodus unico tantum Problemati inſerviat. Quod ſi viri Clariſſ. Bernoullii ſolutiones inventas Geometris non invidebunt, calculi integralis fines etiam in hac parte proferent, & mihi aliquid accedet laudis, quod occaſio ſaltem fuerim, ut talia ederentur.

DA-

DANIELIS BERNOULLI.

Explanatio Notationum ſuarum.

PRimum, quod obiter notavi in Riccatianis Animadverſionibus, verſatur circa æquationes (B), ac (D), quas æquali fere facilitate integrari obſervaveram, ac propterea vix conciliari poſſe verba Cl. Riccati, quibus poſterioris integrationem *majus artificium poſtulare*, prioris vero *nullo negotio* abſolvi aſſerit, atque hoc pacto fieri tranſmutationem formulæ (B) in alteram (D) quodammodo inutilem, utpote quam non alio inſtituit fine, quam ut poſterioris integratio fieret magis ardua: utque adnotationem meam ſuffulcirem, oſtendi, quam facile ſit æquationem differentialem ſecundi ordinis (D) ad ſimpliciter differentialem reducere. Quid vero in iſta reductione deſiderandum ſit, prorſus ignoro, nec adeoque video, quo titulo, me actum egiſſe, dicere queat Doctiſſimus Riccatus in ſua Appendice. Quod ſi ipſe inſignis vir loco formulæ (D) aliam dediſſet, ſui integrationem denſiori velo occultantem, non ſolum extra memoratam ſe poſiturus ſuiſſet cenſuram, ſed & ſimul melius ingenioſiſſimæ ſuæ methodi æquationum reducendarum præſtantiam manifeſtaturus, hocque unicum fuit, quod deſideravi, dum dicerem, *recte quidem aſſerit Ill. Riccatus, ſapiſſime difficulter methodo, quam vocant a priori formulam integrari, cujus integratio a poſteriori nullo negotio exhiberi poteſt: ſed exemplum, quo illud probare contendit, ſcopo, quem habet, non ſat bene reſpondere videtur*: quæ verba non ita interpretanda velim, ut fecit Cl. Riccatus, quaſi nimirum credidiſſem, ſcopum primarium ipſi fuiſſe, exemplo monſtrare, quam difficile ſit a *priori* integrare formulas, quarum integratio *a poſteriori* conſtat; facile enim quilibet perſpicere poteſt, Virum Acutiſſimum in animo habuiſſe, oſtendere, quomodo dignoſci ab invicem queant æquationes differentiales ſecundi gradus, quæ pro ſua reductione conſtantis poſitione opus habeant, vel non habeant; optimeque inſtituto ſuo præcipuo defunctus eſt. Attamen hoc non impedit, quin digreſſionem illam, qua æquationi (B) aliam inducit formam, vi deatur eo fine feciſſe, ut novam exhiberet formulam, veluti (D), majus integrationis artificium poſtulantem, & cujus ſimul integratio *a poſteriori* pateret: nec male hic applicantur verba ipſiſſima Clariſſ. Riccati: *dum ſyntheticæ viæ inſiſtimus, eæ difficultates, de quibus ſermo erit, vix occurrunt, quæ tamen evitari nequeunt, ſi problema aliquod proponatur ſecunda elementa involvens, & analytica methodo procedendum ſit.*

La preſente ſpiegazione delle ſue Annotazioni la fece inſerire il Dottiſſimo Signor Daniele Bernoulli negli Atti di Lipſia dell' anno 1725. ſi legge parimente nelle Eſercitazioni matematiche dello ſteſſo Sig. Bernoulli ſtampate in Venezia per Domenico Louiſa l' anno 1724.

Non credidiſſem, hanc meam in Riccatianas Animadverſiones adnotationem, ipſum Riccatum parum, vel nihil offendentem, tanta explicatione indigere, nec illam dignam exiſtimaſſem, de qua vel verbulo mentionem moverem, niſi magnam partem Doct. Riccati Appendicis in ipſius refutationem collineare vidiſſem.

Secunda mea notatio indicat errorem, quem ex inadvertentia in Animadverſiones Riccatianas irrepſiſſe, atque corrigi poſſe, dixi, ſi pro 1^r ſcribatur n^r, ubi per n intelligitur numerus, cujus logarithmus eſt unitas. Hinc conqueritur Cl. Riccatus in appendice ſua de mea ſincera agendi ratione, inquiens tales errores corrigendos eſſe, non notandos. Mihi ſane videor id ipſum feciſſe, quod deſiderat; correxi enim errorem eundemque indicavi, non notavi, expreſſis innuens verbis, errorem irrepſiſſe *ex inadvertentia*; melius meo quidem judicio feciſſet confitendo talem *inadvertentiam*, nec ſummis viris ignominioſam, quam errorem attribuendo oſcitantiæ in exſcribendo: vix enim veriſimile eſt in eundem calami errorem bis incidere, atque dum ſe ex inadvertentia purgare conatur, obſcuritatis ſe accuſat: nam ſi loco unitatis ſcripſiſſet litteram c, definiendum fuiſſet, quid intellectum velit per litteram illam a novo introductam, & mox aliam ſignificationem accepturam, in ſequentibus enim per c intelligit quantitatem quamcumque conſtantem.

Tertia mea in Doctiſſimi Riccati Animadverſiones notatio pertinet ad ipſius demonſtrationem, qua oſtendere ſibi propoſuit, formulam $-ddy = dy^2$ logarithmicam repræſentare. Nemini certe demonſtrationem illam perlegenti ſuſpicionem non movebit Cl. Riccatus, ſe in illa idipſum ſuppoſuiſſe, quod oſtendere ſibi propoſuerat: unde mihi videor non abſque ratione indicaſſe, latere petitionem principii in demonſtratione Riccatiana.

Verum ipſa demonſtrationis verba ſecundum Auctoris mentem correcta tranſcribam; *remanent*, inquit Cl. Riccatus, $-ddy = dy^2$, vel $-\frac{ddy}{dy} : dy = dy$, *& integrando log.* $dx : dy = y$. vel $dx : dy = c^y$, *hoc eſt* $dx = c^y dy$, *& tandem* $dx : x = dy$, *quæ æquatio dat logarithmicam vulgarem.*

In hujuſmodi demonſtrationibus, ni fallor, quælibet æquatio ita ex præcedenti deduci debet, ut deductionis principium ſit ſimplex, & omnibus obvium: hoc ipſum in memorata demonſtratione egregie obſervatur; ubique enim talis inter duas proximas æquationes eluceſcit connexio, ut transformationis fundamentum ſimpliciſſimum ſit, atque vel primis tyronibus obvium. Quis itaque non eodem modo comparatas judicet duas ultimas æquationes $dx = c^y dy$, & $dx : x = dy$, atque credat unica opus eſſe per ſe clara ſubſtitutione, ut ex priore habeatur formula poſterior? Hoc autem ſi ſit, neceſſario transformationis fundamentum eſt ſuppoſitio æqualitatis inter x, & c^y; etenim diviſo primo æquationis penultimæ membro per x, & altero per c^y, obtinetur æquatio poſterior, unde manifeſto ponitur $x = c^y$, quæ æquatio Logarithmicam repræſentat, adeo ut in Riccatiana demonſtratione id ipſum ſupponatur, quod eſt in quæſtione.

Ex-

Expoſitam meam notationem ut eluderet Riccatus, quærit, *quomodo hariolari potuerim*, ſe ad deductionem proceſſiſſe non niſi ſubrogando x pro c'? Hariolatione ſane opus non eſt, ubi ſola contemplatio demonſtrationis ſufficit: niſi enim longam multarum ſubſtitutionum concatenationem inſtituere velit, nunquam formulam $dx = c'dy$ tranſire faciet in alteram $dx : x = dy$ abſque petitione principii; talem vero transformationum ſeriem, ſi tanquam notam, & obviam ponere velit, tota demonſtratione ſuperſedere potuiſſet; nam longe magis obviam puto tranſitionem primæ formulæ in penultimam, quam hujus in ultimam. Vitio itaque petitionis principii ſi libera eſſet demonſtratio, inſigni defectu laboraret. Sed huic ſive vitio, ſive defectui optime medetur Vir Eruditiſſimus in appendice ſua, ubi demonſtrat *identitatem* inter æquationes $dx = c'dy$, & $dx : x = dy$, quam equidem demonſtrationis partem male ante omiſſam eſſe (ſi modo, ut dicit, conſulto omiſit) ex eo conſtare poteſt, quod illa ſola multum excedat reliquum demonſtrationis. Quod ſi forſan nimium, & intempeſtivum brevitatis ſtudium omiſſionis illius cauſa fuerit, potuiſſet eadem brevitate, & iiſdem fere verbis totam demonſtrationem abſolvere (niſi forſan Paternorum ſcriptorum allegationem faſtidiſſet) hoc modo: *remanet* $-ddy = dy^2$, *vel* $-ddy : dy = dy$, *& integrando log.* $dx : dy = y$, *vel* $dx : dy = c'$, *hoc eſt* $dx = c'dy$, *& rurſus integrando* $x = c'$, (*eſt enim* $c'dy = dc'$, *vid. Act. Lipſ.* 1697. *p.* 291.), *quæ æquatio dat Logarithmicam ordinariam; vid. Act. cit. p.* 294.

SCHEDIASMA IX.

Della quadratura della Poſt-evoluta della Cicloide Lettera dell' Autore al Sig. Bernardino Zendrini.

IL Problema propoſto, e ſciolto da VS. Eccellentiſſ. mi ſembra uno dei più difficili della Geometria, ed io conoſcendo la ſua perizia in queſte profonde ſpeculazioni, ſtimava ſuperfluo il tentarne lo ſcioglimento, dopo d'eſſerſi ella internata nella materia. Contuttociò per ſecondare il ſuo invito, e per ricavar forſe qualche nuovo lume dalla diverſità de' metodi, le mando la mia ſoluzione tal quale ella poſſa eſſere.

Sii dunque data qualſivoglia curva ABD (Fig. 19.) la di cui evoluta ſia AHF, e la poſt-evoluta DMI; egli è certo, che tirata dal punto B preſo ad arbitrio la tangente GBM, la retta GB ſarà uguale alla curva AB, e la retta BM alla curva BD, dunque la linea intiera GBM ſarà uguale a tutta la curva ABD; e perchè ciò ſempre ſuccede, in qualſiſia ſito della curva ſi prenda il punto B; ne ſegue, ch'ogni tangente terminata da una parte nell'evoluta, e dall'altra nella poſt-evo-

luta è ſempre uguale alla curva ABD, ed in conſeguenza coſtante.

Ciò ſuppoſto, tirata dal punto A la linea *Aa* paralleta alla DE tangente della curva data nel punto eſtremo D, e deſcritto dal centro A l'arco di cerchio IN*a*, il di cui raggio ſia uguale alla curva ABD, o alla ſua tangente GM, dimoſtra il Sig. Gio: Bernoulli negli Atti di Lipſia al Meſe d'Agoſto dell'anno 1695., che l'arco IN*a* è uguale alle due curve AGF evoluta, e DMI poſt-evoluta.

Nel noſtro caſo l'arco predetto ſarà un quadrante di circolo, perchè le due linee AE, DE, che toccano la cicloide ne' punti eſtremi A, e D, formano un angolo retto nel punto E. In oltre il ſemidiametro A*a* uguale alla periferia della cicloide ſarà doppio della linea AZ diametro del circolo generatore, e perciò la circonferenza del quadrante ſarà uguale alla circonferenza del circolo generatore. Se dunque da queſta circonferenza io ſottrerrò la curva AHF, la quale per eſſere una cicloide ſimile alla prima è dupla del diametro AZ, rimarrà la curva DMI eguale alla periferia del circolo generatore, meno il doppio del ſuo diametro.

Stimo inutile l'avvertire, che nella maniera ſteſſa ſi può determinare la miſura di qualſiſia porzione della curva DMI.

Queſto, com'ella vede, è un ſemplice Corollario della propoſizione univerſale del Sig. Bernoulli. S'incontra maggior difficoltà nella quadratura dell'arca DEI, mentre oſſervo, che la ſua formula rieſce molto compoſta, non oſtante le varie ſoſtituzioni opportunamente inſerite. In queſte anguſtie io ſoglio traſmutare il miſtilineo, di cui ſi deſidera la quadratura, in un altro più ſemplice, ſe pure la traſmutazione è poſſibile.

Nel Problema, che abbiamo per le mani, giacchè mi ſi preſenta l'occaſione di ſtendere la ſpeculazione del Sig. Bernoulli, Ella mi permetta di diſcorrere generalmente nella ſeguente maniera.

La linea GBM tocchi la curva ABD nel punto B, e tirata dal punto A centro dell'arco circolare INA la linea APN parallela alla predetta tangente, ſi prenda la linea AP uguale alla curva AB, o alla porzione BG della tangente; per il punto P, ed altri infiniti determinati nel modo ſteſſo paſſi la curva AP Q*a*.

Dico, che l'area APQ*a* è uguale al miſtilineo compreſo dalle due curve ABD, AHF, e dalla tangente DF.

Prendaſi il punto *g* infinitamente proſſimo al punto B, ed alla ſeconda tangente HoL ſia parallela la linea AQO.

Perchè le due linee G*g*, H*g* ſono parellele alle due linee AP, AQ, l'angolo PAQ ſarà uguale all'angolo G*g*H: ma la linea *g*G = BG per la minima diſtanza de' due punti B, *g*, è anche uguale alla linea AP per la coſtruzione; dunque i due triangoli APQ, G*g*H ſono uguali. Ma il triangolo APQ è l'elemento dell'area APQ*a*, ed il triangolo G*g*H è l'elemento del miſtilineo A*g*DFHA; dunque queſte due ſuperficie ſaranno uguali, il che dovea dimoſtrarſi.

Di

Di vantaggio tirata dal punto A la linea APN ad arbitrio, la quale interſechi la curva ſopra deſcritta APz nel punto P, e l'arco circolare nel punto N, prendaſi la linea AR uguale alla PN, e per il punto R, ed altri ſimilmente trovati paſſi la curva ARI.

Dico, che l'area ARI è uguale al miſtilineo contenuto dalle due curve ABD, DMI, e dalla tangente AI. La tangente GM è uguale al raggio AN: ma per la coſtruzione GB = AP; dunque PN = AR = BM. Per il rimanente s'applichi la ſopra poſta dimoſtrazione.

Suppongaſi ora, che la curva ABD ſia una cicloide, dico, che la curva APQa ſarà un ſemicircolo. Intendaſi ſopra il diametro AZ deſcritto il ſemicircolo generatore AVZ.

La linea BG tocca la cicloide nel punto B; dunque ſarà parallela alla corda AV: ma la corda PA è uguale, e parallela alla tangente BG per la coſtruzione; dunque per la proprietà nota della cicloide ſarà dupla della corda AV. Eſſendo pertanto Aa doppia di Az; dunque come Az ad Aa, così AU ad AP: ma il punto U è nella circonferenza del cerchio generatore; dunque il punto P è nella periferia d'un altro circolo, ch'ha il diametro doppio del primo, il che dovea dimoſtrarſi.

Reſta, che s'indaghi la natura della ſeconda curva ARI; Sia AR = z, AX, ovvero KR = y, XR, ovvero AK = x; AN = a.

Già che AR = z; dunque RN = a − z; ma AR = PN per la coſtruzione; dunque RN = AP = a − z. Per la natura del ſemicircolo APa

$$Aa : AP :: AP : Af$$

$$a : a-z :: a-z : \frac{a^2-2az+z^2}{a}$$

Di più ſtante li triangoli ſimili AXR, AfP,

$$AX : AR :: Af : AP$$

$$y : z :: \frac{a^2-2az+z^2}{a} : a-z,$$

e ridotta l'equazione,

$$ay-zy = \frac{a^2z-2az^2+z^3}{a},$$

e diviſo l'uno, e l'altro termine per a − z, ſarà $y = \frac{az-z^2}{a}$,

e $dy = \frac{adz-2zdz}{a}$. Ma la $x = \sqrt{2z-yy}$; dunque $x = \frac{z}{a}\sqrt{2az-zz}$.

Quindi $xdy = \frac{azdz-2z^2dz}{aa}\sqrt{2az-zz}$. Per ritrovare più ſpeditamente

l'in-

l'integrale di queſta equazione pongo AP = RN = $a-z=t$, e fatte l'opportune ſoſtituzioni trovo

$xdy = dt\sqrt{aa-tt} - \frac{3tdt\sqrt{a^2-tt}}{a} + \frac{2t^2dt\sqrt{aa-tt}}{aa}$. S' avverta, che

$aP = \sqrt{a^2-tt}$, e che l'elemento dello ſpazio $aPQa = -\frac{dt\sqrt{a^2-tt}}{2}$; dunque $\int -dt\sqrt{a^2-tt} = a$ due ſegmenti aPQz, d'onde ſi vede l'integrazione del primo termine dell'omogeneo di comparazione. Quanto al ſecondo, egli è integrabile, eſſendo $\int -\frac{3tdt\sqrt{a^2-t^2}}{a} = \frac{\overline{aa-tt}^{\frac{3}{2}}}{a} = \frac{\overline{aP}^3}{Aa}$.

Per ridurre il terzo, ſi denomini $Af = u$, e avremo $u = \frac{tt}{a}$. Facendo dunque ſvanir la t, ſi avrà $du\sqrt{au-uu}$, la cui integrale ci dà il ſemiſegmento AePfA; dunque $\int xdy = -2.aQPa + AePfA + \frac{\overline{aP}^3}{Aa} - G$, la quale G è la coſtante da determinarſi opportunamente.

Prima di paſſar oltre dichiariamo il metodo da uſarſi per rinvenire lo ſpazio ARI. Se dal centro C del circolo generatore della cicloide condurrò una parallela all'AI, eſſa toccherà la noſtra curva ARI, e il punto del contatto divideralla in due parti. In virtù della noſtra formula ritroviamo prima lo ſpazio rinchiuſo tra la parte ſiniſtra, e le due coordinate; indi quello, ch'è ſerrato dalle ſteſſe coordinate, dalla parte deſtra della curva, e dalla retta AI. Sottraendo poi il primo dal ſecondo di queſti ſpazj, rimarrà lo ſpazio ricercato ARI.

A ritrovar il primo convien riflettere, che nel punto A, in cui dev'eſſere $\int xdy = 0$, s'annullano tutte e tre le x, y, z, e la linea AN viene a coincidere coll'Aa. Dunque il ſegmento aQPa inſieme colla corda AP s'annienta, ed il ſemiſegmento AePf diviene eguale al ſemicircolo APa; dunque $0 = APQaA - G$, o ſia $G = APQaA$. Quindi la vera formula ſarà $\int xdy = -2.aQPa + AePfA + \frac{\overline{aP}^3}{Aa} - APQaA$.

Fiſſiamo or la coſtante neceſſaria a determinare l'altro ſpazio. Quando queſto ſvaniſce, la $y = 0$: ma tanto la x, quanto la

$z = AI = a$, e la AN viene a cadere ſopra la AI; dunque il ſemiſegmento $AePfA$ s'annulla, la Pa diviene $= Aa$, ed il ſegmento $aQPa$ ſi tramuta nel ſemicircolo $APQaA$. Sarà dunque $o = -2.APQaA + \overline{Aa}^2 G$, o ſia $= -2.APQaA + \overline{Aa}^2$, le quali determinazioni ci danno la vera formula $\int xdy = -2.aQPa + AePfA + \frac{\overline{aP}^3}{Aa} + 2.APQaA - \overline{Aa}^2$.

In amendue le formule ſi faccia $y = AC = \frac{a}{4}$, e ſarà $z = \frac{a}{2} AZ$.

In queſt'ipoteſi i punti R, P ſi congiungono in uno, e la corda AP ſarà eguale al raggio del circolo APa, e per conſeguenza lato dell' eſagono iſcritto; dunque aP lato del triangolo equilatero iſcritto, a cui ſarà eguale la doppia Pf. Si chiami $= B$ quel ſegmento nel circolo APa, che vien contenuto tra la terza parte dell'intera circonferenza, e la ſua corda, ch' è il lato del triangolo equilatero iſcritto, e queſto lato ſi chiami C. Nelle noſtre ſuppoſizioni ſarà $aQPa = B$, ed $AePfA = \frac{1}{2} B$.

Perciò nella ſuppoſizione di $y = \frac{a}{4}$ avremo il primo ſpazio $\int xdy = -\frac{3}{2} B + \frac{C^3}{a} - APQaA$, ed il ſecondo de'detti ſpazj ſarà $\int xdy = -\frac{3}{2} B + \frac{C^3}{a} + 2APQa\,A - \overline{Aa}^2$, e quello ſottraendo da queſto, reſterà lo ſpazio $ARI = 3APQ\,aA - \overline{Aa}^2$.

Io non m'inoltro di vantaggio; perciocchè ſe dall' area ARI io ſottrerrò l'area ABDEA eguale al ſemircolo generatore AUZ, rimarrà l'area cercata DEI.

Ella è pregata a confrontare queſta con la ſua ſoluzione, mentre io non avendo l'analiſi della ſua, non ſo come ottenere l'intento.

Paragrafo d' una Lettera del Sig. Bernardino Zendrini all' Autore.

IN eſecuzione de' reveriti comandi di VS. Illuſtriſſima ecco l' analiſi della quadratura della poſt-evoluta. Sia (Fig. 19.) AZ = $2r$, AY = x, AV = $\sqrt{2rx}$, a cagione del circolo AVZ, VZ = $\sqrt{4rr-2rx}$, l'arco AcV = u, e l'altro UTZ = Z, MB a cauſa della cicloide = $4r - 2\sqrt{2rx}$. Sia pure per abbreviare $\sqrt{2rx-xx} = p$, $\sqrt{2rx} = q$, e $\sqrt{4rr-2rx} = m$. Sarà dunque per cauſa de' ſimili ſettori ZST, BML; ZV = $\sqrt{4rr-2rx}$: ST = $\frac{rdx}{\sqrt{2rx}}$ :: BM = $4r-2\sqrt{xrx}$: ML = $\frac{2rdx}{\sqrt{2rx-xx}} - \frac{2rdx}{\sqrt{4rr-2rx}} = 2du + 2dm$, per cauſa che $du = \frac{rdx}{\sqrt{2rx-xx}}$, e $dm = \frac{-rdx}{\sqrt{4rr-2rx}}$:

Di più BML = ML . $\frac{1}{2}$ BM = $\overline{2du+2dm} \cdot \overline{2r-q} = 4rdu+4rdm - 2qdu - 2qdm$. Ora $qdu = \frac{rdx \cdot \sqrt{2rz}}{\sqrt{2rx-xx}} = \frac{rdx \cdot \sqrt{2r}}{\sqrt{2r-x}} = \frac{2r^2dx}{\sqrt{rr-2rx}} = 2r \cdot \frac{rdx}{\sqrt{4rr-2xx}} = -2rdm$; dunque $-2qdu = 4rdm$, e $4rdu + 4rdm - 2qdu - 2qdm = 4rdu + 8rdm - 2qdm$, ed integrando, ſarà lo ſpazio IA*b*BMI = $4ru + 8rm + 2\int -qdm = 8CVcA + 4VcAV + 8rm - P$; la qual coſtante P ſi troverà nella ſeguente maniera. Se AY = o, lo ſpazio IA*b*BMI ſarà = o; per lo che fa di meſtieri, che la di lui eſpreſſione ſia in tal caſo = o, ed i membri 8CV*c*A, e 4V*c*AV in queſta ſuppoſizione ſpariranno: ma $8rm = 8CA \cdot ZR$ diventa = $8CA \cdot AZ = 4\overline{AZ}^2$; dunque P = $4\overline{AZ}^2$; e perciò ſarà IA*b*BMI = 8CV*c*A + 4V*c*AV + 4AZ . ZV − 4 . $\overline{AZ}^2$.

Che

Che se supponiamo cadere il punto V in Z ritroveremo tutto lo spazio IABDMI = a dodici semicircoli AcVZ — quattro quadrati del diametro AZ; e per conseguenza lo spazio DMIE = ad undici semicircoli AcVZ — quattro quadrati del Diametro AZ; il che ec.

Venezia li 21. *Marzo* 1710.

Si seguita a trattare con differente metodo della quadratura della Post-evoluta della Cicloide.

LEMMA PRIMO.

Sia il quadrante di circolo ACB (Fig. 20.), e sopra il raggio AC intendasi descritto il semicircolo ADC. Esca dal punto A qualsisia corda AD, e condotta dal punto D la tangente DK, la quale concorrerà necessariamente con la linea AK perpendicolare alla corda AD, si tirino le due rette DM, DC: dico, che le tre linee CD, DA AK sono proporzionali.

L'angolo KDM per la proprietà della tangente è retto, come altresì è retto l'angolo ADC nel semicircolo; dunque se dall' uno, e dall' altro si sottrerrà l angolo comune ADM, sarà l'angolo KDA uguale all' angolo MDC, ovvero all'angolo MCD, stante l' uguaglianza delle due rette MD, MC. Saranno pertanto simili li triangoli KDA, ACD, mentre oltre gl'angoli uguali KDA, ACD, anco gli angoli KAD, ADC retti; dunque come CD a DA; così DA ad AK: il che ec.

COROLLARIO.

Quindi sia AI = a, DI = x, che sarà la corda della nuova curva, che abbiamo ad esaminare, DA = $a-x$, DC = $\sqrt{2ax-x^2}$; il valore della suttangente AK espresso per x si scoprirà = $\frac{a^2-2ax+x^2}{\sqrt{2ax-x^2}}$.

LEMMA SECONDO.

Supposta la preparazione dell' antecedente Lemma, alla retta DI intercetta fra le due circonferenze del quadrante, e del semicircolo pongasi eguale l' AG, e per il punto G, ed altri infiniti trovati nella stessa maniera passi la curva BGA, questa sarà la linea, che deve presentemente considerarsi.

Sia proposto da qualsivoglia punto G tirar la tangente GO. La linea KAO sia perpendicolare alla corda ADG, e la retta DK tocchi il semicircolo nel punto D. Prendasi la seconda corda ALF infinitamente prossima alla prima corda ADG, e dal centro A si descrivano li minimi archi DE, GH. Chiamo la costante AI $=a$, l'indeterminata AG $=x$ la sua differenza FH $=dx$, l'altra indeterminata AD per l'ipotesi $=a-x$, la sua differenza EL $=-dx$, la suttangente del semicircolo data, cioè AK $=s$, la cercata AO $=t$.

Già che sono simili li triangoli LED, DAK;

$$DA : AK :: LE : ED$$

$$a-x : s :: -dx : \frac{-sdx}{a-x}$$

Di più per la similitudine de' triangoli, o settori ADE, AGH

$$AD : AG :: DE : GH$$

$$a-x : x :: \frac{-sdx}{a-x} : \frac{sxdx}{a^2-2ax+x^2}.$$

Finalmente per esser simili li due triangoli FHG, GAO

$$FH : HG :: GA : AO$$

$$dx : \frac{-sxdx}{a^2-2ax+x^2} :: x : t,$$

e ridotta l'equazione, $t = \frac{-sx^2}{a^2-2ax+x^2}$

Il segno negativo preposto alla quantità $\frac{-sx^2}{a-x^2}$ indica, che la suttangente AO deve prendersi dalla parte opposta della suttangente semicircolare AK.

LEMMA TERZO.

Sia qualsivoglia curva AGB, ch'abbia relazione al punto A, la di cui suttangente presa nella perpendicolare alla corda AG sia AO. Fatto centro in A, descrivasi l'arco GR, ed al punto R pongasi la perpendicolare RP uguale alla suttangente AO, e s'intenda descritta la curva APSU, la quale passi per il punto P, e per altri punti determinati nella stessa maniera; dico, che lo spazio ABV è duplo dello spazio AGB.

Intendasi condotta un altra corda AF infinitamente vicina alla corda AG, e dal centro A descritto l'arco FT; l'applicata TS sia uguale alla

la ſuttangente corriſpondente al punto F, e finalmente ſi tiri la linea PQ parallela all'aſſe. Il triangolo FHG è ſimile al triangolo GAO; dunque

$$FH = TR : HG :: GA : AO = RP;$$

dunque il rettangolo TP è uguale al rettangolo AGH, cioè doppio del triangolo rettangolo AGH: ma il rettangolo TP è l'elemento dello ſpazio ABV, e il triangolo AGH è l'elemento dello ſpazio AGB; dunque lo ſpazio ABV è doppio dello ſpazio AGB: il che ec.

Propoſizione Prima.

Sia la curva AGB quella ſteſſa, che fù deſcritta nel ſecondo Lemma, e ſuppoſta la coſtituzione del Lemma precedente, abbia ad indagarſi l'equazione locale della curva APV. L'appliçata RP s'appelli y, l'abſciſſa $AR = AG$ x, e per lo ſteſſo Lemma ſecondo la ſuttangente $AO = RP$ ſarà $\frac{sx^2}{\sqrt{a^2-2ax+x^2}} = y$, cioè $sx^2 = \sqrt{a^2-2ax+x^2} \cdot y$.

In luogo di s ſi collochi il ſuo valore eſpreſſo per x conforme il Corollario del primo Lemma, cioè $\frac{a^2-2ax+x^2}{\sqrt{2ax-x^2}}$; dunque

$\frac{\sqrt{a^2-2ax+x^2} \cdot x^2}{\sqrt{2ax-x^2}} = \sqrt{a^2-2ax+x^2} \cdot y$, e diviſo l'uno, e l'altro membro per $a^2-2ax+x^2$, s'avrà la ſeguente equazione

$\frac{x^2}{\sqrt{2ax-x^2}} = y$: il che ec.

COROLLARIO.

Dall'equazione locale $\frac{x^2}{\sqrt{2ax-x^2}} = y$, ovvero $\frac{x^3}{2a-x} = y^2$ ſi raccoglie la linea APV eſſere la ciſſoide di Diocle deſcritta in un quadrante di circolo, eſſendo uguali le linee AB, BV.

La quadratura poi della ciſſoide dipendente da quella del circolo, eſſendo notiſſima, ſtimo ſuperfluo l'inveſtigarla.

SCOLIO.

La curva AGB (Fig.21.) descritta nel quadrante ACB può estendersi fuori del quadrante; imperocchè compiuti li circoli CBLM, e CDAE, nell'altro semicircolo CEA s'applichi la corda arbitraria AE, la quale prolungata tagli la circonferenza maggiore in K, di poi prendasi la retta AH eguale ad EK intercetta tra le periferie del circolo maggiore, e minore; ed il punto H con altri similmente trovati sia alla curva BHF; sarà questa la continuazione della curva AGB. Chiamata dunque AH x conforme il consueto, la corda AE sarà $x-a$, mentre era prima $a-x$.

Questa mutazione non varia in conto alcuno il valore della suttangente, come si può vedere dal calcolo, e per conseguenza la suttangente sarà sempre $= \frac{x^2}{\sqrt{2ax-x^2}}$.

Presa pertanto AQ=BM, e descritto il semicircolo ANQ diviso in due quadranti BNA, BNQ, se nel quadrante BNA si formerà la cissoide AON; lo spazio cissoidale ABN sarà doppio dello spazio AGB, come si è dimostrato. Prolunghisi la cissoide in P, di modo che l'intiera cissoide ANP sia quella, che appartiene al semicircolo, è manifesto, che lo spazio cissoidale infinito AQRPNA è doppio del curvilineo AGBHF. E perchè lo spazio intiero cissoidale è triplo del semicircolo ANQ, ne segue, che il curvilineo AGBHF sarà triplo del quadrante BNA. La curva AGBHF si nomini concoide circolare, già che ha qualche similitudine con la concoide di Nicomede, se supporremo, che la retta, assintoto della concoide, si tramuti in una circonferenza di cerchio.

Proposizione Seconda.

Sia lo spazio curvilineo IPXO (Fig. 22.) diviso in minimi trapezj di base uguale LR, MT ec., e concepiscansi le parti della curva, cioè RP, TR ec., ed i loro seni PQ, RS ec. flessibili a guisa d'un filo; potrà dunque, stando rigide l'applicate LP, MR, il trapezio LMRP cangiarsi nel trilineo AGF, se supporremo, che li punti L, ed M s'uniscano in un sol punto. Che se ciò si praticherà in ogni trapezio, di modo che tutti li punti della divisione dell'asse si congiungano in un punto, nascerà la nuova curva AGB ed il punto A rappresenterà il concorso di tutti li punti I, L, M, N, O. Giacomo Gregorio chiama la figura AGB involuta, ed evoluta la figura IXO, delle quali si verificano le seguenti proprietà.

1. Tramutandosi il rettangolo minimo LQ nel settore di circolo AGH, ed essendo l'angolo AGH retto, e la linea AG per l'ipotesi uguale ad LP; il rettangolo LQ sarà doppio del settore AGH; e perchè

chè ciò ſi verifica di tutti gli altri rettangoli, e ſettori; ne ſegue, che lo ſpazio IXO ſarà in proporzione dupla allo ſpazio AGB.

2. Per la coſtruzione la minima curva PR è uguale alla minima curva FG; dunque le due curve IPX, AGB ſaranno uguali.

3. Il triangolo GHF è ſimile, ed uguale al triangolo PQR; imperocchè queſti triangoli anno tutti i lati corriſpondenti eguali, e retti li due angoli alli punti Q, H: onde fatto l'angolo GAK retto, e tirate dalli due punti analoghi G, P le tangenti GK, PZ, ſaranno tra loro ſimili li due triangoli GAK, PLZ: ma la linea GA è uguale alla PL; dunque anche le due ſuttangenti AK, LZ ſaranno uguali.

Suppoſto tutto ciò, ſia la noſtra curva AGB, la quale ſi conſideri come involuta, e ſi cerchi la natura della ſua evoluta IPX. Chiamata al ſolito la corda AG x la ſuttangente AK ſarà $= \frac{x^2}{\sqrt{2ax-x^2}}$. Egli è dunque evidente per le premeſſe, che dobbiamo trovare una curva, ch'abbia relazione al ſuo aſſe, nella quale poſta l'applicata LP$=x$, la ſuttangente LZ ſia ſempre $= \frac{x^2}{\sqrt{2ax-x^2}}$

Sia per tanto LP$=x$; QR$=dx$; IL$=y$ PQ$=dy$; dunque

$$RQ : QP :: PL : LZ$$
$$dx : dy :: x : \frac{x^2}{\sqrt{2ax-x^2}},$$

cioè a dire mutata l'analogia in equazione, $dy = \frac{xdx}{\sqrt{2ax-x^2}}$, la qual' equazione differenziale è coſtitutiva della cicloide, come dimoſtra il Sig. Gio: Bernoulli negli atti di Lipſia al Meſe di Maggio dell'anno 1697., ed il ſemidiametro del circolo generatore è uguale alla linea AB.

Ora ſia deſcritta l'intiera concoide circolare AGBHF (Fig. 21.) l'area della ſemicicloide, il di cui ſemicircolo generatore è BCM, ſarà dupla dello ſpazio AGBHF, ed il perimetro della ſteſſa ſemicicloide ſarà eguale alla curva AGBHF, ed in conſeguenza il curvilineo AGBHF ſarà triplo del quadrante BAC, come ſi è trovato di ſopra, ed il perimetro della noſtra curva ſarà doppio della ſua baſe AF.

Che ſe poi ſi deſideraſſe la miſura dello ſpazio AGB, concepiſcaſi (Fig. 23.) deſcritta la ſoprannominata cicloide QFI, e dal punto B centro del ſemicircolo generatore ſi tiri l'ordinata BF, e dal punto F cada la linea FD perpendicolare alla baſe; il trilineo cicloidale IDF ſa-

ſarà doppio dello ſpazio AGB, e la curva IF uguale alla curva AGB.

S C O L I O.

Queſto ſecondo modo di miſurare lo ſpazio compreſo dalla noſtra curva s' accorda perfettamente con il primo. Nella ſemicicloide QFI ſi prenda ad arbitrio il punto H, dal quale tirate l'ordinata HR, l'abſciſſa HS, e la tangente HK, prendaſi la normale RO uguale alla ſuttangente SK, ed il punto O con altri infiniti nello ſteſſo modo determinati ſia ad una nuova curva ANOP; dico, che queſta ſarà la ciſſoide: imperocchè poſta $SH = AR = x$, per la natura della cicloide la ſuttangente SK ſarà $= \frac{x^a}{\sqrt{2ax-x^2}}$; ma per la coſtruzione $SK = RO$; dunque

$RO = \frac{x^a}{\sqrt{2ax-x^2}} = y$, la qual equazione appartiene alla ciſſoide;

Quindi ſi deduce per il metodo delle tangenti di Barovv, che lo ſpazio ciſſoidale ABN inſcritto nel quadrante ſarà uguale al trilineo DFI, e l' area dell' intiera ciſſoide ſarà uguale all'area della ſemicicloide, cioè tripla l'una, e l' altra del comune ſemicircolo generatore ANQ.

Propoſizione Terza.

Data qualſivoglia curva ABD (Fig. 19.), la di cui evoluta ſia AHF, e la poſt-evoluta DMI, prendo ad arbitrio il punto B, e tiro la tangente GBM, queſta ſarà ſempre coſtante, ed eguale alla curva ABD. Dal centro A deſcrivaſi il ſettore del circolo AI*a*, il di cui ſemidiametro AI ſia uguale alla tangente GM, e l'angolo *a*AI eguale all'angolo DEI formato dall' incontro delle due rette AE, DE, che toccano la curva ne' punti eſtremi A, D. Dimoſtra il Sig. Giovanni Bernoulli negli atti di Lipſia dell'anno 1695. al meſe d'Agoſto, che l'arco IN*a* è uguale alle due curve AHF, DMI, cioè alla ſomma de' perimetri dell'evoluta, e della poſt evoluta.

Io m'inoltro di vantaggio, e trasferiſco la ſpeculazione da' perimetri all'aree. Prendo il punto *g* infinitamente proſſimo al punto B, e tiro la ſeconda tangente H*g*L, di poi dal punto A centro del ſettore intendanſi condotti i due ſemidiametri AN, AO paralleli alle due tangenti GM, HL. Si faccia AP = BG, ed AQ = *g*H, e per li punti P, Q ed altri ſimilmente ritrovati paſſi la curva APQ*a*. Dico, che l'area APQ*a* è uguale al miſtilineo compreſo dalle due curve ABD, AGF, e dalla retta DF.

L'angolo PAQ ſi è fatto uguale all'angolo G*g*H, e le linee AP, AQ uguali alle tangenti BG, *g*H, giacchè per la diſtanza infinitamente

pic-

piccola il punto *g* cade ſopra il punto B; dunque il triangolo GBH è uguale al triangolo PAQ: ma il triangolo GBH è l'elemento dello ſpazio ABDEFGA, ed il triangolo PAQ è l'elemento della figura APQ*a*; dunque queſti curvilinei ſaranno tra loro uguali: il che ec. Di più perchè AN = GM, ed AP = BG; dunque PN = BM, e per la ſteſſa ragione *Qo* = *g*L. Facciaſi AR = PN, ed A*r* = *Qo*, e li punti R, *r* con altri infiniti ſiano ad una nuova curva A*r* RI: dico, che lo ſpazio A*r*RI è uguale al curvilineo compreſo dalla curva ABD, dalla ſua poſt-evoluta DMI, e dalla tangente AI. La dimoſtrazione è evidente, mentre il triangolo elementare RA*r* è ſempre uguale al triangolo L*g*M: il che ec.

SCOLIO.

Suppongo in ordine al Problema propoſto, che la curva ABD ſia una cicloide, il di cui ſemicircolo generatore ſia AVZ. L'angolo DEI ſarà retto, e per conſeguenza l'arco IN*a* uguale all'evoluta, ed alla poſt-evoluta inſieme, ſarà un quadrante, ed il raggio A*a* uguale al perimetro della cicloide ſarà doppio della linea AZ, diametro del ſemicircolo generatore. La curva poi evoluta AGF, la quale è una cicloide, è uguale al raggio A*a*; dunque il perimetro della poſt-evoluta DLI ſarà uguale al quadrante IN*a* meno il raggio A*a*.

L'area della poſt-evoluta DEI + il complemento della cicloide ABDE = al ſemicircolo generatore AVZ è, come ſi è detto, uguale all'area A*r*RI; onde ſuppoſto, che la curva A*r*RI ſia la medeſima, che abbiamo conſiderata nelle propoſizioni antecedenti, come dimoſtreremo, è manifeſto eſſer nota l'area dello ſpazio DEI.

Acciò dunque ſia manifeſto, che la curva A*r*RI è la porzione della concoide circolare incluſa nel quadrante, deve dimoſtrarſi, che la curva APQ*a* è un ſemicircolo.

Perchè la corda AP, la quale taglia il ſemicircolo generatore della cicloide nel punto V è parallela alla tangente BG; dunque per la natura della cicloide, e della ſua evoluta, la tangente BG ſarà doppia della corda AV: ma PA è uguale a BG per la coſtruzione: dunque PA ſarà doppia di AV: ma il diametro *a*A è doppio del diametro ZA; dunque

AZ : A*a* : : AV : AP. ovvero

AZ : AV : : A*a* : AP;

dunque il punto P è al ſemicircolo: il che ec.

Già che dunque la quadratura della poſt-evoluta della cicloide dipende dalla miſura del curvilineo A*r*RI; è manifeſto, che la quadratura della poſt-evoluta non può averſi ſe non ſuppoſta la quadratura della cicloide, e per conſeguenza quella del circolo.

SCHE-

SCHEDIASMA X. (*)

Della connessione, che passa tra la costruzione dell' equazioni Analitiche, e la quadratura d' infinite curve Algebraiche.

DUe sorti di curve Algebraiche possono distinguersi, avuto riflesso alla loro equazione locale. In alcune le coordinate x, ed y sono talmente separate, e distinte, che tutti i termini, che formano l'equazione, devono chiamarsi semplici, cioè a dire, non si dà alcun membro nell'equazione costitutiva della curva, in cui si trovi l' una, e l'altra delle indeterminate. Altre poi sono composte di termini misti, ne' quali l'indeterminate in tal maniera si legano, ch'una si multiplica per qualche potenza dell'altra, e riesce spesse volte difficile il separarle. Le sezioni del cono ce ne somministrano l'esempio; imperocchè se si proporrà l'equazione $ax + x^2 = y^2$, la quale è all'iperbola, tutti i termini sono semplici, mentre esaminandoli ad uno, ad' uno si scopre, che dove si trova l'indeterminata x, non ha luogo l'altra indeterminata y. All' opposto nell'equazione $a^2 = ay + xy$, che pure appartiene all' iperbola fra li suoi assintoti, l'ultimo membro è misto, già che in esso s' incontrano ambe l' indeterminate x, ed y insieme multiplicate, di maniera che sene forma il loro rettangolo. La medesima considerazione si può applicare alle curve di grado più elevato.

Le curve del primo genere, come che servono con la lor quadratura per sommare l'equazioni differenziali, nelle quali è riuscito di separar l'indeterminate; così sono state attentamente considerate da' Promotori del Metodo Leibniziano. Si è tentato di quadrarle, o almeno di ridurle ad una quadratura più semplice, specialmente con l' uso dei logaritmi veri, ed immaginarj; sopra di che vi sono frà l'altre l'acutissime osservazioni del Signor Giovanni Bernoulli negli Atti di Lipsia dell'anno 1703.

Poco, o nulla è stato scritto intorno le curve del secondo genere, se non in quanto anno procurato i Geometri di quadrarle col mezzo di qualche serie, o pure di trasformarle in curve del primo genere col separare l'indeterminate, nel che per il più s' incontra una somma difficoltà.

Con l'occasione, che mi fu proposto un Problema da sciogliere, mi sono fatto a contemplare più da vicino la natura di queste curve, e finalmente ho scoperto, che vi è una gran connessione tra la loro quadratura, ed il trovare in termini Algebraici la radice d'una data equazione Analitica, e perchè già si sa, che l' equazioni Analitiche sono di va-

* *Questo Schediasma è stato composto l'anno* 1710., *come consta da una lettera* 21. *Marzo* 1710. *del Sig. Bernardino Zendrini all' Autore.*

varie ſorti, cioè alcune ſemplici, altre del ſecondo grado, o quadratiche, altre del terzo, o cubiche, e così in infinito; tutte queſte anno il loro uſo, e ſervono a miſurare infiniti curvilinei.

Io non pretendo, che queſto metodo ſia univerſale, perchè ciò ſarebbe un preſumer troppo; ſolo ne porterò alcuni eſempj, che daranno qualche lume alla preſente materia.

Principierò dunque dall'equazioni ſemplici.

Siano p, e q in qualſiſia modo date per x, e propongaſi l'equazione $p+qy=y$, in cui l'applicata y non ſuperi la prima dimenſione, mentre l'abſciſſa x aſcende a maggiori dignità.

Suppoſto $p+qy=y$, ſarà anche $p=y-qy$, cioè $\frac{p}{a-q}=y$. La ſpezie a indicherà in appreſſo ſempre l'unità. In luogo dell'ultimo membro dell'equazione, nel quale ſi trova la ſola indeterminata y, ſoſtituiſcaſi il ſuo valore $\frac{p}{a-q}$, e l'equazione premeſſa ſi traſformerà nella ſeguente $\frac{p}{a-q}=p+qy$, ovvero $\frac{p}{q-q^2}-\frac{p}{q}y$. Fingaſi y uguale alla differenza d'altre due indeterminate r, ed s; dunque $\frac{p}{q-q^2}-\frac{p}{q}=r-s$, e per conſeguenza ſuppoſta l'uguaglianza frà li termini corriſpondenti, il che è arbitrario, avremo due equazioni locali a due nuove curve, cioè $\frac{p}{q-q^2}=r$, e $\frac{p}{q}=s$.

Quello che ſi poſſa dedurre da queſta formula generale, non può eſſer ignoto agli Analiſti, con tutto ciò eccone un'eſempio particolare.

Sia $q=x$, $p=x^m$, e la lettera m eſprima un numero poſitivo, ed intiero. L'equazione locale della curva, di cui ſi deſidera la quadratura ſarà $x^m+xy=y$, la quale per la premeſſa operazione è ſtata ridotta alla quadratura delle due curve $\frac{p}{q-q^2}=r$, e $\frac{p}{q}=s$.

In luogo di p, e q s'intenda ſoſtituito il loro valore eſpreſſo per x, e le predette due curve ſi cambieranno nelle ſeguenti

$\frac{x^{m-1}}{a-x}=r$, ed $x^{m-1}=s$.

La ſeconda equazione $x^{m-1} = s$. è conſtitutiva d'una delle infinite parabole. La prima poi $\frac{x^{m-1}}{a-x} = r$, o pure $x^{m-1} + xr = r$ non è diverſa dall'equazione della curva propoſta da principio, ſe non in queſto, che la dignità di x ſi è abbaſſata d'un grado.

Sia di vantaggio $x^{m-1} = p$, ed $x = q$; dunque s'avrà l'equazione di prima $p + qr = r$, la quale trattata con la ſteſſa maniera ſi riſolverà in altre due curve $\frac{p}{q-q^2} = y$, e $\frac{p}{q} = z$, cioè ſoſtituiti i valori di p, e q, $x^{m-2} = z$ ad una dell'infinite parabole, ed $\frac{x^{m-2}}{a-x} = y$, ovvero $x^{m-2} + xy = y$, la qual equazione, ſe ſi metterà al confronto della prima equazione propoſta $x^m + xy = y$, non vi ſi ſcoprirà altra differenza, fuori che la poteſtà di x è due gradi più depreſſa.

Si continui lo ſteſſo modo d'operare, fin a tanto che la poteſtà di x ſi tolga affatto di mezzo, e ſi tramuti in una coſtante, ed allora avremo l'equazione $a + xy = y$, la qual, com'è noto, appartiene all'iperbola Apolloniana deſcritta frà li ſuoi aſſintoti.

Dall'Analiſi ſe ne cava il ſeguente canone generale. Prendaſi una ſerie d'infinite parabole principiando dal rettangolo, gli eſponenti delle quali vadano creſcendo conforme la ſerie naturale dei numeri, per eſempio, $a = z$, $x = z$, $x^2 = z$, $x^3 = z$, e così in infinito, e raccolte in una ſomma l'aree di tutte queſte infinite parabole, alle quali s'aggiunga l'area dell'iperbola poco avanti mentovata, avremo la miſura dell'area dell'infinite curve $x^m + xy = y$, avuto riguardo, che l'eſponente m ſuperi d'una ſola unità l'eſponente dell'ultima parabola.

Sia la curva $x^4 + xy = y$. All'area dell'iperbola di ſopra eſpreſſa aggiungo l'area del rettangolo, del triangolo, e delle due parabole quadratica, e cubica, nella quale mi fermo, ſtante che il ſuo eſponente 3 è minore d'una ſola unità del numero quattro, ch'è l'eſponente nella noſtra curva. Dico, che l'aggregato di tutte queſt'aree è preciſamente uguale all'area della curva propoſta.

Che ſe poi col noſtro metodo ſi proſeguirà nell'analiſi, di maniera che la poteſtà di x^m non ſolo ſi cambi in una coſtante, ma in oltre di poſitiva diventi negativa; ſi ſcoprirà la quadratura dell'infinite curve eſpreſſe con queſta generale equazione $\frac{a}{x^m} + xy = y$; avvertendo ſolo, che in queſto caſo la ſerie delle parabole ſi trasformerà in una ſerie d'iperbole, delle quali tutte una certa porzione dovrà eſſere ſottratta da par-

parte dell' area iperbolica $a + xy = y$, conforme richiederà la natura della curva propoſta.

Per eſempio, ſe da parte dell'area infinita $a + xy = y$ io ſottrerrò porzione limitata dell'iperbola ordinaria, la di cui equazione è $a = xz$ avrò la miſura della curva $\frac{a}{x} + xy = y$, e ſe da queſta io ſottrerrò di nuovo un ſegmento d'un'altra iperbola ſolida, la di cui equazione ſarà $a = x^2y$, avrò la quadratura della curva $\frac{a}{x^2} + xy = y$, e così in infinito.

Non mi eſtendo di vantaggio ſopra queſta materia, laſciando a' Geometri il determinare ne' caſi particolari il rimanente.

S C O L I O.

Sò beniſſimo, che la quadratura delle infinite curve $x^m + xy = y$ ſi poteva ottenere con il metodo comune, ſeparando l' indeterminata; imperocchè eſſendo $\frac{x^m}{a-x} = y$, s'io ſupporrò $a - x = z$, ſarà anche $a - z = x$; dunque la curva comparirà ſott'un' altra forma $\frac{\overline{a-z}^m}{z} = y$, ed in conſeguenza potrà miſurarſi con il metodo ordinario. S'avrà di più la miſura del ſolido, che ſi genera, fatta la rotazione della figura intorno l'aſſe, con alzare l'uno, e l'altro membro al quadrato. Contuttociò ho battuta una ſtrada diverſa, per aver a mio giudizio una ſoluzione più elegante.

Non devo tralaſciare frattanto la miſura del ſolido, che ſi genera, quando il curvilineo ſi gira intorno una linea tirata parallela alla baſe dal vertice, o quaſi vertice della figura. Sia $x^m + xy = y$, e facciaſi $y = p + q$; dunque $x^m = p$, la qual'equazione è ad una parabola. Dunque $xy = aq$. Ma xy è l'elemento del tronco analogo al predetto ſolido; dunque ſi avrà la ſua miſura, ſuppoſta la quadratura della curva, la quale è nota per le coſe dette.

Paſſo all'equazioni quadratiche, nelle quali la coordinata y ſi trova non ſolo moltiplicata per le coſtanti, ma di più elevata al quadrato.

S'intenda per eſempio data l'equazione coſtitutiva d'una curva $p + 2qy = y^2$. Le lettere p, e $2q$ eſprimono le quantità in qualſivoglia maniera date per x, e le coſtanti.

Poſta per tanto l'equazione $p + 2qy = y^2$, ſarà $p - y^2 - 2qy$, ed aggiunto all'uno, e all'altro membro dell'equazione, conforme il metodo comune degli Analiſti, il quadrato q; ſarà $p + q^2 = y^2 - 2qy + q^2$,

ed estratta la radice quadrata, $\sqrt{p+q^2} = y-q$, ovvero $\sqrt{p+q^2}+q=y$ ed alzati ambidue i membri al quadrato, $p+2q^2+2q\sqrt{p+q^2}=y^2$. Si scopre adunque chiaramente, che tanto il termine y, quanto il suo quadrato y^2 è dato per le quantità p, e q, cioè a dire per x.

Ciò fatto riassumo l'equazione proposta $p+2qy=y^2$, ed in vece di y^2 sostituisco il valore trovato, e perciò

$$p+2qy=p+2q^2+2q\sqrt{p+q^2},$$

ed espurgata l'equazione,

$$y=q+\sqrt{p+q^2}.$$

Sia la quantità $y=r+s$, dunque avrà luogo una doppia equazione $q=r$, e $\sqrt{p+q^2}=s$, o pure $p+q^2=s^2$.

Immaginiamoci ora $p=x^m$, e $2q=x^n$, e ch'essendo m, ed n numeri positivi, ed interi, sia m doppio di n. In luogo di $2q=2r$ avremo $x^n=2r$, la qual' equazione è ad una parabola, ed in vece di $p+q^2=s^2$, avremo $x^m+\frac{x^{n+n}}{4}=s^2$; e perchè m si suppone doppio di n, $x^m+\frac{x^m}{4}=\frac{5x^m}{4}=s^2$ ad un altra parabola. Tutte dunque le curve infinite espresse per la general' equazione $x^{2n}+x^n y=y^2$ sono assolutamente quadrabili.

Quando poi l'esponente m non fosse duplo di n, la soluzione dipenderà dalla quadratura d'una dell'infinite iperbole.

Sia per esempio $x+x^2y=y^2$. Questa curva si risolverà in due equazioni $x^2=2r$ alla parabola Appolloniana, ed $x+\frac{x^4}{4}=s^2$ ad una iperbola.

Non istimo proprio d'aggiunger altro, quand'anche gli esponenti fossero numeri rotti, o negativi, mentre questi casi sono tanto chiari, che non meritano d'essere spiegati.

Ripeto la formula generale $q=r$, $p+q^2=s^2$. Sia $p=x-x^2-\frac{x^4}{4}$, e $2q=x^2$. Dunque nella prima equazione $q=r$, posto in vece di q il suo valore $\frac{x^2}{2}$, avremo un'equazione alla parabola $x^2=2r$. Nella

ſeconda $p+q^2=s^2$, ſoſtituiti i valori di p, e q.

$$x-x^2-\frac{x^2}{4}+\frac{x^2}{4}=s^2, \text{ ovvero } x-x^2=s^2,$$

la qual' equazione è al circolo, e per conſeguenza la curva $x-x^2-bx^2+x^2y=y^2$, nella quale per conſervar la legge degli omogenei ſi prenderà la coſtante a quadrupla di b, dipenderà dalla quadratura della parabola, e del cerchio.

Dato frattanto qualſiſia valor di p, e q, ſe non riuſcirà di ridurre la curva a qualche quadratura nota; ſarà ſempre vero, che con queſto metodo ſi ridurrà almeno alla quadratura d' una curva, che non avrà nella ſua equazione locale termini miſti, e nella quale le differenziali ſaranno ſempre ſeparate, il che mi pare poſſa eſſere di qualche uſo nel metodo degl' infiniti.

S C O L I O.

Sia la ſoprappoſta equazione $p+2qy=y^2$, ed in luogo di y ſi collochi il ſuo valore $\sqrt{p+q^2}+q$; dunque $p+2q\sqrt{p+q^2}+2q^2=y^2$. Prendaſi $y^2=r^2+s^2+t^2$, e s' avranno le ſeguenti equazioni $p=r^2$, $2q^2=t^2$, $2q\sqrt{p+q^2}=s^2$, le quali ſervono per ritrovare la miſura del ſolido fatta la rotazione intorno l' aſſe, e ſopra d' eſſe ſi poſſono fare le medeſime rifleſſioni.

Con lo ſteſſo metodo ſi poſſono trattare le curve, nelle quali l' indeterminata y aſcende alla terza dimenſione, accompagnata da tutti, o da parte de ſuoi gradi parodici; il che ſe non ad altro ſerve a trasformare le curve in altre, nelle quali ſaranno ſeparate l' indeterminate.

Il difetto però conſiſte in queſto, che non s' è ancora ſcoperto un metodo univerſale per trovar la radice di tutte l' equazioni Analitiche, che poſſono proporſi, e che l' Algebra Carteſiana non s' inoltra all' equazioni, che ſormontano il quarto grado.

Propongo per ultimo la curva, che mi fù propoſta da quadrare, e che mi ha data occaſione di ſtendere le preſenti ſpeculazioni, nella ſoluzione del qual Problema ſi vedrà, come qualche volta ſia bene d' unir diverſe maniere, per conſeguire il fine deſiderato.

Si dimanda la quadratura della curva coſtituita dall' equazione locale $x^3-x^2y=a^2y$. nel qual caſo il valore dell' indeterminata y ſarà $=\frac{x^3}{a^2+x^2}$, e ſoſtituito queſto valore in luogo di y, avremo l' equazione

$x^3-x^2y=\frac{x^3}{a+x^2}$, e diviſi tutti i termini per x^2, $x-y=\frac{x}{a+x^2}$, o x

$-x$

$-\frac{x}{a+x^2} = y$. Pongaſi $y = s - r$, e l' equazione predetta ſi riſolverà in altre due equazioni, cioè $x = s$ al triangolo, e $\frac{x}{a+x^2} = r$, ovvero $x = r + rx^2$, o pure $\frac{a}{r} x = a + x^2$. Sia $\frac{a}{r} = 2z$; dunque $2zx - x^2 = a$. Ora queſt' ultima equazione ha due radici vere, e per conſeguenza in due forme ſi può eſprimere il valore di x, cioè

$$z \pm \sqrt{z^2 - a} = x.$$

Perchè dunque $z \pm \sqrt{z^2 - a} = x$; dunque $2z^2 \pm 2z\sqrt{z^2 - a} - a = x^2$.

Riaſſumo la ſoprapposta equazione $2zx - x^2 = a$, ovvero $2zx = a + x^2$, ed in luogo di x^2 collocato il ſuo valore, ho la ſeguente equazione

$$2zx = a + 2z^2 \pm 2z\sqrt{z^2 - a} - a,$$

ed eſpurgata l' equazione, $x = z \pm \sqrt{z^2 - a}$.

Prendo $x = \pm q + p$, e così dividendo l'equazione in due altre, la prima delle quali è $z = p$, ed in luogo di z ſoſtituito il ſuo valore $\frac{a}{2r}$, ſarà $a = 2rp$ all'iperbola Apolloniana.

La ſeconda equazione è $\sqrt{z^2 - a} = q^2$, e ſoſtituito il valore di $z^2 = \frac{a^2}{4r^2}$, avremo $\frac{a^2}{4r^2} - a = q^2$, ovvero $\frac{a^2}{4} - ar^2 = r^2 q^2$, o pure $a^2 b^2 - a^2 r^2 = r^2 q^2$.

Io non m'inoltro di vantaggio con l'analiſi, perchè ſo, che queſt' ultima equazione locale unita all'equazione coſtitutiva del quadrante del circolo compone l'equazione locale della concoide di Nicomede, la di cui quadratura dipendendo, com'è ſtato da altri dimoſtrato, da quella del quadrante, e d'un ſettore iperbolico, abbiamo ottenuto l'intento, e ridotta la curva da principio propoſta $x^3 - x^2 y = y$ alla quadratura dell' iperbola.

SCHE-

SCHEDIASMA XI.

De ſolutione æquationum Analiticarum & Problematum Geometricorum per curvas ſimpliciſſimas.

PRoblematum Geometricorum in certas veluti claſſes diſtributio, non ſolum veteribus, ſed & recentioribus neceſſaria viſa eſt Analyſtis. Antiqui Mathematici præmiſſa problematum partitione in plana, ſolida, & linearia, legem ſanxerunt, teſte Pappo Alexandrino libro quarto Math. Collect., quæ a poſteris communi ſuffragio recepta eſt, ſcilicet videri quodammodo peccatum non parvum eſſe apud Geometras, cum problema planum per conica, aut linearia invenitur, & ut ſummatim dicam cum ex improprio ſolvitur genere. In veterum methodo duo inter cætera deſiderabam. Primo evidens, atque indubitatum criterium, quo propoſitæ quæſtiones ſecerni poſſent, planæ nempe a ſolidis, & ſolidæ a linearibus. Hoc illis notum fuiſſe res in incerto eſt, licet enim de locis acutiſſimas elucubrationes ediderint, tamen ex eodem Pappo manifeſtum eſt, Archimedem in opuſculo de lineis ſpiralibus, & quod magis miror, Apollonium libro quinto Conicorum problema planum per coni ſectiones conſtruxiſſe. Diſplicet ſecundo loco vetuſtiores Geometras imperfectam problematum diviſionem tradidiſſe, namque ſub genere linearium, locos, & quæſtiones cujuſcumque gradus, & ordinis comprehenſas video, nulla adhibita diſtinctione inter ſimpliciores, & magis compoſitas, nulla ſeparatione facta Mechanicarum a Geometricis, vel, ut nunc loqui amant, traſcendentium ab Algebraicis.

His incommodis obviam ivere noſtri temporis Analyſtæ, poſtquam magnus ille Franciſcus Vieta facem prætulit, ſpecioſam Algebram Geometriæ conjungendo. Hac metodo problemata plana a ſolidis, & hæc a pluſquam ſolidis feliciter diſtinxerunt, ſed cum illa reſolvere per curvas ſimpliciſſimas, & in ſuas claſſes dirimere aggreſſi ſunt, ſcopum non attigiſſe infra clariſſime demonſtrabo.

Carolus Renaldinus vir alioquin in re Analytica exercitatiſſimus in ſuo Geometra promoto cujuſcumque problematis conſtructionem perfecit per lineas curvas ejuſdem cum problemate ordinis, & gradus. Sic æquationem ad ſeptimam dignitatem aſcendentem ſolvit per curvas ſeptimi gradus, & illius, quæ pervenit ad decimam poteſtatem, per curvas decimi gradus ſolutionem exhibuit, eadem ſervata in cæteris methodo.

Hoc

* *L'uniformità del carattere minuto, che ſi oſſerva negli originali di mano dell' Autore, e la ſimilitudine di alcune fraſi ſervono di fondamento per credere, che gli Schediaſmi XI, XII, e XIII. ſieno ſtati ſcritti in tempi poco l'uno dall'altro diſtanti. Veggа il Lettore ciò, che per noi ſi dice del tempo, in cui il C. J. ha compoſto lo Schediaſma XII.*

Hoc nihil aliud eſt, niſi Mathematicas leges evertere, & contra geometricam ſimplicitatem præſtare per plura, quod per pauciora abſolvi potuiſſet. Artificis officium eſt, non ſolum viam detegere, quæ ducat ad propoſitæ quæſtionis enodationem, ſed inſuper ſimpliciſſimam eligere, & aſſumere curvas, quantum fieri poteſt, minus compoſitas, & depreſſioris gradus ad problema conſtruendum, & demoſtrandum. Porro laudatus Auctor problemata ſolida per lineares locos, & plana per ſolidos conſtruxit. E G. radicem æquationis quadraticæ affirmative affectæ ſub latere determinavit per interſectionem lineæ rectæ cum Hyperbola, prima ſiquidem ex ſuis lineis Mediceis Hyperbole Apolloniana eſt, quam æquilateram appellant, quod illum non animadvertiſſe ſatis mirari non deſino.

Felicioribus auſpiciis rem agreſſus Renatus Carteſius, tentavit æquationes Analyticas in ordinem redigere, & problemata in ſua genera diſtribuere. Obſervavit acutiſſimus vir, æquationes, quæ latus ignotum, aut quadratum non excedunt, primum, & ſimpliciſſimum problematum genus conſtituere, quæ plana a Geometris dici conſueverunt. Similiter oriri tunc ſecundum genus problematum, ſcilicet ſolidorum, quando quantitas ignota ad tertiam, vel quartam poteſtatem aſcendit; unde perperam continuata analogia, putavit æquationes quintæ, & ſexræ poteſtatis ad tertium problematum genus pertinere; ſeptimæ, & octavæ ad quartum; nonæ, & decimæ ad quintum, & ſic in infinitum.

Hinc colligo ex mente Carteſii non variari problematum genus, quando fit tranſitus a poteſtate impari ad parem proxime majorem, ſed ſolum quando dignitas par ad imparem uno gradu altiorem aſſurgit, & numerum determinantem problematis genus ſemper duplo eſſe minorem exponente maximæ poteſtatis in æquatione contentæ, elevatæ, ſi opus fuerit, ad gradum parem.

Suſpicor etiam ex eo deceptum Carteſium, quod ſciret æquationes quadraticas ad ſimplices, & laterales reduci facili methodo, & tam veteribus, quam recentioribus familiari, quadrato-quadraticas autem ad cubicas deprimi poſſe per climacticam parapleroſin Vietæ peculiarem, quod artificium aliis verbis Carteſius enunciat; unde ratus regulam generalem eſſe, & obtinere in his caſibus, in quibus occurrunt æquationes graduum elatiorum, in ſua ſententia confirmatus eſt, legemque conſtituit duas poteſtates proximas, licet diverſi gradus, unicum tantum problematum genus componere.

Primum præjudicium ſecundo occaſionem præbuit, nam cum putaſſet Carteſius, æquationes graduum parium, in quibus una tantum ignota quantitas invenitur, ad æquationes graduum imparium proxime minorum reduci, idem omnino contingere in æquationibus localibus curvarum conſtitutivis, in quibus duæ ignotæ quantitates reperiuntur, nimis confidenter pronunciavit. Interim ex hoc forte derivavit locorum in ſuas claſſes diſtributionem, exiſtimavitque æquationes locales ad tertiam, & quartam poteſtatem aſcendentes, & curvas ex his oriundas unius, atque ejuſdem generis eſſe, quod intelligendum de æquationi-

bus,

bus, & curvis quintæ. & ſextæ; ſeptimæ, & octavæ dignitatis, & de cæteris eodem modo.

Reliquum erat, ut his jactis fundamentis unicuique problematum generi curvas proprie convenientes aptaret Carteſius, quod ita præſtitit. Cum ſuppoſuiſſet, ut ſupra admonuimus, curvas tertii, aut quarti gradus ejuſdem eſſe generis, atque ordinis; ſicuti etiam curvas quinti, & ſexti, ſeptimi, & octavi gradus &c., indifferens eſſe judicavit, quibus lineis quis utatur, dummodo ad idem genus pertineant, libertatemque Geometris conceſſit in propoſitæ quæſtionis enodatione adhibendi E. G. curvas vel cubicas, vel quadrato quadraticas. Hinc conſtructioni problematum ad quintam, & ſextam poteſtatem aſcendentium curvas tertii, aut quarti gradus deſtinavit, & ſi æquatio ad ſeptimam, vel octavam dignitatem perveniat, per curvas quinti, aut ſexti gradus, ſi ad nonam, & decimam per curvas ſeptimi aut octavi gradus ſolutionem exhibuit, & ſic uniformi in infinitum methodo, adeo ut genus curvarum conſtructioni problematis inſervientium ſit uno gradu depreſſius genere problematis.

Petrus Fermatius Analyſtarum ſui temporis facile princeps Carteſianam hypotheſim ex parte probavit, ex parte correxit. Præmiſſam tam problamatum, quam locorum in claſſes diſtributionem retinuit, ſed æquationum localium, quæ ſunt curvarum conſtitutivæ, a gradu pari ad imparem proxime minorem depreſſionem, tamquam impoſſibilem jure merito rejecit, deinde problemata cuiuſcumque generis per lineas ſimpliciores conſtruere docuit, quod nec fecerat, nec fieri poſſe exiſtimaverat Carteſius. Summa metodi, quæ apud ipſum Auctorem videri poteſt, huc redit, ut idem omnino ſit determinare curvas ſolutioni problematis congruentes, ac problema in ſuo genere conſtituere, idque obtineri poteſt, æquationem ab affectione ſub latere liberando, dehinc utrumque membrum deprimendo, alterum per ſimplicem diviſionem, alterum per radicis extractionem. Aſcendat æquatio ad ſeptimam, aut octavam poteſtatem, tum per ea, quæ ſuperius tradita ſunt, problema erit quarti generis; igitur illius conſtructionem exhibere poſſumus per interſectionem curvarum quarti gradus. Perveniat æquatio ad undecimam, vel duodecimam dimenſionem, & problema ad ſextum genus pertineat; illius ſolutionem dabimus per lineas ſexti gradus, nempe cubo-cubicas juxta Fermatium. Nec difficilis erit applicatio regulæ ad cæteras æquationes in infinitum. Verum quidem eſt, quandoque Fermatium in caſibus particularibus problematum conſtructionem tentaſſe per lineas adhuc minus compoſitas, ſpecimenque exhibuit in inventione mediarum proportionalium, ſed nec canones generales reddidit, neque ſuæ methodo innixus generales reddere poterat.

Analyſtæ omnes, quotquot in manus meas pervenerunt, qui poſt Fermatium, & Carteſium floruere, horum veſtigia ſequuti ſunt, præter clariſſimum Bernoullium, qui (a) defectus diſtributionis Carteſianæ notavit.

(a) Vide Act. Erud. An. 1696., M. Junii.

Ego vero, ut problemata tandem ſuis ſedibus reſtituantur, & geometricæ ſimplicitati conſulatur, in Carteſio, & Fermatio aliqua immutanda, aliqua corrigenda cenſeo, quod ſine diſpendio famæ tantorum virorum me executurum profiteor.

In primis dico illos imperfectam, & inſufficientem tradidiſſe problematum partitionem, nam & problemata generis ejuſdem ad diverſa genera pertinere arbitrati ſunt, & problemata diverſi generis ſub eodem genere collocarunt. Ut res clarius intelligatur, tanquam notum ſuppono problemata omnia, cujuſcumque tandem ſint gradus, & ordinis, ad unicum genus contrahenda eſſe, quando ſolvi poſſunt per curvas ejusdem gradus. Sic æquationes cubicæ, & biquadraticæ unum problematum genus conſtituunt, videlicet ſolidorum, quia per coni ſectiones explicantur. Pari jure, cum æquationes omnes, quæ ad ſeptimam, octavam, & nonam poteſtatem aſſurgunt, per curvas tertii gradus conſtrui poſſint, & debeant, ut infra conſtabit, evidens eſt problemata ab his derivata ſub unico genere comprehendi. Idem obtinet in æquationibus a decimo tertio gradu uſque ad decimum ſextum, quarum omnium conſtructio per curvas quarti gradus exhibetur. Quam congruenter igitur citati ſcriptores illas ſub diverſis generibus collocarint, aliorum eſto judicium.

Iterum ſuperius notavimus Carteſium, cui Fermatius conſenſit, æquationes nonæ, & decimæ poteſtatis ad idem genus revocaſſe, attamen mihi conſtat æquationes, quæ nonum gradum non excedunt, per curvas tertii gradus ſolutionem admittere, quod non contingit in his, quæ ad decimam poteſtatem aſcendunt. Neque reponant prædictas æquationes explicabiles eſſe per lineas ſeptimi, aut octavi gradus juxta Carteſium, vel per curvas quinti juxta Fermatium, adeoque ſub eodem genere reponendas; quis enim non videt tunc problemata ex improprio ſolvi genere? Diſtinctio generum, non a quibuſcumque curvis ſolutioni problematis inſervientibus, ſed a ſimpliciſſimis petenda eſt, adeoque problemata plana, & ſolida genere non differrent; nam extra dubitationem eſt, omnibus planis quæſtionibus per loca ſolida ſatisfieri poſſe.

Secundo loco non placet locorum linearium Carteſiana, aut Fermatiana diſtributio, & ſatis intelligere non poſſum, qua ratione moti prædicti Auctores curvas E. G. tertii, & quarti gradus ad idem genus ſpectare exiſtimaverint. Ego ſemper lineas cubicas quadrato-quadraticis ſimpliciores arbitratus ſum, neque Geometram abſolverem, qui curvas biquadraticas in ſubſidium vocaret ad quæſtionem enodandam, quæ facile per cubicas ſolvi potuiſſet; nam ſi curvæ tertii, & quarti gradus ejuſdem eſſent ordinis, ſicuti etiam curvæ quinti, & ſexti; ſeptimi, & octavi & cæt., ex vi analogiæ idem ſtatuere oporterer in lineis primi, & ſecundi gradus, & ſic problemata plana cum ſolidis turpiter confunderentur. Deinde æquatio, quæ ad ſeptimam, aut octavam dignitatem aſcendit, ſolvitur non ſolum per duas curvas tertii gradus, ſed inſuper per alias duas, quarum altera eſt quarti gradus, altera ſecundi. Si igitur curvæ tertii, & quarti gradus eſſent æque ſimplices, cum aliunde conſtet,

ſtet, lineam ſecundi gradus eſſe minus compoſitam, quam lineam tertii, ſequeretur ſecundam ſolutionem eſſe ſimpliciorem prima, quod quam verum ſit, alii viderint. Firma ergo, atque inconcuſſa regula ſit, variari locorum pluſquam ſolidorum genus ex hoc præciſe, quod varietur curvarum, vel æquationum localium gradus.

Ex dictis colligere licet, non bene a laudatis Auctoribus determinatas eſſe curvas unicuique problematum generi proprie convenientes. Proponatur æquatio aſcendens ad decimam quintam dignitatem, hanc explicaret Carteſius per curvas decimi tertii, aut decimi quarti gradus, Fermatius vero per curvas octavi, ego autem pronuncio illius ſolutionem exhiberi poſſe per curvas quarti gradus. Aſſurgat æquatio ad dimenſionem trigeſimam tertiam: hujus conſtructionem dabit Carteſius per curvas trigeſimi primi, aut trigeſimi ſecundi gradus; at Fermatii ſectator per curvas decimi ſexti; ego infra clariſſimè oſtendam datæ æquationis ſolutionem pendere a curvis ſexti gradus, quod magnum eſſe in Analyſi geometrica compendium, nemo veritatis amator poterit inficiari.

Ut datæ publicæ fidei ſatisfiat noſtram methodum explicemus.

A. 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 & cæt.
B. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 & cæt.

Exponatur ſeries A quadratorum ab unitate incipientium, quibus è regione ſcribatur altera ſeries B numerorum procedentium ordine naturali; evidens eſt numeros ſecundæ progreſſionis reſpondentes quadratis primæ, ſemper illorum quadratorum eſſe radices. Hinc quadrata in prima ſerie diſpoſita exprimunt quarumcumque æquationum exponentes, vel ſi mavis, cujuſcumque æquationis gradum; numeri autem ſecundæ ſeriei deſignant gradum curvarum idonearum ad hujuſmodi æquationes explicandas. Primum quadratum eſt unitas, cui in ſerie B etiam unitas applicatur, quod indicat æquationes primi gradus, hoc eſt ſimplices, & lateralis, ſolvi debere per lineas primi gradus, nempe rectas. Secundum quadratum eſt quatuor, cui in altera ſerie reſpondet ejus radix; nempe binarius, ex quo infertur omnes a ſecunda ad quartam, quarum exponentes ſunt 2, 3, 4, admittere conſtructionem per curvas ſecundi gradus. Tertium quadratum eſt novem, cujus radix ternarius; per curvas igitur tertii gradus omnium æquationum, quæ quartum gradum ſuperant, nonumque non excedunt, ſolutio exhiberi poteſt. Idem de aliis eſto judicium.

Quapropter quadratum utcumque ſumptum in ſuperiori progreſſione denotat maximum gradum, ad quem pervenire poteſt æquatio, ut ſolutionem recipiat per curvas, quarum gradus, & natura innoteſcit ex numero correſpondenti ſeriei inferioris, qui ſemper eſt ejuſdem quadrati latus. E. G. numerus quinque indicat, omnes æquationes, quæ vigeſimam quintam poteſtatem ab illius quadrato denominatam non tranſcendunt, quomodocumque affectantur, per curvas quinti gradus ſolvendas eſſe.

Hæc tamen prima determinatio non eſt numeris omnibus abſoluta. Diximus ſupra æquationes locales curvarum conſtitutivas eo ſimpliciores

ſe, quo ad minorem gradum aſcendunt. Sic minus compoſita cenſeri debet Problematis conſtructio, quæ fit E. G. per duas curvas, alteram ſecundi, alteram tertii gradus, quam illa, in qua utraque curva adhibita ad tertium gradum pertineret. Cum igitur definitum ſit, omnes æquationes, quarum maximi exponentes inter duo quadrata proxima continentur, explicari poſſe per curvas, quæ ſint gradus denominati a radice majoris quadrati, id intelligendum eſt cum hac limitatione, ut ſaltem una ex prædictis curvis ſit ſemper ad ſolutionem neceſſaria; cæterum alia curva in quibuſdam caſibus particularibus eſſe poteſt uno gradu depreſſior. Supereſt inquirendum, quænam ſint illæ æquationes intermediæ, quæ hujuſmodi ſolutionem admittunt. Regula generalis hæc eſt, quæ potius exemplis, quam verbis declarari poteſt.

Sumo duo quadrata proxima V. G. 9., & 16. Horum radices 3., & 4. invicem multiplicentur, & productum ſit 12. Numerus 12. denotat omnes æquationes a nona ad duodecimam dignitatem ſolvi poſſe per duas curvas, quarum prima ſit tertii gradus, ſecunda quarti. Itaque inter quæcumque quadrata, quorum radices unitate differant, collocetur numerus productus ex multiplicatione dictarum radicum, & eodem ſemper ſervato operandi modo, nova ſeries orietur, ut ſequitur.

1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, 20, 25, 30, 36, 42, 49, 56, 64, 72, 81, & cæt.

Hoc habet peculiare hæc ſeries, ut numerus quicumque medius inter duo quadrata proxima, non ſolum generetur ex radicibus dictorum quadratorum invicem multiplicatis, ſed etiam idem numerus proveniat, ſi quadrato minori ſuum latus addatur. E. G. numero quadrato 16. adde ſuam radicem 4, producitur numerus 20, qui in ſuprapoſita progreſſione medius eſt inter quadratum 16, & proxime majus 25.

Secunda ſeries jam condenda eſt, quæ primæ ex altera parte reſpondeat. Sub ſingulis quadratis ſuperioris progreſſionis, ut ſupra etiam factum eſt, colloco eorum radices, quas eo modo ſcribo, quo fractiones in Arithmetica ſcribi ſolent. E. G. numero quadrato 16 ſubjacet ſuum latus deſignatum ſequenti formula $\frac{4}{4}$. Deinde ſub numeris non quadratis primæ ſerici pono fractionem compoſitam ex duabus radicibus quadratorum proximorum, ex quarum multiplicatione admonui præfatos numeros oriri. Numero E. G. 30. reſpondet fractio $\frac{5}{6}$. Sic igitur ſtabit utraque ſeries.

1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, 20, 25, 30, 36, 42, 49, 56, 64, 72, 81; &c.

$\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{9}{9}$ &c.

Ufus harum progreſſionum talis eſt. Numeri primæ ſeriei omnium æquationum gradus poſſibiles eminenter continent; at fractiones in ſecunda ſerie diſpoſitæ determinant gradum duarum curvarum, quarum ope præfatæ æquationes explicari debent. Primus numerus in prima ſerie eſt unitas, cui ſubijcitur fractio ex unitatibus compoſita, hinc colligo æquationes ſimplices, in quibus ignota quantitas latus non excedit, facile reſolvi per lineas primi gradus, nempe rectas. Secundus numerus primæ ſeriei eſt binarius, cui in altera ſerie reſpondet fractio $\frac{1}{2}$, quod indicat, æquationes omnes quadraticas ſolutionem admittere per duas lineas, quarum prima ſit primi, ſecunda ſecundi gradus, circulus enim cum recta conjunctus omnibus his æquationibus ſatisfacit. Circuli peripheriam mediam pono inter lineas primi, & ſecundi gradus, nam ſi conſideretur ejus geneſis ſimpliciſſima in plano, profecto inter lineas primi gradus locum habet; at vero ad ſecundum gradum ſpectat, ſi ad examen revocetur æquatio localis hujus curvæ conſtitutiva, quæ ab hyperbolæ æquilateræ æquatione non differt, niſi per variam ſignorum poſitionem: unde mirum non eſt, circulum quandoque ad ſecundum gradum aſcendere eo in caſu, quo cum aliqua ex ſectionibus conicis copulatur ad problemata ſolida explicanda, quod admoniſſe operæ pretium duxi, ut omnis de medio tollatur æquivocatio.

Tertius numerus primæ progreſſionis eſt quatuor, & quartus ſex, quibus in ſecunda junguntur fractiones $\frac{2}{2}$, $\frac{2}{3}$, ex quo infertur æquationes tertiæ, & quartæ poteſtatis ſolvendas eſſe per duas curvas ſecundi gradus, quintæ vero, & ſextæ per alias duas curvas, alteram ſecundi gradus, alteram tertii. Accipiatur in ſuperiori ſerie ad libitum numerus quicumque E. G. 42. Huic ſubjacet fractio $\frac{6}{7}$; omnes igitur æquationes a trigeſimo ſexto gradu, uſque ad quadrageſimum ſecundum conſtruuntur per interſectionem curvarum ſexti, & ſeptimi gradus. Exempla non multiplico, nam ex dictis intelligitur modus operationis in aliis caſibus.

Inde emanat pulcherrimi problematis reſolutio, videlicet. Data quacumque æquatione, reperire curvas ſimpliciſſimas propoſitæ æquationi conſtructioni inſervientes. Huic problemati per ſequentem regulam generalem fit ſatis. Conſideretur exponens dignitatis altioris, quæ in æquatione continetur. Si exponens reperiatur inter numeros primæ ſeriei, tum fractio correſpondens ſumpta in ſecunda ſerie determinat gradum duarum curvarum, per quarum combinationem ſimpliciſſime æquatio explicatur. At ſi dictus exponens non inveniatur inter numeros ſuperioris progreſſionis, accipiatur in ſerie numerus proxime major, & eodem modo fractio progreſſionis ſecundæ deſignat, ad quos gradus curvæ aſcendere debeant, ut per illas ſimpliciſſime conſtruatur æquatio. Sit loco exempli

pli propoſita æquatio ſequens $x^{34} + a^{31}x^{31} = a^{33}b$. Exponens maximæ poteſtatis in hoc caſu eſt numerus 34, quem conſtat in prima ſerie non reperiri. Sumatur itaque numerus proxime major, hoc eſt 36, cui convenit fractio $\frac{6}{6}$, ex quo colligo ad dictam æquationem explicandam curvas ſexti gradus, ſeu cubico-cubicas ſufficere.

Hujus methodi demonſtrationem innuere non erit abs re, ut quæ ſupra tradita ſunt, confirmentur, & illuſtrentur. Theorema eſt omnium Analyſtarum calculis, & demonſtrationibus comprobatum, quamcumque æquationem tot habere radices partim veras, aut reales, partim falſas, aut immaginarias, quot continet dimenſiones maxima poteſtas ignota in æquatione contenta. Hinc ſi æquatio ad vigeſimum quintum gradum E.G. aſſurgat, viginti quinque radices determinandæ ſunt, quæ omnes ſi veræ ſint, ut in aliquibus caſibus accidit, omnes propoſitæ æquationi ſatisfaciunt. Ad hoc ut ergo æquationes conſtruantur, duas curvas eligere oportet, quæ in totidem punctis ſe interſecent, aut ſaltem ſe interſecare poſſint, quot radices habet, vel dimenſiones æquatio, nam ſicuti in unica æquatione plures radices comprehenduntur, ita illas invenire debemus unica conſtructione.

Jam ex altera parte certum eſt, & univerſaliter ex methodo Leibnitiana deducitur, curvam curvæ tot in punctis occurrere poſſe, ſive ſecando, ſve tangendo, quot continet unitates numerus ille, qui oritur ex multiplicatione exponentium dictarum curvarum. E.G. duæ curvæ tertii gradus, quamcumque ſortiantur poſitionem, ſibi occurrere nequeunt in pluribus punctis, quam novem, qui numerus innoteſcit, ſi gradus primæ curvæ ducatur in gradum ſecundæ. Ut res clarius percipiatur, ſit æquatio ſimplex, ſeu unius dimenſionis; hæc unicam habet radicem, quæ facile determinatur per duarum rectarum interſectionem; recta enim rectam non niſi in puncto ſecat. Æquationes vero quadraticæ vel duarum dimenſionum geminam ſortiuntur radicem, adeoque explicantur per interſectionem duorum circulorum, vel circuli cum linea recta, quæ fit in duobus punctis, & duplex æquationis latus deſignat. Rurſus coni ſectiones, cum in pluribus punctis, quam quatuor occurrere non poſſint, neceſſario adhibentur ad conſtruendas æquationes tertii, aut quarti gradus. Quod ſi æquatio ad quintam, aut ſextam dimenſionem aſcendat, tunc aſſumendæ ſunt curvæ, altera ſecundi, altera tertii gradus, quæ juxta varias poſitiones in unico, duobus, tribus, quatuor, quinque, & ſex punctis ad ſummum ſe interſecare poſſunt, & ſic omnes æquationis radices, ſi conditio problematis poſtulet, exhibere.

Ulterius, cum duarum curvarum tertii gradus interſectio in novem punctis, & duarum quarti gradus in ſexdecim punctis, & non ultra fieri poſſit, ſatis patet, ad quas æquationes explicandas hujuſmodi linearum combinatio ſit idonea. Tandem E. G. curva ſeptimi gradus comparetur cum curva octavi, ſi invicem multiplicentur dictarum curvarum exponentes, prodit numerus 56, ex quo infero has curvas inutiles eſſe

ad

ad conſtruendas æquationes, quæ quinquageſimum ſextum gradum ſuperant; omnes enim illarum radices determinare non poſſunt, cum hæ lineæ occurrere ſibi non poſſint in pluribus punctis, quam quinquaginta ſex, adeoque in hoc caſu ad lineas magis compoſitas recurrere debemus; & inſuper his uti non oportere, in explicatione æquationum, quæ quadrageſimum nonum gradum non excedunt; nam iſtarum determinationem aſſequi poſſumus per lineas ſimpliciores, nempe per duas curvas ſeptimi gradus.

Hanc regulam quoque obtinere in omnibus caſibus ex hoc fit manifeſtum, nam alioquin problema cujuſcumque generis reduci poſſet ad genera depreſſiora, & ſic ſolidum per lineas planas, & pluſquam ſolidum per ſolidas conſtruere liceret, quod omnino impoſſibile eſt.

Hucuſque demonſtrata cum his, quæ ſuperius tradita ſunt, apertiſſime congruere manifeſtum puto, ex quo apparet mirabilis veritatum mathematicarum nexus, & dependentia.

SCHEDIASMA XII.

De modo conſtruendi non ineleganter Problemata pluſquam ſolida.

COmmunis Mathematicorum ſententia eſt, Antiquorum analyſim, magnum quondam Geometriæ arcanum, nunc inter artes inutiles reponendam, poſtquam nova methodus innotuit, cujus inventor Vieta, promotor Carteſius. Nihil profecto excogitari potuit commodius, quam Algebræ ſpecioſæ ad res Geometricas applicatio, ſatis enim ſe ſua commendat univerſalitate, hujuſque præſidio certa ratione obtinere datum eſt, quod Veteres methodo quidem duce, ſed comite plerumque, aut induſtria, aut fortuna, aſſequuti ſunt.

Interim ſi veritati locus eſſe poteſt, confidenter pronuncio, noſtrum reſolvendi modum vitio non carere, & magna adhuc obſcuritate laborare, adeo ut nova methodus in his ſæpius deficiat, in quibus antiqua excellit, & ſi quis utramque conjungere poſſet, & ex duplici unicam efficere, is omne tuliſſe punctum mihi videretur. Aliud eſt Problema ſolvere quocumque modo, aliud elegantiſſima ratione id ipſum procurare, & ea perſpicuitate, & nitore, qui Geometram deceat, hoc eſt breviſſima analyſi adhibita, & ſyntheſi non operoſa, quod in Veteribus admi-

(*) *Una figura relativa a queſto Schediaſma delineata ſopra una lettera ſcritta nell'anno 1705 ſerve di fondamento alla congbiettura, che il noſtro Autore in quel tempo lo componeſſe. In certe aggiunte poſteriori ſi legge:* vel aliter juxta ea quæ tradidit nuper in Opere poſthumo Marchio Hoſpitalius. *Uſcì in Parigi l'opera poſtuma del Marcheſe dell'. Oſpitale, cioè a dire il Trattato delle ſezioni Coniche, l'anno 1707.*

admiror, in Neothericis desidero. Non solum inventum Vietæum minus concinnam suppeditat Problematum constructionem, ut ab illustri Leibnitio observatum est, sed etiam ex modo, quo procedit, necessario derivatur perplexa resolutio, & difficilis compositio.

In primis totius novæ analyseos progressum turbant quantitates ad instar fractionum expressæ, magnitudines irrationales, ascensus ad dimensiones plusquam solidas, quibus incommodis, cum vetus resolvendi ratio non subjaceat, hanc vere Geometricam dixerim, nostram potius Arithmeticæ, quam Geometriæ legibus conformem.

2. Quando ad æqualitatem ventum est, quot expurgationes, & terminorum transpositiones, quot specierum metamorphoses instituí debent, ut ad simplicissimam formam revocetur æquatio? Facta reductione Geometrica effectio aptatur potius inventæ æquationi, quam Problemati proposito, & cum in quolibet genere Problemata sint infinita, æquationum vero numerus determinatus, constructio minus naturalis evadit; semper enim eodem modo solvitur Quæstio E. G. omnia Problemata solida explicantur per intersectionem parabolæ cum circulo juxta Cartesium, vel circuli cum ellipsi juxta Slusium, aut per duas hyperbolas Heuratii, vel per duas parabolas Bakeri, & tamen in casu particulari quandoque Problematis conditio postulat, ut diversa utamur linearum solidarum combinatione; ex hac enim elegantissima profluit solutio, quam ab aliorum methodo sperare non licet. Veteres, teste Pappo Alexandrino, magnam collegerunt supellectilem locorum tum planorum, tum solidorum, quos resolutos vocabant, & quos satis appositè adhibebant ad enodandas quæstiones, varietate locorum respondente varietati Problematum. Hinc cum resolutivus progressus duceret ad locos jam resolutos, vel saltem viam sterneret ad venanda nova loca constructioni inservientia, mirum non est hoc artificio obtineri solutionem magis naturalem, & cujusvis Problematis genio accommodatam.

3. Postquam ad mentem Recentiorum Problema constructum est, vix dimidium operis confecimus; supereſt enim ut vestigia analyseos relegendo, eruamus Geometricam demonstrationem. At dum tentamus Algebraicæ resolutioni aptare compositionem verè Geometricam, in tot difficultates incidimus, ut melius plerumque sit novam cudere demonstrationem, quam prosequi insinuatam ab analysi. In Antiquorum methodo istæ perplexitates non occurrunt; sponte si quidem, ut ita loquar, analysim sequitur synthesis, & nihil tam obvium est, quam componendo demonstrare, quod resolvendo inventum est. Hos omnes defectus de medio tollere haud permittit ingenii tenuitas. Tantum specimen aliquod methodi exhibeo, ut Analystis fortasse occasionem præbeam meliora edendi. Interim tria præstare conabor.

1. Calculi tædium minuendum est, & liberanda resolutio a quantitatum asymmetria, & magnitudinibus plusquam solidis.

2. Constructio ex ipsa analysi petenda est, & curvæ locales determinandæ, ex quarum intersectione, quantum fieri potest, minus composita habetur solutio.

3. Ita

3. Ita algebram cum Geometria conciliare oportet, ut ab analyſi ad ſyntheſim facilis evadat regreſſus.

Totum vero artificium in eo conſiſtit, ut in reſolutione pluribus quantitatibus ignotis utamur juxta Problematis conditionem, & gradum.

Ignotæ porro quantitates non ad arbitrium, ſed quando res poſtulat, ſumendæ ſunt, neque illarum numerus fruſtra multiplicandus; hoc enim confuſionem pareret: ſed ſequentem potius adhibeamus cautionem.

Quando in analyſi propoſiti Problematis eo ventum eſt, ut ulterius progredi non liceat, quin ignota quantitas aſſumpta, rem tractando juxta Quæſtionis circumſtantias, ad ſuperiores gradus ſive puros, ſive affectos neceſſario aſcendat, neque aut diviſione, aut radicis extractione ad ſimpliciorem reduci poſſit, tum ſpecies mutandæ ſunt, & in reſolutionem nova quantitas ignota introducenda, qua induſtria toties uti debemus, quoties in eumdem caſum incidimus. E. G. ſi ex problematis conditione quantitas ignota $\frac{ax+xx}{b}$ ducenda eſſet in x, productum $\frac{ax^2+x^3}{b}$ ad tertiam poteſtatem pertineret; loco igitur ipſius $\frac{ax+xx}{b}$ ponatur ſecunda incognita y, & productum evadat xy. Rurſus ſit quantitas ex ignotis compoſita $\frac{xy}{a}$, quæ ducenda ſit in $b-x$: tunc in producto $\frac{bxy-xxy}{a}$ continetur ſolidum xxy compoſitum ex quadrato magnitudinis ignotæ x, & latere alterius ignotæ y. Ad vitandum igitur aſcenſum loco $\frac{xy}{a}$ ſubſtituo tertiam incognitam z, & productum erit $bz-xx$.

In his operationibus dignitates altiorum graduum eminenter continentur; attamen ſpecies intra planorum limites ſemper ſubſiſtunt, quod quam magni ſit uſus, infra patebit exemplis.

Licet aliquando in reſolutione ad cubos, & ſolida aſcendere, ſi nempe in quæſtione propoſita, cuborum, & ſolidorum præcipue ignotorum aperta fiat mentio; Geometria enim a ſolidorum comparatione non abhorret. Cavendum interea eſt, ne ad dignitates cubo altiores perveniamus, & ſi regia via progrediendum ſit, licebit ſolida, vel per rationum compoſitionem, vel alio quocumque modo reſolvere. Exemplis potius methodus illuſtranda ſit. Sit igitur propoſitum

PROBLEMA I.

Eptagonum circulo inſcribere.

Quod ad aliud reducitur veſtigiis Euclidis inſiſtendo, videlicet Triangulum Iſoſceles conſtruere, cujus uterque angulus ad baſim ſit triplus reliqui.

SIt jam factum, illudque ſit triangulum ACB (Fig. 24.) Dividatur angulus ad B in tres partes æquales, & tres anguli ABE, EBD, DBC ſint tum inter ſe, tum angulo C æquales, & linea AC, vel CB, quæ ad arbitrium ſumi poteſt, vocetur a.

Hoc Problema ſic methodo vulgari reſolvi poteſt.

Ignota CE eſto x, adeoque AE erit $a - x$, & ob ſimilitudinem triangulorum CAB, ABE, ut CA ad AB, ita AB ad AE, & ob id rectangulum CBE erit æquale quadrato AB; ſed rectangulum CAE eſt $aa - ax$; ergo & quadratum AB, ſive BE erit $= aa - ax$, & AB, vel BE $= \sqrt{aa - ax}$.

Rurſus ob ſimilitudinem triangulorum ECB, EBD.

EC quadratum: CB quadratum:: EB quadratum: DB quadratum

$$x^2 \;:\; aa \;::\; aa - ax \;:\; \frac{a^4}{x^2} - \frac{a^3}{x}.$$

Ob eamdem rationem

$$\begin{array}{ccccccc} EC & : & EB & :: & EB & : & ED \\ x & : & \sqrt{aa-ax} & :: & \sqrt{aa-ax} & : & \frac{aa}{x} - a, \end{array}$$

& $DC = x + a - \frac{aa}{x}$, ſi nempe ex $CE = x$ ſubducatur $ED = \frac{aa}{x} - a$

ſed DC, & DB ſunt æquales ob æquales angulos DCB, DBC; ergo perventum eſt ad æquationem $\sqrt{\frac{a^4}{xx} - \frac{a^3}{x}} = x + a - \frac{aa}{x}$,

& ſumptis utriuſque membri æquationis quadratis,

$$\frac{a^4}{xx} - \frac{a^3}{x} = x^2 + 2ax - a^2 - 2\frac{a^3}{x} + \frac{a^4}{xx},$$

& expurgata æquatione,

$$x^3 + 2ax^2 - a^2x = a^3.$$

Me-

Methodi vulgaris ope tali pacto obtinetur æquatio: ſed cum Analyſta reſolutionis veſtigia repetit, & demonſtrationem aggreditur, in magnas incidit perplexitates, ob quantitates ſolidas, & irrationales, quæ in reſolutione continentur, ita ut ſi illam aſſequi liceat, fortunæ, aut induſtriæ potius, quam arti id tribuendum ſit.

Noſtra methodo ſic rem abſolvimus.

Sint ea omnia, quæ ſuperius. AB igitur, vel BE erat $\sqrt{aa-ax}$; ſed ex antecedentis analyſis progreſſu patet, quod iisdem ſignis retentis, ad ſuperiores gradus fit aſcenſus; ergo per regulam traditam ſecunda quantitas ignota in ſubſidium vocanda eſt. Sit $\sqrt{a^2-ax}=y$. Ob ſimilitudinem triangulorum ECB, EBD ſequens oritur analogia.

CE : CB : : EB : BD

$x : a :: y : \frac{ay}{x}$.

Sed DC eſt æqualis ipſi BD ob angulos æquales DCB, DBC, & DC erat ex ſuperiori reſolutione $= x + a - \frac{aa}{x}$; ergo datur æquatio

$x + a - \frac{aa}{x} = \frac{ay}{x}$, ſive $xx + ax = aa + ay$.

Ut locus Geometricus huic ultimæ æquationi reſpondens inveniatur, ſic procedendum eſt. Quoniam $xx + ax = aa + ay$, erit $xx + ax = az$, ſi $a + y$ ponatur $= z$: addito utrimque $\frac{1}{4}aa$, erit $xx + ax + \frac{1}{4}aa = az + \frac{1}{4}aa$, & hinc inde extracta radice, $x + \frac{1}{2}a = \sqrt{az + \frac{1}{4}a^2}$.

Sit $x + \frac{1}{2}a = q$, & erit $q^2 = az + \frac{1}{4}a^2$. Eſto inſuper $\frac{1}{4}a + z = p$; ergo $q^2 = ap$, qui locus eſt ad parabolam.

Rurſus altera æquatio erat $\sqrt{aa-ax}=y$, hoc eſt $aa-ax=yy$.

Statuatur $a-x=r$; igitur $ar = y^2$, qui locus eſt ad alteram parabolen, & ſic per duarum parabolarum interſectionem Quæſtio ſoluta eſt.

Tentemus modo quæſtioni ſatisfacere aliorum placitis inſiſtendo. Repetamus itaque ſuperius inventam æquationem $x^3 + 2ax^2 - a^2x = a^3$, quæ ſi conſtruenda ſit more Cartheſiano liberanda prius erit ab affectione ſub quadrato, deinde per circulum, & parabolam habebitur intentum. Verum hujuſmodi æquationis expurgatio, & reductio ad cubum tantum affectum ſub latere totius analyſis, & ſyntheſis progreſſum turbat, & ſolvendi problematis hypotheſim confundit.

Methodus, quæ locis utitur juxta mentem Fermatii, talis eſt. Supponatur comparationis homogenearum prædictæ æquationis, ſcilicet a^3, æquari ſolido axy, & cum hac quantitate aſſumpta comparetur utrumque æquationis membrum, eritque prima æquatio $a^3 = axy$, hoc eſt $a^2 = xy$, qui locus eſt ad hyperbolam intra aſymptotos. Altera æquatio erit $x^3 + 2ax^2 - aax = axy$, & omnibus per x diviſis, $x^2 + 2ax - a^2 = ay$, qui locus eſt ad parabolam. Per interſectionem igitur hyperbolæ, & parabolæ problemati fit ſatis.

Vel aliter juxta ea, quæ tradidit nuper in opere poſthumo Marchio Hoſpitalius. In ſupradicta æquatione $x^3 + 2ax^2 - a^2x = a^3$ ponatur loco quadrati x^2 diviſi per cognitam quantitatem a ſecunda ignota y, ita ut conſurgat æquatio ad parabolam $\frac{x^2}{a} = y$, deinde loco plani x^2 in æquatione propoſita ſubſtituatur ſuus valor ay, & ſic ſtabit æquatio $axy + 2a^2y - a^2x = a^3$, & omnibus terminis ad a applicatis, $yx + 2ay - ax = a^2$. qui locus ad hyperbolam pertinet. Quæſtio igitur ſolvitur per combinationem parabolæ, & hyperbolæ.

Non diſſimili ratione alia loca ſolida venari poſſumus, & eo artificium deducere, ut acceptis ad libitum duabus coni ſectionibus, vel circulo, & quacumque coni ſectione, per harum interſectionem problema enodare valeamus.

Interim methodum tam Fermatii, quam Hoſpitalii Carthesianæ præfero, eo quia neutra ullam adhibet expurgationem, aut ſpecierum tranſmutationem, ut conſtructionem perficiat, utraque tamen vitio non caret; nam opportune quidem determinat valorem magnitudinis incognitæ x, ſed dum æquationem analyticam in duos locos Geometricos reſolvit, & aſſumit ſecundam ignotam y, hæc quantitas, ut ita loquar, extranea eſt, neque convenit præmiſſæ præparationi. Valor ipſius y relatus ad primam incognitam x, ſecundum Fermatium eſt $\frac{aa}{x} = y$, ſecundum Hoſpitalium eſt $xx = y$. Nullam autem in fig. 24. præparationis invenio lineam, quæ hujuſmodi valoribus reſpondeat, adeoque quantitas y, quæ non minus ac prima ignota x ex conſtructione innoteſcit (ſemper enim vel ſola, vel juncta magnitudinibus datis, & aliquando etiam ignotis componit alterutram ex coordinatis curvarum localium) in demonſtratione vix locum habere poteſt, cum nullum habeat in præparatione. Hinc compoſitio extraneis quantitatibus implicatur, atque ardua, & expers artis redditur, ut propria experientia didici, qui defectus in methodum noſtram non cadit, nam ſecunda ignota y optime præparationi congruit; valet enim idem ac $\sqrt{a^2 - ax}$, & per conſequens deſignat quantitatem AB, vel EB. Hæ autem lineæ non ſolum in præparatione, ſed etiam in demonſtratione conſiderandæ ſunt, ut ex ipſo compoſitionis progreſſu manifeſtum eſt.

Si libeat in conſtructione, & demonſtratione, ad ſpecimen artis oſtendendum, præmiſſæ noſtræ analyſis veſtigia ſequi, ita Problema Geometrice conſtruitur, & demonſtratur.

Sumatur (Fig. 25.) infinita FX, cui ad angulos rectos inſiſtat FH æqualis lateri quæſiti trianguli, & vertice F, axe FX, parametro FH deſcribatur parabole FKV. Latus rectum FH biſariam dividatur in puncto G, & agatur indefinita GT ipſi FX parallela, deinde a linea FX abſcindatur FL æqualis quartæ parti parametri FH; & inſuper LN æqualis dictæ parametro. Erigatur perpendicularis NR, ſecans rectam GT in puncto P, & poſita PR æquali lateri recto FH, vertice R, axe RV, parametro RP, vel FH deſcribatur altera parabole RV primam ſecans in puncto U, & ducantur normales VS, VT. PS eſt $= x$, SV $=$ PT $=$ NX $= y$.

Dico primo rectangulum BRS eſſe æquale quadrato SV, vel PT, quod ex deſcriptione parabolæ RV manifeſtum eſt; ſupponitur enim RP æqualis lateri recto dictæ parabolæ.

Dico ſecundo rectangulum RPS una cum quadrato PS eſſe æquale quadrato RP, & rectangulo RPT. Ex natura parabolæ rectangulum HFX eſt æquale quadrato XV, ſed rectangulum HFX eſt æquale duobus rectangulis HFL, & HF in LX, quorum primum poteſt quartam partem quadrati FH; aſſumpta eſt enim in conſtructione FL æqualis quartæ parti ipſius FH; igitur quadratum VX eſt æquale rectangulo AF in LX, & inſuper quartæ parti quadrati FH, ſeu quadrato FG, vel XT. Quadratum autem VX æquatur quadratis XT, TV, & duplo rectangulo XTV, quod duplum rectangulum æquale eſt rectangulo ſub RP in TV; facta eſt enim RP æqualis FH, & per conſequens dupla ipſius XT; ergo ſi ab utraque parte auferas quadratum XT, rectangulum ſub FH in LX erit æquale rectangulo ſub RP in TV, & quadrato TV, ſeu rectangulo RPS, & quadrato SP.

Porrò cum rectangulum ſub FH in LX ſit æquale duobus rectangulis ſub FH in LN, hoc eſt quadrato FH, vel RP, & rectangulo ſub FH in NX, hoc eſt rectangulo RPT, erit rectangulum RPS una cum quadrato PS æquale quadrato PR, & rectangulo RPT. Q. E. D.

Ponatur jam AC æqualis PR (Fig. 24., & 25.) & CE æqualis SP, adeoque AE erit æqualis SR. Super data AE conſtruatur triangulum Iſoſceles ABE, cujus utrumque latus ſit æquale datæ PT, & jungatur BC. Ex ſupra demonſtratis erit rectangulum CAE æquale quadrato AB, vel EB, & rectangulum ACE plus quadrato EC æquale quadrato CA plus rectangulo CAB. Dico jam triangulum ACB eſſe quæſitum. CE ita dividatur in puncto D, ut rectangulum CED ſit æquale quadrato EB, & ducatur DB.

Quoniam rectangulum CAE eſt æquale quadrato AB, erit ut AC ad AB, ita AB ad AE; ergo triangula ACB, ABE habentia circa communem angulum A latera proportionalia, erunt ſimilia. Iſoſceles eſt igitur triangulum ACB, & angulus ABE æqualis angulo C.

Iterum, quoniam rectangulum CED factum eſt æquale quadrato EB, erit, ut CE ad EB, ita EB ad ED, adeoque triangula ECB,

EBD

EBD habentia circa communem angulum E latera proportionalia erunt ſimilia; angulus igitur EBD eſt æqualis angulo C.

Tandem quoniam rectangulum ACE, & quadratum EC ſunt æqualia quadrato CA, & rectangulo CAB, ſi hinc inde auferatur rectangulum ACE, erit quadratum EC æquale differentiæ quadrati CA, & rectanguli ACE, hoc eſt rectangulo CAE, & inſuper rectangulo CAB; ſed rectangulum CAE eſt æquale quadrato AB, vel EB, hoc eſt rectangulo CED; ergo quadratum EC æquatur rectangulis CED, CAB, & ab utraque parte dempto rectangulo CED, erit differentia quadrati EC, & rectanguli CED, ſcilicet rectangulum ECD æquale rectangulo CAB, vel CBE.

Jam ob ſuperius demonſtratam ſimilitudinem triangulorum EBD, ECB, erit, ut EB ad BD, ita EC ad CB; ergo rectangulum CBE erit æquale rectangulo ſub EC in BD: ſed rectangulo CBE erit etiam æquale rectangulum ECD; igitur rectangula ECD, & EC in BD ſunt æqualia, & ob eamdem altitudinem EC, DC & DB ſunt æquales, & per conſequens angulus DBC æqualis angulo C. Tres itaque anguli ABE, EBD, DBC ſunt tum inter ſe, tum angulo C æquales, & ob id angulus ABC triplus anguli C, quod erat faciendum.

SCHOLIUM I.

Præmiſſum problema conſtruximus per duas parabolas, ſed facilius expediri poterat per parabolam, & hyperbolam. Prima namque æquatio localis erat $a^2 - ax = y^2$ ad parabolam. Altera æquatio item ad eamdem curvam erat $ax + xx = a^2 + ay$, vel $x^2 - ay = a^2 - ax$. Loco membri $aa - ax$ pono ſuum valorem y^2, qui a prima æquatione locali determinatur; ergo $xx - ay = yy$, hoc eſt $ay + yy = xx$, qui locus eſt ad hyperbolam, quam æquilateram vocant. Combinatio itaque parabolæ, & hyperbolæ quæſtioni ſatisfacit. Interim gemina parabola potius uſus ſum, licet difficilior, & magis prolixa evaſerit compoſitio, quia parabolam ſimpliciorem, & minus compoſitam curva hyperbolica ſum arbitratus, ſi non genere & gradu ſaltem æquatione locali. Huic obſervationi nec ſcrupuloſius adhærere, nec illam omnino ſpernere debet Analyſta. Eligat igitur curvas quantum fieri poteſt æquationis ſimplicioris, dummodo id permittat, ut in caſu noſtro natura problematis.

Omittere non poſſum elegantem ſolutionem per hyperbolam intra aſymptotos, & circulum, quæ ita ſe habet. Transformentur ſpecies ſequenti modo. Sit ignota $y =$ datæ b, hoc enim arbitrarium eſt, & nota a ponatur æqualis incognitæ q, & $a - x = z$. Prima æquatio localis, facta ſpecierum metamorphoſi, novam hanc induit formam $zq = b^2$, quæ æquatio ſpectat ad hyperbolam intra aſymptotos. Secunda æquatio localis $ax + xx = aa + ay$ tranſmutata ad normam aſſumptæ hypotheſis talis eſt $3qz + bq - qq = zz$, qui locus quidem eſt ad alteram hyperbolam: ſed ſi vice $3qz$ colloces ſuum valorem $3b^2$ cognitum ex æquatione $zq = bb$, hyperbola tranſit in circulum, & oritur æqua-

tio

tio localis ad circulum $3bb + bq - qq = z^2$. Simili ratione, mutata poſitione ſpeciertum, alios locos omnino diverſos indagare poſſumus, unde colligitur noſtræ methodi fæcunditas.

SCHOLIUM II.

Conſueverunt Analyſtæ duplicem, aut triplicem quantitatem ignotam aſſumere in reſolutione problematum indeterminatorum, ſive localium, hoc eſt duas incognitas ſi locus eſt ad lineam, tres ſi pertinet ad ſuperficiem, cum optimè noverint hujuſmodi problemata per unius ignotæ poſitionem ſolvi non poſſe. Cæterum plurium ignotarum uſus non adeo communis eſt; nam licet aliqui in analyſi multas ignotas in ſubſidium quandoque vocaverint ad calculi tædium minuendum, tamen illarum valoribus ſubſtitutis, omnes tandem reducunt ad unicam incognitam, & ſic reſolutionem claudunt per conſuetam æquationis inventionem, cujus conſtructionem perficiunt more vulgari, quod omnium Analyſtarum exemplis oſtendi poteſt.

Neque aliter rem expedire, aut poſſunt, aut debent, cum enim hucuſque nemo docuerit, qua occaſione, & quibus in circumſtantis ſecunda, & ulteriores quantitates ignotæ ſumendæ ſint, ſequitur delectum ignotarum hucuſque fuiſſe artis expertem, & omnino arbitrarium. Quod ſi quis duas ignotas accipiat ad libitum, & his utatur tamquam duabus coordinatis geminæ curvæ localis inſervientis ſolutioni quæſtionis, fieri poteſt, ut fortuito incidat in duo loca, quæ ſimpliciſſima ſint, neque aſſurgant ad altiorem gradum, quam poſtulet conditio problematis, ſed plerumque quæſtio ſolvetur ex improprio genere, ſolida nempe per curvas pluſquam ſolidas, & linearia cujuslibet claſſis per curvas convenientes quæſtionibus ſublimiorum graduum.

In Fig. 24. vocata data AC a, eligantur duæ ignotæ ad libitum AB, & ED, quarum prima ſit x, ſecunda y. Ex ſupra demonſtratis.

$$AC : AB :: AB : AE$$

$$a : x :: x : \frac{xx}{a},$$

adeoque CE erit $= a - \frac{xx}{a}$: ſed proportionales ſunt

$$CE : EB :: EB : ED$$

$$a - \frac{xx}{a} : x :: x : y;$$

ergo prima datur æquatio localis $xx = ay - \frac{x^3y}{a}$ ad curvam tertii gradus. Rurſus

EC

$$EC : CB :: EB : BD$$

$$\frac{a-xx}{a} : a :: x : \frac{a^2x}{aa-xx};$$

ſed $BD = DC$, & $DC = a - \frac{xx}{a} - y$; ergo oritur altera æquatio lo-

calis $\frac{aax}{aa-xx} = a - \frac{xx}{a} - y$, videlicet $a^3x = a^4 - 2aaxx + x^4 - a^3y + axxy$, quæ æquatio ſimpliciſſima eſt ad curvam quarti gradus. Peccaret Analyſta contra leges Geometricæ ſimplicitatis, ſi problema hac ratione conſtrueret, & in eumdem ſcopulum incideret, ſi pro coordinatis curvarum localium eligeret duas ignotas EB, BD, & hac hypotheſi adhibita tentaret ſolutionem problematis. Noſtra methodus has difficultates de medio tollit; quando enim in reſolutione ventum eſt ad quantitatem $\frac{xx}{a}$, vel ad aliam $a - \frac{xx}{a}$ ulterius progredi non licet, niſi aſcendendo ad magnitudines ſolidas. Canon itaque generalis ſubit, ut ſecundæ ignotæ detur locus, adeoque recta AE, vel ſaltem EC erit $= y$. In hac ſuppoſitione omnia legitimè procedunt, & habetur ſolutio vere Geometrica per duplicem curvam ſecundi gradus, Hæc dicta ſint, ut Analyſtæ innoteſcat uſus, & neceſſitas noſtri Canonis generalis; ex hoc enim totius methodi vis, & artificium dependet.

PROBLEMA II.

Datis baſe, & perpendiculo, dataque ratione aggregati ex uno latere; & perpendiculo ad aggregatum ex altero latere & perpendiculo, reperire triangulum.

HOc Problema conſulto elegi, utpote jamdudum reſolutum a Renaldino in ſuo Geometra promoto pag. 52. operoſa præparatione, analyſi, expurgatione, & conſtructione. Noſtra autem methodo ſic problemati ſatisfacio, nulla adhibita præparatione.

Sit jam factum: & quæſitum triangulum eſto ABC (Fig. 26.) in quo datur baſis $AC = a$, normalis $BD = b$, & ratio $AB + BD$, ad $BC + BD$ data eſt ut r ad s.

Aggregatum ex $AB + BD$ eſto x; ergo $r : s :: x : \frac{sx}{r}$, quæ ultima quantitas eſt æqualis ſummæ ipſarum BD, & BC; adeoque $BC = \frac{sx}{r} - b$,

c-

ejuſque quadratum $= \frac{s^2x^2}{r^2} - \frac{2bsx}{r} + b^2$, ex quo ſi auferas quadratum BD $= b^2$, erit quadratum DC $= \frac{s^2x^2}{r^2} - \frac{2bsx}{r}$, & DC $=$ radici hujus quadrati. Hic noſtra analyſis ſiſtit; nam ſi progrediendo ſupponamus AD eſſe $= a - \sqrt{\frac{s^2x^2}{r^2} - \frac{2bsx}{r}}$, & hujus quadratum efformandum ſit, ut additum quadrato DB fiat horum aggregatum æquale quadrato AB, implicatiſſima redditur æquatio, in qua continentur quantitates irrationales. Igitur $\sqrt{\frac{s^2x^2}{r^2} - \frac{2bsx}{r}}$ ſit $= y$, & AD $= a - y$, quæ facilitatis gratia non neceſſitatis vocetur z; ergo $z^2 + b^2 = x^2 - 2bx + b^2$, ſeu $x^2 - 2bx = z^2$, qui locus eſt ad hyperbolam. Altera æquatio erat $\frac{s^2x^2}{r^2} - \frac{2bsx}{r}$, qui locus eſt ad alteram hyperbolam, & per duarum hyperbolarum interſectionem ſolutum eſt Problema propoſitum.

PROBLEMA III.

Data differentia ſegmentorum baſis, & alterutro angulorum ad baſim, datoque rectangulo ſub lateribus, reperire triangulum.

Sit jam factum, & quæſitum triangulum ſit ABC, in quo datur differentia ſegmentorum baſis AE, angulus BAC, & rectangulum ſub lateribus AB, BC $= c^2$. A puncto E ad latus AB intelligatur ducta perpendicularis EF.

In triangulo rectangulo AFE, quoniam AE data eſt, & datur angulus ad A, datum erit magnitudine dictum triangulum; ergo utraque AF, FE data eſt. Sit AF $= a$ EF $= b$, & ignota FB $= x$. Quadratum igitur EB, vel BC, erit æquale duobus quadratis FB, & FE. Quod ſi EB ponatur æqualis ſecundæ incognitæ y, ventum erit ad æquationem $b^2 + x^2 = y^2$, qui locus eſt ad hyperbolam æquilateram. Rectangulum porro ABC, vel ABE erat æquale plano c^2, & cum AF ſit $= a$, FB $= x$, & BE $= y$, erit idem rectangulum ABE $= ay + xy$; Ergo altera oritur æquatio localis $ay + xy = c^2$ ad hyperbolam intra aſymptotos. Per interſectionem itaque duarum hyperbolarum Problema ſolutum eſt.

Hoc problema, aliaque ſimilia in Aſtronomicis locum habent, ſi tamen verum eſt, quod Caſſinus ſuſpicatur, planetas motu ſuo non deſcribere Ellipſim Apollonianam, ſed omnino diverſam, in cujus nempe peripheria ſumpto da libitum puncto, & ductis ad utrumque polum lineis rectis, harum ſumma non eſt ubique eadem, ut in Ellipſi vulgari, ſed potius ſemper conſtans eſt rectangulum ſub dictis lineis comprehenſum.

Decreveram methodum ad ſolida tantum Problemata hucuſque applicatam ad linearia etiam extendere, ſed jam nimis in longum diſſertatio excurrit. Itaque otio tuo Illuſtriſſime Vir dintius abutendum non eſt. Quod ſi tu, aliique in Geometrico pulvere exercitati has nugas putent eſſe aliquid, non dubitabo methodum ipſam uſque ad umbelicum perducere.

APPENDIX.

UT datæ fidei ſatisfiat, methodus, quam ſuperiori diſſertatione adumbravi, amplianda eſt, & quæſtionibus magis compoſitis applicanda, qua data occaſione, non ſolum oſtendam, quomodo ſe gerere debeat Analyſta in caſibus difficilioribus, ſed etiam non inutiles fortaſſe meditationes adjungam circa naturam, & conſtitutionem Problematum pluſquam ſolidorum, & locorum linearium. Verum quia nuda præcepta vix intelligi poſſunt, non erit abs re præceptis exempla conjungere, ſumpto initio ab his quæſtionibus, quæ ad quintum, aut ſextum gradum aſcendunt, & primum genus Problematum linearium conſtituunt. Sit igitur propoſitum.

PROBLEMA I.

Data prima, & ſumma ſecundæ, & ſextæ in ſerie ſex quantitatum continue proportionalium, ſingulas diſtinguere.

PRima quantitas nota ex hypotheſi vocetur a, aggregatum ex ſecunda & ſexta ſit b, ſecunda vero, quæ ignota eſt, ponatur $= x$, adeoque ſexta erit $= b - x$. Adhibita methodo ordinaria, ſic ſtabit analyſis

$$a : x : \frac{x^2}{a} : \frac{x^3}{aa} : \frac{x^4}{a^3} : \frac{x^5}{a^4} = b - x.$$

Noſtra methodo, quando perventum eſt ad magnitudinem $\frac{xx}{a}$ ulterius progredi datum non eſt, niſi ad quantitatem tertii gradus aſcendamus,

mus, videlicet ad $\frac{x^2}{a^2}$: loco igitur $\frac{x^2}{a}$ pono ſecundam incognitam y,

eruntque proportionales

$$a : x :: y : \frac{y^2}{x}.$$

Hic iterum ſubſiſtere neceſſe eſt, nam ſi procedat reſolutio, in eumdem ſcopulum incidimus. Sit ergo $\frac{y^2}{x} = z$. Fiat ut ſecunda x ad tertiam y, ita quarta z ad quintam $\frac{yz}{x}$. Rurſus ut tertia y ad quartam z, ita quinta $\frac{yz}{x}$ ad ſextam, nempe $\frac{x^2}{x}$; ſed ſexta erat etiam $= b - x$; ergo datur æquatio $\frac{z^2}{x} = b - x$, vel $z^2 = bx - x^2$. Ecce ex analyſi conſtructionem.

Quoniam prima æquatio erat $\frac{xx}{a} = y$, qui locus eſt ad parabolam, ſumatur indefinita AH (Fig. 27.), & vertice A, diametro AH, parametro $= a$ deſcripta intelligatur parabole Apolloniana ACE, & ducta ad AH normali AB, omnes abſciſſæ AB vocentur x, & omnes applicatæ BC in trilineo parabolico vocentur y. Jam quia altera æquatio erat $\frac{yy}{x} = z$, hoc eſt $yy = xz$, ſeu æquatione in analogiſmum converſa, $x : y :: y : z$, fiat ſemper ut AB ad BC, ita BC ad BD, & per punctum D, aliaque ſimili ratione inventa, tranſeat curva ADE, in qua ordinatim applicatæ ſemper erunt $= z$. Ultima vero æquatio $bx - x^2 = z^2$ dat circuli peripheriam ADF deſcriptam ſuper diametro AF $= b$, quæ curvam ADE ſecabit in puncto D, & ducta perpendiculari BDC, AB erit ſecunda, BC tertia, & BD quarta ex quæſitis proportionalibus. Q. E. F.

Scholium primum.

Si loco aggregati ex ſecunda, & ſexta quantitate, data fuiſſet ipſarum differentia, in geminam incidiſſemus æquationem $z^2 - x^2 = bx$, & $x^2 - z^2 = bx$. Prima oritur, quando creſcit proportio, ſecunda quando decreſcit, utrique autem ſatisfacit hyperbola æquilatera. Interim non eſt animus proſequi varios Problematum caſus, & determinationes, vel curvarum proprietates; hæc enim extra noſtrum ſunt inſtitutum.

Aliqua potius tradenda ſunt de conſtitutione locorum linearium, quorum deſcriptio Mathematicorum ſemper vexavit ingenia. Contemnenda non eſt Antiquorum methodus, qui curvarum pluſquam ſolidarum conſtructionem aggreſſi ſunt per varios linearum rectarum motus certis legibus temperatos, cujus rei illuſtre exemplum habemus in conchoide Nicomedis: licet autem curvæ ſimpliciores hac ratione eleganter delineari poſſint; tamen in magis compoſitis, & ad altiores gradus pertinentibus ineluctabiles difficultates occurrunt ob multiplicem rectarum combinationem, & nimiam motuum compoſitionem.

Clariſſimus de la Hire locorum linearium geneſim repetit a ſectionibus corporum ſolidorum; ſicuti enim ex coni, originem circulo dabentis, varia ſectione omnia loca ſolida comparantur, ita ſuppoſita deſcriptione circulorum tertiæ, quartæ & aliarum dimenſionum in infinitum, & ſuper his altiorum graduum conoidibus conſtitutis, loci lineares ſolidis reſpondentes derivantur, videlicet infinitæ parabolæ, Ellypſes, & hyperbolæ. Interim ſi noſtro inſtituto aptetur Clariſs. Viri hypotheſs, in duobus potiſſimum deficit. Primo non ſervantur Geometriæ canones, qui jubent, ut a ſimplicioribus ad magis compoſita gradum faciamus: qua ratione autem circulus E. G. quinti gradus ſit ſimplicior parabola, aut hyperbola ejuſdem ordinis prorſus non video. Neque reponat, idem abſurdum ſequi, dum loca ſolida ex coni ſectione derivantur; nam circulus, qui coni baſis eſt, quamvis habeat æquationem ſui conſtitutivam ad ſecundum gradum ſpectantem, & ejuſdem generis cum æquationibus localibus ſectionum conicarum, tamen ob illius ſimpliciſſimam geneſim in plano, inter locos planos, potius quam ſolidos jure merito collocatur. Secundo loco certum eſt, & ab Analyſtis demonſtratum, in ſectionibus conicis omnia loca ſolida contineri, ita ut nulla poſſit inveniri æquatio tertiæ, aut quartæ dimenſionis, quæ per hujuſmodi curvarum combinationem non explicetur: At conois gradus ſuperioris quomodocumque ſecta non exhibet omnes curvas locales ad eumdem gradum ſpectantes; multæ ſiquidem aſſignari poſſunt ab his omnino diverſæ, quas doctiſſimus de la Hire conſideravit. E. G. curvæ tertii ordinis, aut gradus in univerſum numerantur ſeptuaginta duæ, ut patet ex celeberrimi Newtoni opuſculo de ſpeciebus, & magnitudine figurarum curvilinearum.

Dominus de Tſchirnhauſen in libro, qui inſcribitur Medicina mentis, curvarum pluſquam ſolidarum deſcriptionem tentavit per ſocos, vel umbilicos, qua methodo nihil potuit ingenioſius excogitari; ſed optandum eſſet, ut illam Illuſtris Auctor univerſalem redderet, & omnibus curvis aptaret, nam obſervante Joanne Bernoullio, ſæpe in ſimplicioribus hæret aqua, & nondum conſtat, qua ratione per ſocos delineari poſſit parabole, quam cubicam ſecundam vocant, & cujus æquatio localis eſt $ax^2 = y^3$.

Omitto dictarum curvarum conſtructionem, quæ fit per motum evolutorium Hughenii, vel per tractorium Leibnitii, vel per reptorium Bernoullii, hi enim motus ſolum in aliquibus caſibus magis compendioſam.

ſam ſolutionem Analyſtæ ſubminiſtrant. Interim ad methodum generalem properandum eſt.

Ego ſemper regia via incedendum putavi, hoc præmiſſo axiomate, videlicet curvarum magis compoſitarum geneſim, & conſtructionem petendam eſſe a curvis ſimpliciotibus, & depreſſioris gradus, quarum deſcriptionem, & originem aliunde notam ſuppono; quemadmodum enim ex planis loca ſolida in plano ſatis appoſite derivantur, ita ex ſolidis deducuntur loci lineares primæ claſſis, & ex iſtis lineares ſecundæ, eodem in infinitum ſervato operandi modo.

Hanc procedendi rationem numeris omnibus abſolutam pronuncio. Primo adeo univerſalis eſt, ut nullus dari poſſit locus pluſquam ſolidus, cujuſcumque ſit generis, & quacumque laboret terminorum affectione, qui tali pacto non determinetur, & conſtruatur. Secundo, loco fundamenti hoc unum poſtulo, ut concedatur ſectiones conicas in plano delineari poſſe. Hoc poſito gradatim progredior, & a facilioribus incipiendo, viam ſterno ad difficiliora. Si deſcribenda ſit E. G. curva localis ad quintum genus pertinens, id obtineri non potetit, niſi præmiſſa conſtructione quorumdam locorum linearium, qui quintum, & ſecundum genus, quod eſt ſolidorum, interjacent.

Quærere quis poſſet, qua arte obtinere liceat locorum linearium deſcriptionem. Hoc noſtra Analyſis ignotum eſſe non ſinit. Methodus, quæ pluribus quantitatibus ignotis utitur, hoc habet peculiare, ut non ſolum deſignet curvam localem inſervientem ſolutioni Problematis propoſiti, ſed etiam illius conſtructionem opportune doceat, ut ex allato exemplo, & clarius ex ſequentibus patet.

Sic curva ADE eſt parabola, quam cubicam primam vocant Geometræ, hanc veſtigiis methodi inſiſtendo per ſimplicem analogiam ex parabola Apolloniana deduximus, unde hujuſmodi curvæ deſcriptio non ex ſuppoſitione, ſed ex vi reſolutionis inventa eſt.

Scholium ſecundum.

Accidit aliquando ultimam æquationem determinantem Problematis ſolutionem, & quæ in ſuperiori exemplo erat $bx - x^2 = z^2$, non ſolum duas quantitates incognitas, ſed tres, vel etiam plures continere, quod tamen nullum negotium facereſſere debet Analyſtæ, ut conſtabit ex ſequenti Problemate, cujus reſolutionem ſimpliciorem exhibere potuiſſem, ſed malui potius propoſito, quam Problemati inſervire.

PRO-

PROBLEMA II.

Datum arcum in quinque æquales partes dividere.

SIt jam factum, & compleatur ſemicirculus AHG (Fig. 28.), & arcus diviſus in quinque partes æquales ſit AH. Ducantur lineæ BD, CD, CE, CF, CG, CH, & recta CE ita producatur ad punctum S, ut CD, DI ſint inter ſe æquales. Similiter linea CF producatur in K, ut CE ſit ipſi EK æqualis. Eadem ratione CF ponatur æqualis LF, & CG æqualis GM.

Ex præparatione primo patet triangula BCD, DCI, ECK, FCL, GCM eſſe ſimilia; omnia enim ſunt iſoſcelia ex conſtructione, & anguli BCD, DCE, & cæt. ſunt inter ſe æquales, ob æquales arcus AD, DE, & cæt.

Patet ſecundo rectam EI eſſe æqualem rectæ AC, & FK æqualem DC, quod dicendum eſt de lineis LG, EC, & MH, FC. Comparentur invicem duo triangula ACD, DIE, in quibus duo latera CD, DA ſunt æqualia duobus lateribus ID, DE ex conſtructione, & inſuper angulus ad I æqualis eſt angulo ACD; ergo dicta triangula ſunt ſimilia, & æqualia, igitur latus IE erit æquale lateri AC. Hæc demonſtratio cæteris triangulis applicetur.

His præhabitis, ſic analyſim inſtituo. Eſto $AC = 2a$, adeoque $BC = a$. Sit HC data $= b$, at vero incognita CD ponatur $= x$

Quoniam ſimilia ſunt triangula BCD, DCI erit

$$BC : CD :: CD : CI$$

$$a : x :: x : \frac{xx}{a}.$$

Ad vitandum aſcenſum ad dimenſiones ſolidas, ſtatuatur $CI = \frac{xx}{a} = y$, & cum IE ſit $= AC$, hoc eſt $= 2a$, erit $EC = y - 2a$.

Ob ſimilitudinem triangulorum BCD, ECK, erit

$$BC : CD :: EC : CK.$$

$$a : x :: y - 2a : \frac{xy}{a} - 2x.$$

Sed FK eſt $= CD$, nempe $= x$; ergo FC erit $= \frac{xy}{a} - 3x$:

Rurſus cum ſimilia ſint triangula BCD, FCL, erit

BC

$$BC : CD :: FC : CL$$

$$a : x :: \frac{xy}{a} - 3x : \frac{xxy}{aa} - \frac{3x^2}{a}.$$

Putaſſet minus peritus Analyſta quantitatem $\frac{x^2y}{aa} - \frac{3x^2}{a}$ inter ſolidas reponendam, adeoque nova incognita in reſolutionem introducta, totius analyſis ſeriem turbaſſet: ſed profecto deciperetur; nam ſi loco $\frac{x^2}{a}$ ponatur ſuus valor y, prædicta quantitas hanc induit formam $\frac{y^2}{a} - 3y$, & a planorum limitibus non egreditur, quod admonuiſſe ſufficiat.

Sed LG eſt $=$ EC, hoc eſt $= y - 2a$; ergo GC erit $= \frac{y^2}{a} - 4y + 2a$.

Hic tertia quantitate incognita in ſubſidium vocata, ne ad altiores gradus perveniamus, fiat magnitudo $y^2 = 5az$, & per conſequens $\frac{y^2}{a} - 4y + 2a$ erit $= 5z - 4y + 2a$.

Tandem quoniam ſimilia ſunt triangula BCD, GCM,

$$BC : CD :: GC : CM$$

$$a : x :: 5z - 4y + 2a : \frac{5xz}{a} - \frac{4xy}{a} + 2z.$$

Sed MH eſt $=$ FC ſcilicet $= \frac{xy}{a} - 3x$; igitur HC erit $= \frac{5xz}{a} + \frac{5xy}{a} + 5x$: ſed eadem HC ex hypotheſi eſt $= b$; ergo datur æquatio

$$\frac{5xz}{a} - \frac{5xy}{a} + 5x = b,$$ & reducta æquatione, aſſumptaque data c æquali quintæ parti ipſius b,

$$ax - ac = xy - xz.$$

In hac æquatione tres ignotæ continentur, hoc tamen non obſtante ut deſideratam conſtructionem aſſequamur, prædicta æquatio convertatur in ſequentem analogiam $x : a :: x - c : y - z$.

Quo-

Quoniam prima æquatio, in qua ſecunda ignota aſſumpta eſt, erat $x^2 = ay$, locus huic æquationi reſpondens erit ad parabolam. Vertice igitur A (Fig. 29.), & latere recto $= a$ intelligatur deſcripta parabole vulgaris ABC, & omnes abſciſſæ in trilineo parabolico, veluti AF, AG, vocentur x, omnes ordinatæ, puta FB, GC, vocentur y. Æquatio autem ſecunda erat $5az = y^2$. Vertice A, diametro AL, & parametro $= 5a$ deſcribatur altera parabola AHI, & ex puncto B utcumque accepto in prima parabola agatur linea BH parallela rectæ AG ſecans ſecundam parabolam in puncto H, & demiſſa normali HL, erit ſemper HL $=$ BF $= y$, & ſagitta LA $=$ tertiæ incognitæ z.

Denique ex ultima æquatione deducta eſt ſequens analogia $x : a :: x - c : y - z$. Sit $y - z = q$, & per conſequens $y = z + q$. Ex recta AF abſcindatur AD $= c$, hoc eſt $= \frac{b}{5}$, & ducta concipiatur AK faciens cum AL angulum ſemirectum. Fiat ſemper, ut AF $= x$ ad conſtantem a, ita DF $= x - c$ ad KM, quæ erit $= q$: ſed LK eſt $=$ LA $= z$: ergo LM erit $= q + z$, videlicet $= y$. His factis, puncto F inſiſtat perpendicularis FN $=$ LM $= y$, & per punctum N, aliaque ſimili modo inventa, tranſeat curva NCO occurrens parabolæ ABC in puncto C, & demiſſa normali CG, dico AG eſſe $=$ quæſitæ x, & ſic Problema per locum ſolidum, & curvam tertii gradus ſolutum eſt.

SCHOLIUM.

Quod ſi quis poſtularet æquationem localem exprimentem naturam curvæ NCO relatæ ad axem AG, ita procedat. Reaſſumatur ſupra expoſita proportio $x : a :: x - c : y - z$: loco z pono ſuum valorem $\frac{y^2}{5a}$; igitur $x : a :: x - c : y - \frac{y^2}{5a}$, & proportione in æqualitatem mutata, $xy - \frac{xy^2}{5a} = ax - ac$, & reducta æquatione, $5axy - xy^2 = 5a^2x + 5acz$, quam curvam ad tertium gradum pertinere manifeſtum eſt.

PROBLEMA III.

Triangulum iſoſceles conſtruere, cujus uterque angulus ad baſim ſit quintuplus anguli ad verticem.

HUjus Problematis reſolutio parum differt ab illa, qua in ſuperiori diſſertatione uſi ſumus, dum Eptagonum circulo inſcriberemus; hoc exemplum tamen omittendum non erat, ut cognoſceret Analyſta, qua ratione debeat a ſimplicioribus ad magis compoſita gradum facere.

Sit

Sit igitur jam factum, & quæsitum triangulum sit ABC (Fig. 30.) Alteruter angulorum ad basim, puta angulus ABC intelligatur divisus in quinque partes æquales, ductis lineis rectis DB, EB, FB, GB. Ponatur nota CB, vel $CA = a$, assumantur autem duæ ignotæ quantitates, nempe $CE = p$, & $EB = q$.

Quoniam similia sunt triangula ECB, EBF, habent enim angulum ad punctum E communem, & angulos EBF, ECB æquales ex constructione, erit

$$LC : CB :: EB : BF$$
$$p : a :: q : \frac{aq}{p}.$$

Ob eamdem rationem

$$EC : EB :: DB : EF$$
$$p : q :: q : \frac{q^2}{p},$$

adeoque $FC = p - \frac{q^2}{p}$.

Manifestum est, quod iisdem speciebus retentis, ulterius progredi non licet, nisi ascendendo ad gradus superiores. Ex methodo itaque generali novæ incognitæ in resolutione sunt introducendæ. Sit ergo $BF = \frac{aq}{p} = m$, & $FC = p - \frac{q^2}{p} = n$.

Ob similitudinem triangulorum FCB, FBG habentium angulum ad F communem, & angulos FBG, FCB æquales per constructionem, erit

$$FC : CB :: BF : BG$$
$$n : a :: m : \frac{am}{n}.$$

Et ob eamdem rationem

$$FC : FB :: FB : FG$$
$$n : m :: m : \frac{m^2}{n},$$

adeoque $GC = n - \frac{mm}{n}$.

Sed GC est æqualis GB ob angulos æquales GBC; GCB, ergo ventum est ad æquationem $n - \frac{mm}{n} = \frac{am}{n}$, vel $an + m^2 = n^2$, qui locus est ad hyperbolam.

Ad tollendam confuſionem præſtat huic primæ parti analyſis ſuam conſtructionem aptare. Quoniam ex ſuperiore æquatione erat $am + m^2 = n^2$, ſumpta infinita AK (Fig. 30, 31.) cui ad angulos rectos inſiſtat linea KI, & vocatis abſciſſa HK m, & ordinatim applicata KI n, intelligatur deſcripta hyperbola æquilatera HI præmiſſæ æquationi locali reſpondens. Supereſt, ut ex datis indeterminatis m, & n inveſtigemus relationem inter p, & q magnitudines ignotas in principio reſolutionis aſſumptas, & hoc pacto deſcribamus curvam localem, cujus omnes ſagittæ ſint $= p$, & ordinatæ $= q$.

Ex reſolutionis progreſſu erat $BF = m = \frac{aq}{p}$; ergo $\frac{mp}{a} = q$: ſed

EF erat $= \frac{q^2}{p}$; ergo loco q^2 poſito ipſius valore $\frac{m^2p^2}{aa}$, erit $EF = \frac{m^2p}{aa}$: ſed CF eſt $= n$, & $CE = p$; igitur datur æquatio $n + \frac{m^2p}{a^2} = p$;

vel $aan = aap - m^2p$, & æquatione in analogiſmum converſa,

$$a^2 - m^2 : a^2 :: n : p.$$

Fiat ut quadratum conſtantis a minus quadrato variabilis HK ad quadratum ejuſdem conſtantis, ita HI ad HM. Et rurſus quoniam erat $\frac{aq}{p} = m$, adeoque $a : p :: m : q$, fiat ut nota a ad HK, ita HM

ad MN, & per punctum N, aliaque puncta ſimili ratione determinata tranſeat curva HN, cujus coordinatæ ſint HM, MN, videlicet p, & q, atque hoc pacto deſcripta eſt prima ex curvis localibus neceſſaria ad perficiendam Problematis conſtructionem.

Tranſeamus modo ad ſecundam reſolutionis partem, & ad vitandas quantitates ſolidas, novis ignotis detur locus, ſitque DB, vel $AB = x$, & $DC = y$. Ob ſimilitudinem triangulorum CAB, ABD

$$CA : AB :: AB : AD$$
$$a : x :: x : \frac{xx}{a},$$

atque adeo CD erit $= a - \frac{xx}{a}$; ſed eadem CD ex hypotheſi eſt $= y$,

ergo perventum eſt ad æquationem $a - \frac{xx}{a} = y$, qui locus eſt ad para-

bolam. Abſcindatur $HP = a$, & vertice P, diametro PH, & parametro $= a$ deſcribatur parabole PRT, ſumptoque ad libitum in axe puncto Q, & ductis QR, RS, erit QR, vel $SH =$ indeterminatæ x, SR vero, vel $HQ = y$ alteri indeterminatæ.

De-

Deinde exiſtentibus ſimilibus triangulis DCB, DBE.

$$DC : CB :: DB : BE$$
$$y : a :: x : \frac{ax}{y}$$

ſed eadem BE eſt $= q$ ex his, quæ aſſumpſimus in primo membro reſolutionis; ergo data eſt æquatio $\frac{ax}{y} = q$, & per conſequens analogia

$y : a :: x : q$. Fiat ſemper ut $HQ = y$ ad $HP = a$, ita $SH = x$ ad quartam $HO = q$.

Ob eamdem rationem

$$CD : DB :: DB : DE$$
$$y : x :: x : \frac{xx}{y}$$

& ideo CE erit $= y - \frac{xx}{y} = p$ ex prima analyſis parte, & æquatione

in analogiſmum mutata, $y : x :: x : y - p$. Ponatur $y - p = z$; ergo $y - z = p$. Fiat ſemper ut $HQ = y$ ad $HS = x$, ita eadem HS ad quartam $HZ = z$, & ob id HQ exiſtente y, erit $QZ = y - z = p$. Puncto O inſiſtat normalis ON æqualis QZ, & per punctum N aliaque ſimiliter inventa tranſeat curva YNX, cujus coordinatæ HO, ON erunt, p & q. Dico hanc curvam eſſe localem ſecundam, quæ primam ſecando in puncto N Problema determinabit, eritque HO æqualis quæſitæ EB, & ON æqualis EC. Q. E. F.

SCHOLIUM PRIMUM.

Si quæſtio propoſita methodo vulgari tractanda ſit, ex ſuppoſitione, quod linea AC ſit $= a$, & $AB = x$, adhibita opportuna ſpecierum ſubſtitutione, niſi me calculus decipit, ſequens occurret æquatio

$$z - bx^2 + cx^4 - dx^6 + ex^8 - fx^{10} + gx^{12} - hx^{14} + x^{16} = x - ix^3 + kx^5 - lx^7 + x^9.$$

Hujus æquationis conſtructionem non ita facile inveniet Carteſianus Analyſta. Quod ſi tota res abſolvenda ſit per locos juxta Neothericorum placita, propoſitam æquationem reſolvere in duas æquationes locales quarti gradus, hoc opus, hic labor eſt. Interim noſtra methodus hoc ipſum nullo prorſus labore aſſequitur, unde ex hoc capite patet, quantum ex dictis Geometricæ Analyſi compendium acceſſerit.

SCHEDIASMA XIII.

De analogia inter æquationes analyticas, & poteſtates logarithmicas.

Mathematicus non infimæ notæ ſuper ſequens Problema propoſuit invenire numerum y, qui elevatus ad dignitatem quomodocumque affectam a poteſtatibus ſui logarithmi x, & conſtantibus, faciat productum æquale datæ magnitudini.

HAc quæſtione mihi communicata, dum illius ſolutionem tentarem, incidi in ſpeculationem omnino novam, & fortaſſe non injucundam, qua ſcilicet detegitur mirabilis profecto armonia, & correſpondentia inter poteſtates logarithmicas, & æquationes analyticas cujuſcumque gradus. Veritatem iſtam Mathematicam, ut pote fœcundam, & ad majora viam aperientem, perire non patior, adeoque tuo committendam judicio decrevi Vir Illuſtriſſ. & Eruditiſſ. ut qualiſcumque ſit meditatio mea tuo probetur, vel improbetur ſuffragio.

LEMMA PRIMUM.

Sit quicumque numerus y cujus logarithmus x ducatur in quantitatem b, & fiat productum bx, quod conſideretur tanquam magnitudo logarithmica: dico numerum huic quantitati logarithmicæ nempe bx, reſpondentem eſſe $=$ dignitati y^b. Demonſtratio hujus lemmatis pendet ex conceptu multiplicationis & ex geneſi logarithmorum. Multiplicare enim x per quantitatem b, nihil aliud eſt, quam totics ſumere magnitudinem x, quoties b continet unitatem. Atqui iterata additio in ſerie logarithmorum poſtulat iteratam multiplicationem in progreſſione numerorum; igitur numerus y toties in ſe ipſum multiplicari debet, quoties ſumitur ipſius logarithmus x, vel quot ſunt unitates in b, & per conſequens elevari ad dignitatem, cujus exponens ſit b. Q. E. D.

LEMMA SECUNDUM.

Logarithmus x aſcendat ad poteſtatem quamcumque m, numerus correſpondens dignitati logarithmicæ x^m poſito quod y ſit numerus logarith. x, quod & in ſequentibus ſemper intelligendum, erit $=yx^{m-1}$. Poteſtas x^m hanc novam inducat formam $x^{m-1}x$, & ſit $x^{m-1} = bx$. Per lemma autem ſuperius numerus reſpondens log. bx eſt $= y^b$, ergo, ſi loco quantitatis b ponas ſuum valorem x^{m-1}, erit yx^{m-1} numerus log. x^m Q. E. D.

LEM-

LEMMA TERTIUM.

Dignitas quæcumque x^m ducatur in quantitatem c, & fiat productum cx^m, quod habeatur pro magnitudine logarithmica: dico numerum huic quantitati respondentem esse $= ycx^{m-1}$. Potestas x^m in c est $= cx^{m-1}x$, & facto termino $cx^{m-1} = b$ erit dignitas $cx^m = bx$: sed logarith. bx numerus est $= y^b$; ergo si loco b ponas suum valorem cx^{m-1}, numerus dignitatis logarithmicæ cx^m erit $= ycx^{m-1}$. Q. E. D.

SCHOLIUM.

Propositiones conversæ horum Lemmatum non minus veræ sunt. Si proponatur E. G. dignitas logarithmica ycx^{m-1}, patet logarithmum hujus dignitatis esse $= cx^m$. De cæteris idem esto judicium.

Ut autem ostendam relationem, & correspondentiam inter dignitates logarith., & æquationes analyticas, sequentia Problemata propono.

PROBLEMA PRIMUM.

Propositum sit invenire numerum y, qui elevatus ad dignitatem sui logarithmi x faciat productum y^x æquale datæ quantitati b.

Quoniam $y^x = b$; ergo istorum numerorum logarithmi erunt inter se æquales: sed numeri dati b datur logarithmus c, & potestatis y^x logarithmus est $= xx$ ex converso secundi Lemmatis; igitur datur æquatio $xx = c$, & assumpta quantitate a loco unitatis, $xx = ac$, adeóque $a : x :: x : c$; igitur x est media proportionalis inter a, & c. Q. E. I.

Aliter.

Sit primus numerus in serie numerorum habens unitatem pro logarithmo $= z$ & numerus quæsitus y ponatur $= z^x$: evidens est, quod numeri z^x logarithmus erit $= x$. Quoniam vero numerus z^x elevari debet ad potestatem sui logarithmi, hoc est ad potestatem x, erit facta operatione $= z^{xx}$: sed numeri z^{xx} logarithmus est $= xx$; qui æqualis supponitur c logarithmico numeri b: ergo datur æquatio $xx = c$. Q. E. I.

PROBLEMA SECUNDUM.

Propositum sit elevare numerum y ad quamcumque potestatem sui logarithmi x, puta ad potestatem x^{m-1}, & facere productum $y^{x^{m-1}}$ æquale datæ quantitati b.

Quoniam $y^{x^{m-1}} = b$; ergo eorum logarithmi erunt æquales: sed dignitatis $y^{x^{m-1}}$ logarithmus est $= x^m$, & numeri b dati datus est logarithmus c, ergo ventum est ad æquationem $x^m = c$, & assumpta magnitudine a loco

eo unitatis, $x^m = a^{m-1}c$, & converſa æquatione in analogiſmum, $a^{m-1} : x^{m-1} :: x : c$. E. Q. I.

Si m ponatur $= 3$, erit $a^2 : x^2 :: x : c$, & per conſequens $x^3 = a^2c$, adeque x eſt prima ex duabus mediis proportionalibus inter unitatem a, & datam quantitatem c. Sit iterum $m = 7$; ergo $a^6 : x^6 :: x : c$ & ob id $x^7 = a^6c$; x igitur eſt prima ex ſex mediis proportionalibus inter a, & c.

Aliter.

Primus numerus in ſerie numerorum, cui convenit unitas pro logarithmo, ſit $= z$, & numerus quæſitus eſto z^m, cujus logarithmus, $= m$. Aſcendat quantitas z^m ad quamcumque poteſtatem ſui logarithmi, E. G. ad poteſtatem m^n, & fiat dignitas $z^{m \cdot m^n}$, vel quod idem eſt $z^{m^{n+1}}$: logarithmus hujus dignitatis erit $= m^{n+1}$ ergo dabitur æquatio $m^{n+1} = c$, & ſumpta unitate a evecta ad poteſtatem n, $m^{n+1} = a^n c$, quæ æquatio eſt ad tot medias proportionales, quot unitates continet exponens n, & ſemper magnitudo m erit p^{a}. in iſtis mediis proportionalibus.

PROBLEMA TERTIUM.

Propoſitum ſit elevare numerum y ad quamcumque dignitatem, cujus exponens componatur ex pluribus nominibus, & in qua indices poteſtatum ſint quæcumque poteſtates ſui logarithmi x per quaſcumque quantitates datas quomodocumque multiplicatæ, & oporteat facere hoc productum æquale magnitudini b.

Sit ex præſcripto quæſtionis E. G. numerus y elevatus ad poteſtatem $x^{n-1} + x^{s-1} + x^{t-1} + x^{v-1} = b$, & æquatio hanc novam induat formam.

$$y^{n-1} \cdot y^{s-s} \cdot y^{t-s} \cdot y^{v-v} = b.$$

Aſſumptis igitur per præmiſſa lemmata harum quantitatum logarithmis, & ſignis multiplicationis mutatis in ſigna additionis (evidens namque eſt multiplicationi in ſerie numerorum reſpondere additionem in ſerie logarithmorum) altera occurit æquatio

$$x^m + x^n + x^t + x^v = \log. b = c.$$

Facta autem denominatione in numeris quantitatum generalium m, n, p, q & poſito $m = 7$, $n = 5$, $p = 3$ $q = 1$, dabitur æquatio analytica aſcendens ad ſeptimum gradum $x^7 + x^5 + x^3 + x = c$. Q. E. I.

Sit altera dignitas $y^{n-1} + x^{s-1} + dx^{t-1} + fx^{v-1} = b$ & facta operatione, ut prius, & poſitis $m = 15$, $n = 7$; $p = 5$, $q = 3$, erit,

$$x^{15} + x^7 + dx^5 + fx^3 = c.$$

Alie

Aliter.

Sit z primus numerus in ſerie numerorum, cujus logarithmus eſt unitas, & z^x æquet quæſitum numerum y. Elevanda ſit z^x ad poteſtatem $x^m + dx^n$, habebitur $z^x \cdot x^{mx} + x \cdot dx^n = z^{x^{m+1} + dx^{n+1}}$, cujus numeri logarithmus $x^{m+1} + dx^{n+1} = c$, & poſitis $m=3$, $z=2$, erit.

$$x^4 + dx^3 = c:$$

Hinc patet correſpondentia inter omnes poſſibiles æquationes analyticas, & dignitates logarithmicas, quod hujus demonſtrationis ſcopus erat.

SCHEDIASMA XIV.

Theoria proportionum per exponentes.

1°. COmparatis inter ſe duabus magnitudinibus ratione aliqua ſe invicem reſpicientibus (rationem autem habere dicuntur eæ magnitudines, quæ multiplicatæ ſe mutuo ſuperare poſſunt) illud in primis manifeſtum eſt, quod prima A erit vel totum, vel pars reſpectu ſecundæ B; & cum relationes inter duas quantitates infinitæ eſſe poſſint, unica tantum locum invenit inter magnitudines determinatas A, B, eſtque modus ille peculiaris, quo fit, ut prima tot vicibus, & non pluribus, aut paucioribus contineat ſecundam, aut ſaltem partem aliquam ſive finitam, ſive infinitesimam ſecundæ.

2°. Sic numerus 8. bis continet numerum 4, & quatuor vicibus tertiam partem numeri 6, aut octies ſextam partem ejuſdem numeri 6. Hinc ſequitur, quod ſemper datur aliqua quantitas hujuſmodi relationem, ſeu melius continentiam exprimens, quæ a Geometris vocatur exponens rationis.

3°. Comparentur magnitudines A, & B, & ſit m ea quantitas, quæ exponat continentiam ipſius A reſpectu B: liquet, quod cum quantitas mB eodem modo, ac antecedens A contineat conſequens B, idem eſt ſcribere A, ac mB, ideoque relatio inter A, & B per exponentem rationis, hoc eſt per duos terminos mB, & B optime repræſentatur.

4°. Quod ſi invertatur ratio, & quæratur exponens rationis B: A, vel B: mB (eſt enim $mB = A$) divide utrumque terminum per m; igitur $B = \frac{A}{m}$, & collocando in ratione B: A, loco B valorem æqualem $\frac{A}{m}$, exprimetur ratio per magnitudines $\frac{A}{m}$: A, & tunc quantitas $\frac{1}{m}$ erit exponens rationis B: A.

Exem-

Exemplo rem declaro. Pono A = 8, B = 4. In ratione A ad B exponens m eſt = 2, quia A bis continet B: at in ratione B ad A eſt exponens $\frac{1}{m} = \frac{1}{2}$, quia B eſt dimidium ipſius A.

5°. His præhabitis, rationes æquales, ex quibus oritur proportio, ſunt eæ, quarum exponentes ſunt æquales. Sint quatuor magnitudines A : B :: C : D proportionales, hoc eſt eodem modo A contineat B, ac C continet D: ſi numerus, vel quantitas m exponit continentiam ipſius A relatam ad B; idem numerus, vel quantitas m deſſignabit pariter continentiam ipſius C relatam ad D; nam ſi ſecus eſſet, non exiſtentibus hinc inde continentiis æqualibus, eadem non eſſet proportio. Hinc ſi exprimo primam rationem A : B per terminos æquivalentes mB : B, debeo quoque exprimere ſecundam C : D per terminos æquivalentes mD : D, eritque mB : B :: mD : D.

6°. Sint modo quatuor magnitudines A, B, C, D: exponens rationis inter primas A, B ſit m, & inter ſecundas C, D ſit n, efferanturque more noſtro ſic mB : B, nD : D.
Ex dictis ſi $m = n$, dictæ magnitudines erunt proportionales: ſed ſi m ſit major quam n, tunc A magis continet B, quam C contineat D, & in hoc caſu dicatur major proportio A ad B, quam C ad D. Si vero quantitas m ſit minor quam n, tunc A minus continet B, quam C contineat D; & in iſto caſu dicatur minor proportio A ad B, quam C ad D.

Ex his principiis fluunt omnes argumentandi modi, quos adhibent Geometræ, & Euclides longo circuitu demonſtravit.

7°. In eadem ratione, in qua ſunt magnitudines A, B erunt eorum æquemultiplices nA, nB, vel partes ſimiles $\frac{A}{n}$, $\frac{B}{n}$.

Exponatur ratio A : B per ſuum exponentem, ſcribaturque mB : B. Jam quoniam A = mB, ſubſtituendo valorem ipſius A in magnitudinibus nA, $\frac{A}{n}$, erit nA = m . nB, & $\frac{A}{n} = \frac{mB}{n}$. Hinc cum rationes nB : B = m . nB : nB = $\frac{mB}{n}$: $\frac{B}{n}$ habeant idem exponens m, ita erit

mB, vel A : B :: m . nB, vel nA : nB :: $\frac{mB}{n}$ vel $\frac{A}{n}$: $\frac{B}{n}$. Q : E. D.

Euclides ſtatuit quatuor terminos A : B :: C : D, tunc eſſe in eadem ratione, quoties auctis eadem multiplicatione antecedentibus, hoc eſt prima, & tertia quantitate, auctis etiam alia quacumque multiplicatione conſequentibus, hoc eſt ſecunda, & quarta, ſemper evenit, ut ſi multiplex primæ eſt majus multiplice ſecundæ, multiplex tertiæ ſit etiam majus multiplice quartæ, & ſi eſt æquale, aliud ſit etiam æquale, & ſi eſt minus, ſit etiam minus.

8°. Hanc magnitudinum proportionalium affectionem inter Theoremata, non inter axiomata colloco, & ſic demonſtro. Sint quatuor quantitates proportionales A: B:: C: D, vel (n°. 3°.) m B: B:: mD: D. Multiplicentur termini antecedentes per quamcumque magnitudinem p, & conſequentes per aliam quamcumque q, & ſint pmB: qB:: pmD: qD. Sit modo pm major quam q; ergo tam pmB erit major ipſa qB, quam pmD ipſa qD; nam cum multiplicatio non ſit niſi repetita additio, exiſtente A majore quam B, etiam 2A major erit quam 2B, 3A quam 3B, & ſic deinceps; igitur etiam factum pA facto pB majus erit.

Sit ſecundo loco $pm = q$; ergo pmB $= q$B, & pmD $= q$D, æquales enim quantitates multiplicatæ per æquales gignunt producta æqualia.

Sit denique pm minor quam q; ergo pmB minor quam qB, & pmD minor quam qD, quæ omnia erant demonſtranda.

9°. Rurſus ſint quatuor magnitudines A, B, C. D, & ſit exponens rationis A: B quantitas m, & quantitas n ſit exponens alterius rationis C: D, ponaturque m major, quam n. Sumantur æque multiplices more Euclideo pmB, qB; pnD, qD. Fieri poteſt, ut ita determinentur magnitudines multiplicantes p, & q, ut ſit $pn = q$, & pnD $= q$D. In hac hypotheſi cum ſit m major quam n, erit etiam pm major quam pn; ſed $pn = q$; ergo pm major quam q, & pmB major quam qB.

Ex dictis autem conſtat, quod A: B majorem habet rationem quam C: D, cum exponens m rationis A: B ſupponatur majus exponente n alterius rationis C: D; contingere itaque poteſt, quod ſumptis æquemultiplicibus, ut præſcribit Euclides, multiplex primæ ſit majus multiplice ſecundæ, & multiplex tertiæ non ſit majus multiplice quartæ, ſed vel æquale, vel minus, & hoc in caſu erit major ratio primæ ad ſecundam, quam tertiæ ad quartam. Quod ſi oppoſitum evenit, minor erit ratio primæ ad ſecundam, quam tertiæ ad quartam.

10°. Eſt etiam alia inſignis proprietas quantitatum proportionalium, quod factum ſub extremis æquale ſit facto ſub mediis. Sint quatuor magnitudines A, B, C, D, ſitque ut A: B ita C: D: dico productum ex extremis A in D æquale eſſe producto ſub mediis B in C. Utrobique eſt eadem ratio; ergo & idem exponens m; ergo mB: B:: mD: D: factum autem tam ex extremis quam ex mediis eſt mBD; igitur manifeſta eſt æqualitas.

11°. Dico inſuper, quod ſi duo producta ſint æqualia, puta A.D $=$ B.C, erit A: B:: C: D. Si vera aſſertio non eſt, habeat 1°. G°. A: B minorem rationem quam C: D; ergo datur magnitudo aliqua major ipſa A, quæ ad B habet eamdem rationem, quam C: D, & hæc magnitudo ponatur A $+$ N.

Jam cum ex ſuppoſitione ſint proportionales A $+$ N: B:: C: D; ergo (n.10.) factum ſub extremis æquatur facto ſub mediis, hoc eſt AD $+$ ND $=$ BC: ſed ex hypotheſi AD $=$ BC, ergo AD $+$ ND $=$ AD, vel totum parti, quod eſt abſurdum.

12°. Ajo poſtremo, quod ſi factum AD ſit majus facto BC, erit major ratio A: B, quam C: D. Quoniam productum AD majus eſt producto

sto BC, huic addo aliud productum NC, ut fiat æqualitas AD = B + N. C; igitur (n. 11.) A : B + N :: C : D; sed A magis continet B, quam B + N; ergo major est ratio A : B, quam A : B + N : sed A : B + N :: C : D; ergo major est ratio A : B quam C : D.

Et si sit major ratio A : B, quam C : D, factum AD majus erit facto BC; & contra si sit minor ratio A : B, quam C : D, factum AD minus erit facto BC.

Demonstro nunc omnes argumentandi modos a Geometris adhiberi solitos.

Conversa ratio.

13°. Esto A : B : : C : D : dico B : A : : D : C

Sit *m* exponens tam rationis A : B quam C : D; ergo (n. 4.) $\frac{1}{m}$ erit exponens tam rationis B : A, quam D : C; igitur æquali existente utrobique exponente, B : A : : D : C.

14°. Sit major ratio A : B, quam C : D: dico quod ratio conversa B : A minor erit, quam D : C. Exponens rationis A : B sit *m*, & rationis C : D sit *n*; erit *m* major quam *n*, $\frac{1}{m}$ minor quam $\frac{1}{n}$: sed $\frac{1}{m}$ est exponens rationis B : A, & $\frac{1}{n}$ rationis alterius D : C, ergo minor est ratio B : A, quam D : C.

Aliter.

Sit A : B : : C : D: erit factum BC = facto AD; ergo B : A :: D : C.

Similiter demonstratur numerus 14. Quoniam major ratio A : B, quam C : D; ergo factum BC minus quam AD; ergo minor ratio B : A, quam D : C per num. 12.

Alternata seu permutata ratio.

15°. Esto A : B : : C : D: erit alternando, vel permutando A : C :: B : D; nam cum sit *m*B : B : : *m*D : D, erit *m*B : *m*D :: B : D, consule numerum septimum.

16°. Hinc si sit major ratio A : B, quam C : D, exponens *m* rationis A : B majus erit exponente *n* rationis C : D; ergo *m*B magis continet *n*D, quam B contineat D : ergo permutando major erit ratio *m*B : *n*D, vel A : C, quam B : D.

Aliter.

Quoniam eſt A : B :: C : D ; ergo AD = BC = CB, ergo A : C :: B : D.
Si ſit major ratio A : B, quam C : D ; ergo AD major quam CB ; ergo major ratio A : C, quam B : D. (n. 12.)

Compoſitio rationis.

17°. Sit A : B :: C : D : dico componendo ita eſſe A + B : B :: C + D : D. Loco A ſcribe *m*B, & loco C ſcribe *m*D ; ergo

$$mB + B : B :: mD + D : D, \text{ vel}$$
$$\overline{m+1}.B : B :: \overline{m+1}.D : D:$$

& cum utrobique ſit idem exponens $m + 1$, utrobique erit eadem ratio.
Sit major ratio A : B quam C : D : dico componendo A + B : B majorem habere rationem quam C + D : D.
Demonſtratio facilis eſt. In prima ratione exponens eſt $m+1$, in ſecunda $n+1$, & cum m ſit major quam n, etiam $m+1$ major erit quam $n+1$; ergo &c.

Aliter.

Si A : B eſt in eadem ratione cum C : D, factum ſub extremis æquale erit facto ſub mediis ; ergo AD = BC, & addito hinc inde BD erit AD + BD = BC + BD, vel $\overline{A+B}.D = B.\overline{C+D}$; ideoque A + B : B :: C + D : D.

Diviſio rationis.

18°. Sit A : B :: C : D, erit dividendo A − B : B :: C − D : D. Exponens utrobique eſt $m-1$; ergo &c.
Si major ſit ratio A : B, quam C : D, dividendo erit major ratio A − B : B, quam C − D : D. Exponens primæ rationis eſt $m-1$, ſecundæ $n-1$. Porro ſi m major quam n, etiam $m-1$ major erit quam $n-1$.

Aliter.

Quoniam AD = BC ; ergo AD − BD = BC − BD ; ergo A − B : B :: C − D : D, quæ diviſio eſt rationis.
Quod ſi AD major eſt ipſa BC, etiam AD − BD major erit BC − BD ; ergo major erit ratio A − B : B, quam C − D : D. Q. E. D.

Converſio rationis.

19°. Si ſit A : B :: C : D, erit per converſionem rationis A + B : A :: C + D : C.

Quoniam A : B :: C : D ; ergo convertendo B : A :: D : C, & componendo B + A : A :: D + C : C.

20°. Si A : B majorem rationem habuerit, quam C : D, per converſionem rationis erit minor ratio A + B : A quam C + D : C. Demonſtratio eſt eadem.

Demonſtrari quoque poteſt converſio rationis per exponentes; in analogia enim A + B : A : : C + D : C

exponens utrobique eſt $\frac{m+1}{m}$.

Factum pariter ſub extremis eſt AC + BC, & factum ſub mediis eſt AC + AD ; ſed BC = AD ; ergo AC + BC = AC + AD ; id eſt $\overline{A+B}$. C = A . C + D ; ergo ex æqualitate oritur analogia prædicta.

Sequitur, quod ſi ſit A : B :: C : D, erit quoque A − B : A :: C − D : C, vel B − A : A :: D − C : C.

21°. Si fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam, reliqua ad reliquam erit, ut tota ad totam, hoc eſt ſit A : B :: A − P : B − Q, erit pariter A : B :: P : Q. Demonſtratio ex antecedentibus facile deducitur.

Ordinata ratio.

22°. Si fuerit ut A : B, ita P : Q, & ut B : C, ita Q : R, erit ex æquo ordinate A : C :: P : R.

Diſponantur tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres P, Q, R. Sit exponens rationum A : B :: P : Q quantitas *m*, & ſit quantitas *n* exponens rationum B : C :: Q : R ; ergo A = *m*B, P = *m*Q, B = *n*C, Q = *n*R ; ſic ergo ſtabunt magnitudines A = *m*B, B = *n*C, C ; P = *m*Q ; Q = *n*R, R, & extremæ ex utraque parte *m*B : C :: *m*Q : R. Loco B colloca ſuum valorem *n*C, & loco Q colloca ſuum valorem *n*R ; ergo *mn*C : C :: *mn*R : R ; ſed utrobique eſt idem exponens *mn*, ergo ultimæ quatuor quantitates ſunt proportionales. Sed *mn*C = A, & *mn*R = P ; ergo ſunt etiam proportionales A : C :: P : R. Q. E. D.

23°. Si ſit major ratio A : B, quam P : Q, & rurſus major ratio B : C quam Q R, erit major ratio A : C, quam P : R. Quoniam major ratio A : B, quam P : Q, erit permutando major ratio A : P quam B : Q : & quia eſt major ratio B : C, quam Q : R, erit etiam permutando major ratio B : Q, quam C : R : ergo multo major ratio eſt A : P, quam C : R ; igitur permutando erit major ratio A : C, quam P : R.

Ali-

Aliter.

Quoniam proportionales ſunt A : B :: P: Q; ergo AQ = PB. Iterum quoniam proportionales ſunt B: C:: Q : R; ergo BR = CQ, & multiplicando utrumque membrum ultimæ æqualitatis per P, PBR = PCQ: ſed PB = AQ; ergo AQR = PCQ, & dividendo per Q, AR = CP; ergo A: C::P:R . Q:E:D:.

Perturbata proportio.

24°. Si ſint tres magnitudines, & aliæ totidem in eadem ratione perturbata, etiam extremæ proportionales erunt
A, B, C : P, Q, R, S. Sint tres magnitudines A, B, C, & aliæ totidem P, Q, R in eadem ratione perturbata, hoc eſt ſit A : B : : Q : R, & B : C : : P : Q: dico A : C : : P: R.
Addatur quantitas S, ita ut ſit B: C : : R: S: & quoniam A · B :: Q: R, & B: C:: R : S, erit ex æquo ordinate (num.23.) A: C:: Q : S: Sed B : C : : P: Q:: R : S: ergo permutando, P: R:: Q: S : ſed A :C:: Q:S; igitur A : C:: P: R.

Per exponentia proportionis ſic,

A , B , C; P , Q , R , vel

mB, $B = nC$, $C : nQ$, $Q = mR$, R.

Loco B ſubſtitue valorem nC, & loco Q valorem mR; ergo $mnC = A : C ::$ $mnR = P$: R: & cum utrobique inveniatur exponens mn, patet veritas propoſitionis.

Aliter.

A : B:; Q: R; ergo AR = BQ. Rurſus quoniam B: C:: P: Q; ergo BQ = CP; igitur AR = CP; ideoque A: C:: P: R.

Sit major ratio A: B, quam Q: R, & major ratio B: C, quam P : Q; erit major ratio A: C, quam P: R. AR maior eſt quam BQ, & BQ major quam CP; ergo AR multo major quam CP; quare patet propoſitio.

25°. Sit A : B::C : D, ſitque E : B:: F: D:dico A+E: B: :C+F: D. Prima analogia convertitur in æqualitatem AD = BC, ſecunda in aliam æqualitatem ED = BF; ergo AD + ED = BC + CF; ergo tranſeundo ab æqualitate ad alteram analogiam, A + E:: C + F: D.

Hæc eſt propoſitio 24 Euclidis, ſed ex hypoteſi nonnullæ aliæ illationes deducuntur.

Quoniam AD = BC; ergo $\frac{AD}{C} = B$; & quoniam ED = BF, ergo

ED

F.D=B; ergo AD=ED, vel dividendo per D, $\frac{A}{F}=\frac{E}{F}$; ergo A:C::E:F.

Rurſus quoniam AD=BC, & ED=BF, erit AD−ED=BC−BF; ergo A−E: B:: C−F: D.

26°. Sint quatuor magnitudines proportionales A: B:: C: D, & ſit maxima magnitudo alterutrum antecedens puta C: dico conſequens B eſſe minimam magnitudinem. Et primo cum ſit C: D:: A: B, & C ſit major quam D, erit A major quam B.

Secundo quoniam C: D:: A: B, erit permutando C: A:: D: B: ſed C major quam A; ergo D major quam B, ergo B erit omnium minima.

Deinde ſit maxima quantitas alterutrum conſequens, puta D, antecedens A erit minima: nam convertendo, D: C:: B: A; ergo patet ſecunda pars propoſitionis.

Tandem ajo, quod aggregatum ex maxima, & minima majus eſt aggregato reliquarum.

Sint proportionales A+B: C+D:: A: C, ſitque A+B maxima, erit C minima. Summa ex maxima, & minima eſt A+B+C. Summa reliquarum eſt A+C+D

Quoniam A+B: C+D:: A: C; ergo permutando A+B: A:: C+D: C, & dividendo, B: A:: D: C, & permutando, B: D:: A: C: ſed C utpote minima, eſt minor quam A; ergo D minor quam B; igitur A+B+C major quam A+D+C. Q. E. D.

De rationum compoſitione.

Nihil utilius in tota Geometria, quam rationum compoſitio, & diviſio; vix enim demonſtratio aliqua majoris momenti abſque earum ſubſidio eleganter perficitur.

27°. Sint magnitudines A, C, inter quas interponatur media quæcumque ad libitum B, & ordine collocentur A, B, C. Quæritur quomodo ratio primæ A, & tertiæ C exprimi queat per rationes primæ A ad ſecundam B, & ſecundæ B ad tertiam C.

Exponens rationis A: B ſit *m*, & rationis B: C ſit *n*, & ſcribatur *m*B, B=*n*C, C. Loco B in primo termino ſubſtitue valorem *n*C, & habebimus *mn*C=A, *n*C=B, C; igitur ratio A: C, vel *mn*C: C conſtituitur ex exponentibus rationum A: B, & B: C in ſe invicem multiplicatis.

Ratio itaque primæ ad tertiam dicatur compoſita ex rationibus primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam, quia ſi harum exponentia invicem multiplicentur, componunt exponens rationis primæ ad tertiam.

28°. Datis quotcumque quantitatibus ſequenti ordine diſpoſitis A, B, C, D, E, &c., ratio primæ ad ultimam componitur ex rationibus omnium mediarum, hoc eſt ſint exponentia rationum A: B=*m*, B: C=*n*, C: D=*p*, D: E=*q*, exponens rationis A: E erit=*mnpq*.

Quo-

SCHEDIASMA XV. (*)

De Organica Curvarum Tractoria, atque Logarithmica Conſtructione a Viro Celeberrimo Joanne Poleno inventa.

JACOBUS RICCATUS JOANNI POLENO.

S. P. D.

QUæ duo a Te excogitata, atque inventa Inſtrumenta ſunt, ut curvas binas, Logarithmicam, & Tractoriam, hodiernæ Geometriæ apprime neceſſarias, quæque numero cenſentur Traſcendentium Curvarum, mechanice deſcriberes expendi diligenter; mirificeque ſum iiſdem delectatus. Ac quod noſtro hoc genere rectiſſimo æſtimantem facere oportet, ut traducat ad periculum, ſemel ipſe iterumque tranſtuli. Re admiratione haud levi, ſic inveni: eas lineas inde oriri, & mihi exiſtere, quas utpote natura ſua, ac indole obſcuras & difficiles, mente dumtaxat, & cogitatione antea perceperam; ita porro clare ac diſtincte eas deſcribi, ut ne notæ quidem vulgo Coni Sectiones certius in plano, ac luculentius delineari ratione ulla mihi poſſe videantur. Sed ex rebus omnibus puram ſimplicemque rationem demiratus ſum, qua rem ipſam ſtruis ex proprietatibus earumdem Curvarum, quarum altera Tangentem, Subtangentem altera conſtantem jugiter habet. Cæterum hæc ipſa ſimplicitas, quæ tantopere adamatur, cum prima exiſtere, & apparere deberet, latens tamen eſt, detegiturque extrema: quo fit, ut ego putem, in quocumque artificio difficillimum eſſe videre, ac cernere, quam facile ad exitum propoſita res perduci queat. Namque poſt Neperum id inſtituerunt Mathematici, ut plurimum operæ ac ſtudii Logarithmicæ tribuerent, & aliquanto poſt de Tractoria cogitarunt. Earum proprietates illuſtravere, atque ad quadraturas, rectificationes, menſuras corporum ſolidorum, horumque ſuperficierum uſque penetrarunt. At nemo unus adhuc inventus eſt, qui de organica conſtructione Curvæ utriuſque cogitaverit, aut tanquam Problema aliquod propoſuerit. Tu tamen rem inveſtigaſti, nobiſque eodem tempore feliciſſime adaperuiſti.

Renatus Carteſius, Vir de Mathematicis Scientiis oprime meritus, nullam aliam ob cauſſam curvas Traſcendentes repulit a Geometria, niſi quod ea ratione illi non occurrerent, qua exprimere Curvarum naturam conſuevit; analyticis nimirum æquationibus, quas quantitates duæ

(*) *Dopo la lettera del Signor Marcheſe Poleni al Sig. Jacopo Ermanno ſtampata in Padova l'anno 1729., che tratta dell' Organica Conſtruzione della Trattoria, e della Logarithmica, leggeſi la preſente del noſtro Autore.*

indeterminatæ ingrederentur. Sed hoc haud recte factum ab Renato, qui sic æxistimavit, tam longe porrigi Geometriæ fines, quam suæ methodi regio proferretur.

Mihi præ cæteris Newtoni, Viri incomparabilis, sententia probatur. Sic enim ille æxistimabat, ut in Geometria Elementari, ceu bina Postulata, assumebantur ductus rectæ lineæ de puncto ad punctum, atque descriptio circuli ad quodlibet intervallum, ita in sublimiori id contingere, ut Curvarum Constructiones totidem sint Postulata; quæ deinde ad indolem Problematum pertineant; quorum solutio a Mechanica, non a Geometria sit expectanda. Munus est Geometræ investigare, & expandere Curvarum naturam; ideam illarum exprimere distinctam; idque palam facere, qua ratione progignantur; denique ex earum origine commonstrare, eas non contradicentium numero, sed ejusmodi rerum, quæ fieri possunt, contineri. Ac quamdiu proprietatibus illarum utitur, ut propositis quæstionibus difficilioribus satisfaciat, res versatur ipsa in contemplatione sola: cum vero hinc ad usum operamque rem traducit, Mechanica sæpissime opus est, & iis instrumentis, quæ ad manum pertinent. Porro Mechanica motu opportune uti solet, quem tamen Ars temperet, ac moderetur. Ad Artem vero spectat, adjuncta omnia versare in singulas partes, & expendere vel defectus ipsos materiæ, a qua omnino abstrahit Geometria. Qui trahens pondus aliquod, obligatum funi, arbitraretur, ea ratione, se describere Tractoriam, aut Catenariam, binis clavis funem suspendens, aut Elasticam chalibys flectens laminam; curvarum istiusmodi ob oculos haberet rudem quamdam imaginem: materies enim ad eas curvas perfecte referendas nequaquam est accomodata. Et multa quidem præterea hujusmodi addere possem exempla.

Qui curvarum focis, funiculisque adhibitis, curvas describunt, accuratius rem tractant; dum tamen ne foci multiplicentur, & funiculi, namque si hi frictionibus sint pluribus obnoxii, inæqualiter extenduntur: resque minus procederet, cum infiniti foci essent; & cum funiculum adaptari oporteret alicui curvæ, ut in Evolutis Hugenii. Neque hoc prodest, filorum loco substituere catenulas, cum, curvæ loco, tunc polygonus conformetur.

Mea est igitur sententia, ex omnibus constructionibus mechanicis illas plurimi faciendas, quæ conficiuntur per instrumenta solidis, firmisque regulis formata, in quibus nullus esse locus potest incommodis, quæ commemoravi. Neque quicquam aliud, ut res undique perfecta sit, requiritur, nisi ut organi constructio accurata, ac simplex sit. Ex veteribus autem Nicomedes nobis ejusmodi exemplum reliquit, & quidem præclarum, in Conchoidis constructione, & ex novissimis nonnulla habemus pro aliquibus curvis ex numero analyticarum.

Ad Te autem unum ea jure pertinebit laus, quod curvas Trascendentes (ut ita dicam) indole asperas quodammodo mansueseceris; deque contemplatione ad operam, ex Geometria ad Mechanicam transtuleris. Instrumentis a Te nuper inventis, nihil aut ad rem aptius, aut simplicius potest excogitari.

Quod

Quod ad uſum attinet, quis ignorat, Traſcendentes quæſtiones partem magnam ad Hyperbolæ quadraturam referri, aut ad Logarithmicæ deſcriptionem? Sint Problemata, aut localia, aut determinata; hoc eſt ſive adhibenda ſit integra Curva, aut ejus pars aliqua; vel ſecari ipſa debeat ab aliqua nota alia curva, ut ſignari poſſint quæſita puncta: cum Geometra arbitrabatur, ſe tandem induſtriæ, & inveſtigationis ſuæ finem attigiſſe, ſic inveniebat etiamnum circum initia ſe quodammodo verſari. Itaque neceſſe illi erat approximationum methodis uti; ac vel Series, vel Logarithmorum tabulas adhibere: hacque ratione, Geometriæ cancellis veluti egreſſus, in fines Arithmeticæ pertranſire.

Geometra deinceps uſum Logarithmicæ, ac Tractoriæ perinde retinere facile poterit, ac ſi una uſurus eſſet aliqua Coni Sectione, atque, ferme dixi, circulo ipſo. Cæterum, ut opus tantopere utile omnino perficiatur, fine Tu, ut hoc Ego iniiciam, ut tibi ponas etiam ante oculos Curvas, quibus arcuum circularium rectificationes continentur; quemadmodum Cyclois, Linea item ſinuum, aut alia quæpiam analoga, tentando hoc maxime, ut organice deſcribantur. Ita enim fiet, ut Mechanica, & Geometria novo, neque minore, invento adaugeantur. Præſtare hæc poſſe melius Te neminem puto, qui in iſtiuſmodi rebus non contemplandis modo, ſed etiam perſequendis excellis. Vale.

Caſtroſranco X. Kal. Apr. CIↃIↃCCXXVIIII.

SCHEDIASMA XVI. (*)

Scientiæ Dynamicæ Elementa.

CAPUT PRIMUM.

De legibus virium ſollicitantium.

DE materiæ atttibuto primario diſputent inter ſe Phyſici, & Metaphyſici. Mathematici eſt eas corporum proprietates contemplari, quæ ex Phænomenis manifeſtæ ſunt.

Quantitas materiæ cujuſque corporis, quam maſſam deinceps vocabimus, eſt complexus omnium particularum corpus componentium.

Volumen cujuſque corporis eſt ſpatium a materia corporis occupatum ſimul cum interpoſitis poris.

Ex collatione maſſæ cum volumine reſultat corporis denſitas, quæ eſt ratio, quam materiæ quantitas in quolibet corpore habet ad cor-

 poris

(*) *Queſto Schediaſma era compiuto nel* 1722., *trovandoſi nominato in una lettera* 10. *Marzo* 1722. *del Conte Giovanni Rizzetti all' Autore.*

poris volumen. Ut ſi corpus in maſſam poris carentem intelligatur colliquatum, eadem maſſa erit ſub minori volumine, & ſub majori denſitate.

Raritas eſt corporum qualitas denſitati reciproca conſiſtens in ratione voluminis ad maſſam, ſeu materiæ quantitatem.

Ex hiſce definitionibus fluunt ſequentia conſectaria. Dicantur corpora inter ſe comparata C, *c*, eorum maſſæ M, *m*, volumina V, *u*, denſitates D, *d*, raritates R, *r*.

1. Quantitates materiæ, ſeu maſſæ M, *m* ſunt in ratione compoſita denſitatum D, *d*, & voluminum V, *u*; hoc eſt M : *m* :: DU : *du*. Nam $D = \frac{M}{V}$, & $d = \frac{m}{u}$ ergo $D : d :: \frac{M}{V} : \frac{m}{u}$, vel M : *m* :: DV : *du*

2. Habebimus ergo M*du* = *m*DV, & mutata æquatione in analogiam, $V : u :: Md : mD :: \frac{M}{D} : \frac{m}{d}$, hoc eſt volumina erunt in ratione compoſita directa maſſarum, & inverſa denſitatum.

3. Sed denſitates ſunt reciproce ut raritates, ergo volumina ſe habent in ratione compoſita ex directa maſſarum, & directa raritatum, ſcilicet V : *u* :: MR : *mr*.

4. $M : m :: \frac{V}{R} : \frac{u}{r}$, ſeu maſſæ erunt inter ſe directe ut volumina & reciproce ut raritates. Reliqua omitto, quæ facile ex formula deduci poſſunt.

Motus corporis eſt translatio ejuſdem corporis de loco in locum, ſeu ſucceſſiva applicatio corporis diverſis partibus ſpatii immobilis.

In motu conſideratur vis generans, & conſideratur vis genita. Prima vocatur vis mortua, ſecunda vis viva, vel hæc ſimpliciter vis, & illa ſollicitatio.

Vis mortua ea eſt, quæ ſenſibilem effectum non producit, & ex qua ullus motus actualis non reſultat niſi aliquandiu in corpore continuata, & replicata fuerit. Talis vis foret unicus tantum gravitatis impulſus, nullis aliis ei ſuccedentibus. Etenim niſi poſt infinitos demum gravitatis ictus indefinenter replicatos motus ſenſibilis gravi non acquiritur.

Ut hæc doctrina clarius intelligatur, conſidero corpus grave cadens ex quiete, quod tempore finito acquirit determinatum motum, ſeu gradum celeritatis. Cum gravitas conſtanter agat, & mobile tranſeat per omnes velocitatis gradus, neceſſe eſt, ut primus impulſus gravitatis gradum infinitefimum velocitatis producat, ex quo ſequitur, quod ſi gravitas per ictus repetitos non ageret, non ederet ſenſibilem effectum.

Vis viva cum motu jam acquiſito conjuncta eſt, & eſt aggregatum actionum omnium virium mortuarum, quæ ſucceſſive operantur. Impetus enim corpori communicatus licet minimus, conſervatur in corpore, & infiniti impetus ſimul additi vim vivam conſtituunt.

Sicut

Sicut ex vi mortua generatur, ut dictum eſt, vis viva, ita ex viva generatur vis mortua. Finge pilam data celeritate motam impingere in chordam tenſam, & elaſticam; manifeſtum eſt pilam inflectendo chordam totum ſuum motum amittere, & rurſus chorda ſeſe reſtituente, amiſſum motum pilæ communicari.

Velocitas, quæ conſideratur in corpore moto, ſemper ad tempus refertur, dicimuſque corpus illud velocius, quod minori tempore idem ſpatium pertranſit. Hinc ſi velocitas eſſet uniformis, ſe haberet ſemper directe ut ſpatium, & inverſe ut tempus. Frequentiſſime tamen velocitas eſt variabilis, hoc eſt vel creſcens, vel decreſcens, & tunc ad uniformem reducenda eſt. Dico igitur velocitatem percurrere uniformiter ſpatium infinitefimum.

Sit velocitas variabilis, qua percurratur ſpatium minimum *ds*: in principio hujus ſpatii velocitas erit *u*, & in fine ejuſdem ſpatii erit $u \pm du$; ſupponitur enim creſcere, vel decreſcere: atqui $u \pm du = u$; ergo dictum ſpatium *ds* in hac hypotheſi percurritur velocitate variabili quidem, ſed quæ pro uniformi aſſumi poteſt.

Quantitas motus menſuratur a maſſa ducta in velocitatem. Hinc ſi quantitas motus vocetur *q*, habebimus $q = mu$.

Axiomata.

Corpus non impeditum perſeverat in ſtatu ſuo, hoc eſt ſi quieſcit, ſemper quieſcit, niſi ab altero corpore impellatur, & ſi movetur, ſemper movebitur eadem velocitate, niſi in alia corpora impingat, quibus communicet motum.

Motus de ſe fit ſemper per lineam rectam; nulla enim eſt ratio, ut corpus ſurſum, vel deorſum, vel ad dextram, vel ad ſiniſtram deflectat, niſi aliqua vi a recto itinere abducatur.

Corpus movetur ſemper per directionem, qua moveri incepit; eſt enim indifferens ad quamcumque directionem, & per conſequens ad aliquam determinari debet a vi impellente.

Actio eſt ſemper æqualis, & contraria reactioni. Corpus tantum agit, quantum patitur. In hac lege fundatur vis paſſiva corporum, quæ venit nomine inertiæ. Hæc vis in corporibus quieſcentibus ſe ſatis prodit. Etenim corpus quodcumque A in aliud quieſcens B impactum, aliquid de ſua vi, & motu amittit. Ex quo patet corpus quieſcens B habere aliquam vim paſſivam ſuperandam a corpore incurrente A: alioquin impellens A poſt occurſum nihil de ſuo motu amiſiſſe debuiſſet. Cum corpus quieſcens B, ſi reſiſtendi facultate careret, alterius motuis nullam remoram afferret.

Hæc lex ſemper præ oculis habenda eſt, nam hac neglecta peccamus contra ſequens axioma. Vis igitur quocumque modo agit, agendo aliquid amittit de propriis viribus.

Cauſſa eſt ſemper proportionalis effectui, neque edere poteſt effectum ſe ipſa majorem.

Sol-

Sollicitatio, ſeu vis mortua, quæ agit per tempus, vel ſpatium infinitesimum, licet ſit variabilis, conſtanter agit. Conſer quæ dicta ſunt de velocitate.

De ſollicitationibus verticalibus.

THEOREMA PRIMUM.

Si quæcumque vis mortua, vel ſollicitatrix, dato tempore coſtanter agat, erit proportionalis quantitati motus, quæ dato tempore generatur. Nam vi manente conſtante, quo major eſt maſſa movenda, eo minor velocitas, & e contra. Inſuper poſitis maſſa, & tempore conſtantibus majori vi major velocitas reſpondet. Demum poſitis conſtantibus, tempore, & velocitate, quo major eſt maſſa movenda, eo magis requiritur vis motrix. Si hæc ſecus fuerint, effectus non eſſent proportionales ſuis cauſſis, vel ſollicitatio per totum tempus non ageret uniformiter, quorum primum abſurdum eſt, ſecundum vero contra hypotheſim.

Hinc ſit vis $= f$, tempus $= dt$; per tempus enim infinitesimum quæcumque vis variabilis conſtanter agit. Sit pariter maſſa $= m$ & fluxio velocitatis dato tempore dt acquiſita $= du$: habebimus ſemper $fdt = mdu$, ex qua formula omnia Theoremata ad hanc rem pertinentia deduci poſſunt.

THEOREMA SECUNDUM.

Si corpus velocitate determinata infinitesimo tempore percurrat ſpatium infinitesimum, ſemper erit velocitas $u = \frac{ds}{dt}$. Cum enim ſpatium minimum ds percurratur, ut dictum eſt, velocitate uniformi, eo major erit velocitas, quo dictum ſpatium percurritur minori tempore; & e contra. Igitur velocitas quæcumque variabilis ſeſe habet directe ut fluxio ſpatii, inverſe ut fluxio temporis.

Ex aſſignata formula collige, ſpatium ſervare proportionem compoſitam velocitatis, & temporis, & tempus ſe habere directe ut ſpatium, inverſe ut velocitatem.

THEOREMA TERTIUM.

Momentum velocitatis eſt ſemper ut vis ducta in elementum ſpatii directe, & ut maſſa reciproce. Momentum velocitatis nihil aliud eſt quam velocitas multiplicata in ſuum elementum, exprimiturque per factum udu. Erit igitur $\frac{fds}{m} = udu$. Nam cum ſit per Theorema primum

fdt

$\frac{fdt}{m} = du$, & per ſecundum $dt = \frac{ds}{u}$; ergo ſubſtituendo, $\frac{fds}{mu} = du$, vel $\frac{fds}{m} = udu$. Q. E. D.

Hæc formula fæcundiſſima eſt; multæ ſiquidem conſequentiæ deduci poſſunt. Unam tantum, quæ frequentiſſime uſuvenit, non omittam. Quoniam $\frac{fds}{m} = udu$; ergo integrando, neglecta conſtante, quæ in multis caſibus peculiaribus negligenda non eſt,

$$\int \frac{fds}{m} = \frac{u^2}{2} \text{ vel } \sqrt{2 \int \frac{fds}{m}} = u: \text{ ſed } u = \frac{ds}{dt} \text{ ergo}$$

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2 \int \frac{fds}{m}}} \text{ & integrando rurſus, } t = \int \frac{ds}{\sqrt{2 \int \frac{fds}{m}}}.$$

SCHOLION.

Quæ beneficio ſpecierum inventa ſunt, figuris geometricis aptare oportet. Grave A (Fig. 32.) ex puncto quietis A deſcendat verſus centrum B, & in quocumque puncto deſcenſus, puta C, ſollicitetur a vi centrali CG, & ſit curva FGH ſcala virium centralium. Vocetur f variabilis GC, & s ſpatium decurſum AC. Velocitas CD acquiſita in puncto C ponatur $= u$, fluxio ſpatii $Cc = ds$, & fluxio velocitatis $dt = du$. Per Theorema autem tertium invenimus $fds = udu$. (hic cum non varietur maſſa corporis, quantitas m conſtans pro unitate aſſumi poteſt). Factum fds nihil aliud eſt quam GC. Cc rectangulum, quod eſt elementum areæ FACG. Sed $S fds = \frac{u^2}{2}$; igitur quadratum CD eſt ſemper æquale duplæ areæ CAFG. Hinc ſi dictæ duplæ areæ facias ſemper æquale quadratum rectæ CD, & per punctum D, aliaque ſimiliter inventa tranſeat curva ADI, hæc eſt ſcala velocitatum.

Rurſus quoniam $\frac{ds}{u} = dt$, ſi fiat $\frac{a}{u} = p$ habebimus $pds = dt$: ſed $a = up$; ergo facto rectangulo DCM = conſtanti a, vel unitati, erit $CM = p$, & curva MOP erit reciproca curvæ velocitatum. Eſt autem rectangulum MC. $Cc = pds = dt$. Igitur integrando, $Spds = t$, hoc eſt area QACM æqualis tempori. Poſita demum curva AKN, quæ ſit quadratrix curvæ MOP, ita ut ordinata CK ſit ſemper æqualis areæ QACM, curva AKN erit ſcala temporum, quæ omnia erant invenienda.

EXEM-

EXEMPLUM PRIMUM.

In hypotheſi gravitatis conſtantis curva virium FGH mutatur in lineam rectam ipſi AB parallelam. Integrando itaque formulam, reſultat $2fs = uu$, locus ad parabolam ADI, quæ eſt ſcala velocitatum.

Iam exiſtente $\frac{a}{u} = p$, erit $\frac{a}{uu} = pp$: ſed $u^2 = 2fs$; ergo $a = 2fspp$ ad hyperbolam ſecundi gradus MOP. Hujus autem hyperbolæ quadratrix AKN, ſcilicet ſcala temporum, ſic invenitur. Quoniam $\frac{ds}{u} = dt$, & $u = \sqrt{2fs}$; ergo $\frac{ds}{\sqrt{2fs}} = dt$, vel $\frac{fds}{\sqrt{2fs}} = fdt$, & integrando, $\sqrt{2fs} = ft$, vel $\frac{2s}{f} = tt$. Erit igitur curva AKN parabola, & per conſequens tempora erunt inter ſe, ut velocitates, & tam tempora, quam velocitates in ratione dimidiata ſpatiorum e quiete decurſorum. In noſtro caſu facilius inveniri poteſt ſcala temporum; eſt enim $fdt = du$, & integrando, $ft = u$: ſed $u = \sqrt{2fs}$; ergo &c.

Ex dictis collige tempus, quo ſpatium quodlibet AC cadendo conficitur, eſſe ut duplum ſpatium AC applicatum ad celeritatem CD hoc tempore acquiſitam. Nam cum ſit $t = \frac{u}{f}$, erit pariter $t = \frac{u^2}{fu}$: atqui $u^2 = 2fs$; ergo $t = \frac{2s}{u}$.

Adde vim centralem eſſe ſemper ut ſubnormalem in ſcala velocitatum; eſt enim $f = \frac{udu}{ds} =$ dictæ ſubnormali.

SCHOLIUM PRIMUM.

Vocentur duorum mobilium maſſæ M, m; vires, ſeu gravitates, ſeu pondera P, p; ſpatia cadendo deſcripta S, s; & tempora deſcenſuum T, t. Ex dictis non omittendo conſiderationem maſſarum, erit $PT^2 = 2MS$, & $pt^2 = 2ms$: adeoque ſi ſpatia ab ambobus mobilibus diverſis temporibus confecta, ſunt in duplicata ratione temporum, ut experimenta nos docent, corporum pondera maſſis erunt proportionalia. Nam $TT : tt :: S : s$, erit $TTs = tt\,S$, adeoque $PTT = 2MS$ fiet $\frac{tt\,PS}{s} = 2MS$, vel $Ptt = 2Ms$, hoc eſt $= \frac{2Ms}{P}$, & omnibus ductis in

t,

p, $ptt = \frac{2pMs}{p}$: ſed $ptt = 2ms$; ergo ſubrogando, $2ms = \frac{2pMs}{p}$, vel $mP = Mp$, ſcilicet $P : p :: M : m$: hoc eſt pondera maſſis proportionalia.

SCHOLIUM SECUNDUM.

Quod ſi motus a quiete non incipiat, tunc in integrationibus addenda eſt conſtans, quod ſequenti exemplo declaro. Grave B projiciatur in altum *a* B verſus A. In hoc caſu quoniam creſcentibus ſpatiis decurſis B *c*, BC, BA; velocitas minuitur, cum impetus impreſſus in puncto B a repetitis ictibus gravitatis paulatim deſtruatur: illud ſequitur, quod ſumpta tamquam poſitiva fluxione ſpatii, fluxio velocitatis negativa eſt. Habemus igitur in hac ſpecie $fds = udu$, & integrando, $fs = -\frac{u^2}{2} + bb$. Ut determinetur valor conſtantis bb, obſervandum, quod ſpatio exiſtente $= 0$ in puncto B, velocitas initialis in dicto puncto B eſt æqualis conſtanti, puta $a = BI$. Deleto igitur in æquatione termino fs, remanet $2bb = uu$: ſed in noſtra hypotheſi $uu = aa$; ergo $2bb = aa$, & integralis vera fit $fs = -\frac{u^2}{2} + \frac{a^2}{2}$. Similiter creſcente tempore, velocitas minuitur, ideoque habebimus alteram formulam $fdt = -du$, & integrando, $ft = -u + b$: ſed t exiſtente $= 0$, $u = a$; ergo conſtans addenda $= a$, & ſummatoria vera eſt $ft = -u + a$. Cætera perficientur per regulas ſupra traditas.

EXEMPLUM SECUNDUM.

Sint vires centripetæ, ut diſtantiæ a centro, hoc eſt grave in quocumque puncto D (Fig. 33.) ſollicitetur verſus centrum B a gravitate variabili, quæ ſit ſemper ut diſtantia DB: ſcala virium erit triangulum ABC. Ponatur $AB = a$, ſpatium percurſum $AD = s$, ſpatium percurrendum $DB =$ vi centrali $= x$. In formula generali $fdt = uds$ loco f pone x, & loco ds pone $-dx$; quia creſcente cum ſpatio AD velocitate, ſpatium DB decreſcit. Habebimus igitur $-xdx = udu$, & integrando addita debita conſtante, $\frac{a^2}{2} - \frac{x^2}{2} = \frac{u^2}{2}$, vel $a^2 - x^2 = u^2$, qui locus eſt ad circuli quadrantem AFG, a quo repræſentatur ſcala velocitatum.

Quoad tempus, $\sqrt{aa-xx} = u$: ſed $dt = -\frac{dx}{u} = dt$; ergo $\frac{-dx}{\sqrt{aa-xx}} = dt$. Integratio primi membri, ut notum eſt, reſpondet arcui AF; ergo

SCHOLIUM.

Exempla ſumpſimus ad Phyſicam accomodata. Gravitatis conſtantis hypotheſis Galilæana eſt, & eſt veluti radix cæterarum omnium: nam præterquamquod hæc lex obtinet in gravibus cadentibus quam proxime ob magnam centri diſtantiam, certum quoque eſt vim quamcumque variabilem continuo applicatam per ſpatium infinitesimum agere uniformiter, & conſtantem eſſe.

Secunda lex, quæ ponit vires in ratione diſtantiæ a centro, a Fermatio primum excogitata, & quam demonſtratione munire conatus eſt non ſine principii petitione, deinde a *Viviano* & a Borellio uſurpata cenſetur locum habere poſſe a clariſſimo Newtono in iis gravibus, quæ occupant ſpatium a centro telluris uſque ad ſuperficiem.

Tertia denique lex obtinet in ſiſtemate Planetario, cum Planetæ, & cometæ hac lege gravitatis ferantur in ſolem, ſicuti etiam planetæ ſecundarii in primarios.

Conſideratis his legibus, addo aliqua de aliis, quæ contradictionem involvunt. Putavit Cazreus celeritates acquiſitas in eadem proportione eſſe, ac ſpatia confecta, quo in caſu erit $u = s$: atqui $u = \frac{ds}{dt}$; ergo $\frac{ds}{dt} = s$, ſive $dt = \frac{ds}{s}$ unde $t = ls$. Jam exiſtente $s = 0$, & logarithmo ipſius $s = \infty$, ſcilicet infinito, erit $t = \infty$: hoc eſt infinitum tempus requiritur ad percurrendum initio ſpatium nullum, adeoque grave ibi perpetuo quieſcet. Simili ratiocinio aliæ leges ad examen revocari poſſunt.

THEOREMA QUARTUM.

Curva AFD (Fig. 35.) ſit ſcala velocitatum relate ad tempora, hoc eſt exprimunt abſciſſæ AG, AC tempora deſcenſum cujuſcumque mobilis & ordinatæ GF, CD velocitates in fine dictorum temporum acquiſitas. Idem mobile celeritate variabili, tempore AC percurrat ſpatium AB, & in puncto B adeptum ſit velocitatem CD: dico quod ſi toto tempore AC grave delatum fuiſſet velocitate conſtante CD, percurriſſet ſpatium AM, quod ad ſpatium AB eſſet in eadem ratione, ac rectangulum AC. CD ad aream curvilineam AFDC.

Quoniam $ds = udt$; ergo integrando $s = Sudt$, vocato autem ſpatio AM $= S$, eſt $S = ut$ ſuppoſita velocitate conſtant; ergo $S : s :: ut : Sudt$, hoc eſt ut ſpatium AB ad ſpatium AM, ita area AFDC ad rectangulum ACD.

COROLLARIUM.

Sit curva AHI ſcala temporum relate ad ſpatia decurſa. Tangat recta HL curvam prædictam in quocumque puncto H, erit ſpatium AK, quod percurritur motu accelerato, & ſubtangens LK erit ſpatium, quod grave percurriſſet in toto tempore KH, ſi delatum fuiſſet ex conſtante celeritate, quam obtinet in puncto K. Nam per Theorema præmiſſum $Sudt : ut :: AK = s : KL$; ergo cum ſit $Sudt = s$ erit $kL = ut$: ſed $u = \frac{ds}{dt}$; ergo $KL = \frac{tds}{dt}$ ergo ſubtangens curvæ AKI. Q.E.D.

SCHOLIUM PRIMUM.

In hypotheſi Galilæana gravitatis conſtantis curva AHI erit parabola Apolloniana, ideoque ſubtangens KL duplex abſciſſæ AK, & ſpatium conſectum celeritate terminali duplum ejus, quod per motum acceleratum conficitur.

In altera hypotheſi virium ſervantium proportionem diſtantiarum a centro ſpatia decurſa in allatis circumſtantiis ut ſinus verſus AD (Fig. 33.) ad quartam proportionalem poſt radium, ſinum rectum, & arcum AF. In tertia hypotheſi (Fig. 34.) ubi ſcala temporum erat cycloïs, prædicta ſpatia ſe habebunt ut ordinata in circulo generatore ad ordinatam in cycloide.

SCHOLIUM SECUNDUM.

Hæc ſatis ſuperque eſſent ad præſentis materiæ illuſtrationem, niſi quandoque inter ſe eſſent comparandæ vires continue applicatæ, quarum ſcala nobis ignota eſt. Ne igitur aqua hæreat, aliquot Theoremata nobis ſubiicienda ſunt.

THEOREMA QUINTUM.

Si ſcalæ virium centralium ſint curvæ ſimiles, & pondera ſint maſſis proportionalia, mobile abſciſſarum partes ſimiles eodem tempore percurrit.

Ponantur duæ figuræ ſimiles ABC, *abc* (Fig. 36.), & duo mobilia deſcendant per lineas verticales AB, *ab*; conficient ſpatia AB, *ab* temporibus æqualibus. Fiat $AB : ab :: AD : ad$, ita differentia DF ad alteram *df*, & cum velocitates mobilium in punctis D, *d*, ſint in ratione dimidiata arearum ADEC, *adec*, & areæ ob figuras ſimiles ſint ut quadrata AD, *ad*; igitur velocitates in D, *d* erunt, ut abſciſſæ, ſeu ut fluxiones DF, *df*: ſed tempora, quibus percurruntur ſpatia minima DF, *df* ſunt ut prædicta ſpatia diviſa per velocitates, ſeu $T : t :: \frac{DF}{DF} : \frac{df}{df}$,

quæ

quæ ratio eſt æqualitatis; ergo eodem tempore percurruntur ſpatia DF, *df*, & quia tot DF continentur in AB, quot *df* in *ab*, ſpatia AB, *ab*, vel analoga quæcumque AD, *ad* eodem tempore conficiuntur. Q.E.D.

COROLLARIUM.

Si omnes curvæ ſimiles ita diſponantur, ut earum origo ſit in B, & una ex dictis figuris ſit DBH; recta conjungens puncta B, & C tranſibit per punctum H, & alia ſimiliter determinata. Hinc pars DBH, & cæteræ omnes trianguli ABC erunt ſimiles toti. Triangulum itaque eſt figura iſochrona, hoc eſt temporibus æqualibus percurruntur abſciſſæ AB, DB, FB, & præſtat per unicam lineam continuam id, quod reliquæ omnes figuræ ſimiles per curvas diverſas.

THEOREMA SEXTUM.

Sint duæ curvæ ad eumdem axem, & analogæ ad ordinatas, hoc eſt in curvis BFC, BGD (Fig. 37.) reſciſſa abſciſſa AE utcumque, ordinata EF ſit ubique ad alteram EG in ratione conſtante AC: AD. Movcatur corpus, cujus maſſa = *m* per AB ſollicitatum a ſcala virium ACB, & rurſus alterum corpus cujus Maſſa = M a ſcala virium ADB. Sint AE = *s* Ea = *as*, EF = *f*, EG = F. Quoniam per notas formulas habemus $fds = mudu$ $Fds = MVDV$: ergo integrando, $Sfds = \frac{mu^2}{2}$, & $SFds = \frac{MV^2}{2}$. Sed areæ ACFE ADGE ſunt inter ſe ut *f*: F; ergo $\frac{2f}{m} : \frac{2F}{M} :: uu : VV$, vel $\frac{\sqrt{F}}{\sqrt{m}} : \frac{\sqrt{F}}{\sqrt{M}} :: u : V$. Omitto corollaria, quæ nullo labore deducuntur ex formula.

Cum autem ſit $u = \frac{ds}{dt}$, & $V = \frac{ds}{DT}$, erit $dt : DT :: s : T :: \frac{1}{u} : \frac{1}{V}$ $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{f}} : \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{F}}$.

SCHOLIUM.

Hinc ſolvi poteſt problema, quod Geometris Italis propoſuit Cl. Nicolaus Bernoullius. Quæritur quænam ſit curva BGC (Fig. 38.) in qua tempus, quo percurruntur AB, EB, ſit ut dignitas virium AC, EG.

Circa axem AB deſcribantur ex origine B infinitæ curvæ ſimiles ad libitum, quarum duæ ſint BHC, BIF, ductaque recta BC, hæc tran-

tranſibit per punctum F. Corpus igitur ſollicitatum a ſcalis curvarum ſimilium, eodem tempore per Theorema quintum percurret lineas AB, EB. Producatur EF in G, quæraturque ordinata EG ita ut deſcripta curva BLG ipſi BIF analoga, ſi mobile acceleretur a viribus, quarum ſcala ſit curva BLG, tempus, quo percurrit totam EB, ſit ut data dignitas applicatæ EG.

Per Theorema ſextum in curvis analogis $t : T :: \frac{1}{\sqrt{f}} : \frac{1}{\sqrt{F}}$, exiſtentibus maſſis conſtantibus in noſtra hypotheſi; ſed tempus t conſtans, & tempus $T = F^{\frac{n}{2}+1}$; & $EF = f$ ad $EB = s$ in ratione conſtante, hoc eſt $f = bs$; ergo $t : F^{\frac{n}{2}+1} :: \frac{1}{\sqrt{bs}} : \frac{1}{\sqrt{F}}$, vel $\frac{t}{\sqrt{F}} = \frac{F^{\frac{n}{2}+1}}{\sqrt{bs}}$, ex quo fit $bs = \frac{F^{n+1}}{t^2}$.

Si ergo per punctum G, & alia infinita ſimiliter determinata ducatur curva BGC, hæc erit ex familia parabolarum, vel hyperbolarum: ajo curvam BGC eſſe quæſitam. Nam deſcripta curva BKF ſimili ipſi BGC, ex proprietatibus dictarum curvarum erit curva BKF analoga portioni BGM, ut demonſtrari facile poteſt; ergo &c.

THEOREMA SEPTIMUM.

Sint duæ Figuræ ABC, *abc* (Fig. 39.) analogæ ad abſciſſas, hoc eſt ſumptis abſciſſis AD, *ad* in data proportione conſtante, ordinatæ DE, *de* ſint æquales, & reaſſumpta hypotheſi ſuperioris Theorematis, erit $Sfds : SFDS :: mu^2 : MV^2$: ſed in noſtro caſu areæ $Sfds : SFDS$, vel ADE, *ade* ſunt inter ſe ut $s : S$, hoc eſt ut $AD : ad$, igitur $\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{m}} : \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{M}} :: u : V$, & cum velocitates ſint in temporum ratione reciproca, & directa ſpatiorum, ſive $\frac{ds}{dt} : \frac{dS}{dT}$, erit $\frac{ds\sqrt{m}}{\sqrt{s}} : \frac{dS\sqrt{M}}{\sqrt{S}} :: dt : dT$, & per conſequens $\sqrt{ms} : \sqrt{MS} :: t : T$ Q. E. D.

Hujus, & antecedentis Theorematis uſus patet, & inſervit, dum comparandæ ſunt vires, quarum lex nobis ignota eſt. Obſervandum etiam doctrinam ſupra explicatam locum habere non ſolum in gravibus cadentibus, ſed in viribus quibuſcumque applicatis, ut ſunt preſſiones, vires elaſticæ, & cæteræ omnes, quæ debent replicari, ut effectum ſenſibilem producant.

CA-

CAPUT SECUNDUM.

De principio fundamentali Mechanices.

THEOREMA PRIMUM.

SI ſollicitationes quæcumque æquali tempore agentes producant quantitates motus in data ratione, etiam ſollicitationes in data ratione erunt. Id patet ex formulis $Sfdt = mu$, $SFdt = MV$; nam cum tempus utrobique ponatur æquale, erit $Sfdt : SFdt :: f : F :: mu : MV$. Si $mu = MV$; igitur $F = f$. Neque quidquam facit utrum ſollicitationes ſint conſtantes, vel variabiles, nam in ſecundo caſu erunt æquales areæ curvarum ipſas repræſentantes, quæ ſollicitationum ſcalæ vocantur.

THEOREMA SECUNDUM.

Ex extremitatibus libræ horizontalis AB (Fig. 40.) cujus jugum ſit in puncto C, pendeant duo pondera D, & E, quorum directiones ſint parallelæ tendentes ad centrum infinite diſtans. Sit D. AC = E. BC, hoc eſt pondera ſe habeant reciproce, ut diſtantiæ a fulcro: dico pondera prædicta manere in æquilibrio.

Ponderi E ſuperadde pondus infiniteſimum p, & deſcendat brachium libræ CB per ſpatium infiniteſimum Bb, aſcendente altero brachio CA per ſpatium infiniteſimum Aa. In hac hypoteſi habebimus motum inaſſignabilem, quin deſtruatur æquilibrium, & cum tempora deſcenſus per Bb, & aſcenſus per Aa ſint æqualia, ſollicitationes erunt inter ſe ut quantitates motus, hoc eſt ut maſſa E ducta in velocitatem, qua percurritur fluxio Bb ad maſſam D ducta in velocitatem, qua percurritur fluxio Aa: ſed ex una parte pondera ſunt ut maſſæ, & velocitates ut arcus naſcentes Bb, Aa, hoc eſt ut diſtantiæ CB, CA, & producta D. AC, & E. CB ſunt æqualia; ergo & ſollicitationes erunt æquales. Neutra igitur alteram prævalebit, & libra perſeverabit in æquilibrio.

SCHOLIUM.

Allati principii demonſtrationem deduxit Archimedes ex centro gravitatis, ponderibus hinc inde diſpoſitis, aſſumendo, quod pondera æqualia eodem modo gravitent, ac ſi conjuncta eſſent in centro gravitatis. Verum in hoc diſcurſu adeſt petitio principii; centrum enim gravitatis illud eſt, quod corpus dividit in partes æqualium momentorum.

At Galilæus, & qui hunc ſequuti ſunt, fingunt per impoſſibile grave E deſcribere arcum inaſſignabilem Bb, & grave D per arcum ſimilem Aa aſcendere; poſtquam autem demonſtrarunt quantitates motus eſſe æquales, rem ad abſurdum deducunt, ſupponendo vires vivas eſſe ut quantitates motus, hoc eſt æquales. Hoc autem, ut ſupra demonſtravimus, falſum eſt.

Quan-

Quantitates motus non ſunt ut vires vivæ, ſed ut vires mortuæ, ſeu ſollicitationes, & manifeſtum eſt æquilibrium fieri non a viribus vivis, quæ numquam cum æquilibrio ſtare poſſunt, ſed cum mortuis, a quarum æqualitate dependet æquilibrium.

Hoc adeo verum eſt, ut pars gravitatis, quæ impenditur in generatione vis vivæ, nullo modo gravitet, ac premat, alioquin cauſſa non reſponderet effectui, cum eadem ſollicitatio ad duplicem effectum in ſolidum extenderetur. Placet autem veritatem hanc rigoroſa demonſtratione evincere. Sit

THEOREMA TERTIUM.

Sit libra AB (Fig. 41.), cujus jugum C. Ex puncto A pendeat grave D, & ex puncto E altera libra FH, cujus jugum E cum ponderibus appenſis G, & I. Sint omnia in æquilibrio, hoc eſt pondera G, I ſint æquilibrata circa punctum ſuſpenſionis E, & tota libra FH cum ſuis ponderibus æquiponàium cum gravi D conſtituat in libra AB. Removeatur grave I, & ſuſpendatur puncto K, ita ut in lance FH tollatur æquilibrium, deſcendente pondere I, vel LM, & aſcendente pondere G: dico quod turbatur æquilibrium alterius lancis AB, & quod onus D neceſſario deſcendit.

Cum pondera G, I in punctis FH, ſtent æquilibrata, eumdem conatum efficiunt reſpectu gravis D, ac ſi utrumque penderet ex jugo E. Supponimus enim virgas librarum eſſe lineas geometricas nullo modo ponderantes. Jam cum grave I translatum in M L ſuſpenditur ex puncto K tollitur, ut dictum eſt, æquilibrium, quod ut reſtituatur, fiat ut diſtantia KE ad diſtantiam EF; ita pondus G ad pondus L; & cum pondus M ſit illud, quod æquilibrium deſtruit, ſuſtineatur a potentia P. His poſitis, G & L ita ſunt diſpoſita reſpectu ponderis D, ac ſi conjuncta penderent ex puncto E. Sed ad conſtituendum æquilibrium cum pondere D, ſuſpendi debent ex ipſo tria pondera G, L, M; ergo duo G, L minora ſunt; quam quæ neceſſaria ſunt ad æquilibrium faciendum cum onere D; ergo pondus D præponderabit, & deſcender.

COROLLARIUM.

Remota potentia P, quæ impedit deſcenſum gravis ML, & eſt æqualis, & contraria gravi M, eſt ab hac petenda vis ſollicitationis ad deſcenſum. Grave igitur M dum actu deſcendit, nullo modo gravitat.

COROLLARIUM II.

Hinc vera eſt clariſſimi Leibnitii doctrina pluviam deſcendentem per aerem nullo modo gravitare in Barometrum, quamquam ad explicanda Barometri Phænomena non ſufficiat. Quantitas enim aquæ, quæ actu deſcendit, comparari non poteſt cum aſcenſu Mercurii, ut inemdo computum manifeſtum ſit.

THEO-

THEOREMA QUARTUM:

Corpus per duas diverſiones impulſum percurrit diametrum parallelogrammi, cujus latera vires repræſentant.

Corpus quodcumque A (Fig. 42.) impulſum a data vi agente per directionem AB verſus B percurrat dato tempore velocitate AB ſpatium AB, deinde impulſum ab altera ſecundum directionem AC pertranſeat eodem tempore ſpatium AC velocitate AC: ſunt enim ſpatia eodem tempore pereurſa, ut velocitates conſtantes, quibus percurruntur. Perficiatur Parallelogrammum AD, & eodem tempore, hoc eſt eodem inſtante, corpus A impellatur a præfatis viribus duabus: dico tempore æquali percurrere diagonalem AD.

Finge corpus A transferri a linea AB, quæ ſibi ipſi ſit ſemper parallela velocitate AC, & motu proprio velocitate AB incedere per dictam lineam. Quo tempore linea AB acquiſivit poſitionem *ab*, corpus A per ipſam incedens, dimenſo jam ſpatio AB, reperietur in E puncto Diagonalis AD, & cum id verificetur de omnibus aliis punctis, revera corpus ſemper fuit in dicta diametro, atque illam determinato tempore debuit percurrere. Q. E. D.

COROLLARIUM PRIMUM:

Quod ſi angulus ABD (Fig. 43.) ſit rectus, & parallelogrammum tranſeat in rectangulum, tunc geminæ vires corpori A impreſſæ, prima juxta directionem AC, altera juxta directionem AB, prima horizontalis, & altera verticalis, cum nullo modo contrariæ ſint, nulla datur reactio oppoſita actioni, & cum corpus A ab utraque impellatur eodem tempore, utraque perſeverare debet in dicto corpore, cum fertur per diametrum AD. Vis igitur corporis A lati per AD æqualis eſt viribus ſimul ſumptis duorum corporum æqualium, quorum primum eodem tempore incederet per AB, ſecundum per AC.

Sit horum corporum maſſa $= m$, vis primi per AD $= F$, vis ſecundi per AB $= f$, vis per AC $= ff$; ergo $mf + mff = mF$, vel $f + ff = F$.

Hujuſmodi autem vires non poſſunt eſſe æquales, ſi exprimantur per quantitates motus, hoc eſt in caſu noſtro per velocitates, maſſis exiſtentibus æqualibus. Nam cum velocitates per ſpatia exprimantur æqualibus temporibus decurſa, hoc eſt per rectas AD, AB, AC, evidens eſt ſummam rectarum AB + AC non æquari diagonali AD.

Hujuſmodi æqualitas obtineri non poteſt, niſi prædictæ vires vivæ exprimantur per velocitatum quadrata, tunc enim $f + ff = F$; nam $u^2 + VV^2 = V^2$.

Cujuſcumque igitur corporis vis viva proportionalis eſt maſſæ ductæ in quadratum velocitatis, quod eſt principium Dynamicum Leibni-

tianum, de quo in ſequentibus redibit ſermo. Quæ cum ita ſint, manifeſtus redditur error Galilæi in demonſtratione Theorematis fundamentalis. Conſer Scholium ad Theorema ſecundum.

COROLLARIUM II.

Quod ſi angulus ABD (Fig. 42.) ſit acutus, ex puncto A demitte normalem AF. Cum vis per AB æqualis ſit viribus per AF, BF, mobile A percurrendo rectam AB idem præſtat, ac ſi dum incedit per AF velocitate AF, linea AF moveatur ſuper FB velocitate FB: ſed mobile A fertur etiam verſus C celeritate AC, cui contraria eſt velocitas FB ab F verſus B; ergo deductis deducendis, revera corpus A non fertur verſus partes DC, niſi velocitate FD, & verſus lineam FD, niſi velocitate AF. Percurrit autem diagonalem AD, cujus quadratum duobus quadratis AF, FD æquale eſt. Igitur ex hoc dicta in antecedente corollario confirmantur.

COROLLARIUM III.

In hoc caſu, ut vidimus, velocitates in parte ſe elidunt, ac deſtruunt. At ſi angulus ABD eſſet obtuſus, tunc eſſent conſpirantes, & ſe mutuo adjuvarent, ut demonſtrari facile poteſt. Quod autem demitur a contrariis, a conſpirantibus reſtituitur: unde ſequitur vim corporis moti velocitate AD, plus vim corporis moti velocitate BC æqualem eſſe viribus quatuor corporum, quorum duo moveantur celeritate AB, & duo velocitate AC. Verum enim eſt, & Geometris notum duo quadrata diagonalium AD, BC æqualia eſſe quattor quadratis laterum parallelogrammi.

SCHOLIUM.

A viribus vivis tranſeamus ad mortuas. Si mobile ſollicitetur a duabus ſollicitationibus AC, AB juxta directiones a prædictis lineis determinatas, idem omnino præſtabit, ac ſi ſollicitetur ab unica ſollicitatione AD agente per directionem AD, non quia ejuſmodi ſollicitationes ſint æquales, neque tempore infinitefimo æqualem producant motus quantitatem, ſed quia quocumque impulſu, licet minimo, ſollicitationes laterales æqualem vim vivam corpori imprimunt, ac diagonalis, quod facile eruitur, ſi velocitates genitæ tempore inaſſignabili eamdem proportionem ſervent, ac ſollicitationes ipſæ, hoc eſt linearum AC, AB, AD. Nam etiam in hoc caſu vis infinitefima naſcens erit, ut quadratum velocitatum minimarum naſcentium, & per conſequens locum habent corollaria ſupra explicata.

CA-

CAPUT TERTIUM.

De centro gravitatis.

CEntrum gravitatis illud eſt, ex quo ſi intelligatur grave ſuſpendi a filo aliquo, nullo modo movetur, ſed quieſcit. Linea igitur ſuſpenſionis eſt veluti jugum in libra, circa quod partes corporis ſunt in æquilibrio, & hinc inde exercent momenta æqualia. Sit corpus quodcumque ABC (Fig. 44.), cujus centrum gravitatis D, & linea verticalis ſuſpenſionis tranſiens per dictum centrum ſit EDF; pars corporis AGH ex uno latere lineæ AF erit in æquilibrio cum parte corporis BGHC ex altero latere ejuſdem lineæ verticalis.

Hinc centrum gravitatis ſemper affectat locum infimum; congruce enim debet cum linea verticali ſuſpenſionis: aliter cum partes non ſint æquilibratæ, quæ majus momentum exercet, attollet contrariam, & deſcendet uſquequo centrum gravitatis ad infimum locum perveniat.

Cum vero grave quodcumque conſtituitur in ſtatu manente, ut loqui amant Mechanici, hoc eſt quieſcit, ſignum eſt centrum gravitatis ad locum infimum deſcendiſſe, quod tamen intelligendum dum fieri poteſt; nam aliquando deſcendere nequit ob indifferentiam.

Putabat Borellius, quod ſi ſphæra AC (Fig. 45.) cujus ſuperior medietas eſſet plumbea, inferior lignea, deſcendendo per lineam verticalem GH volvi circa centrum E Figuræ, ut centrum gravitatis F, quod in emiſphærio ſuperiori locatum eſſet, ad locum infimum tendere poſſet. At cum nulla ſit ratio, quæ determinet punctum F, ut potius inclinetur verſus A, quam verſus C, aut quamcumque aliam plagam, mathematice loquendo, dum pila deſcendet verſus centrum gravium, nullo modo centrum gravitatis deſeret locum ſuperiorem.

Sed hujuſmodi meditationes ſunt altioris indaginis, tranſeamus ad faciliora.

THEOREMA.

Sint data quæcumque corpora, ſeu melius puncta gravia A, B, C, D, (Fig. 46.), quæ referantur ad planum quodcumque *ad*, & ſit omnium centrum gravitatis E. A dictis punctis gravibus, & ab eorum centro gravitatis ducantur in dictum planum normales *a*A, *b*B, *c*C, *d*D, *e*E: dico, quod ſi ponatur A + B + C + D = M, erit A. A*a* + B. B*b* + C. C*c* + D. D*d* = M. E*e*. Per punctum E, hoc eſt centrum gravitatis, ducatur planum 2*a* 2*d* plano *ad* parallelum. Cum in recta 2*a* 2*d* ſit centrum gravitatis E, hoc eſt axis æquilibrii reſpectu ponderum A, B, C, D; ergo per principium fundamentale Machanices A. A2*a* + C. C2*c* — B. B2*b* — D. D2*d* = 0. Similiter cum recta E*e* tranſiens per gravitatis centrum E ſit alter axis æquilibrii, A. *ae* +

B. be — C. ce — D. $de = o$. Iterum quia $Aa = a2a - A2a = Ee - A2a$; $Bb = Ee + B2b$; $Cc = Ee - C2c$; $Dd = Ee + D2d$, erit A . Aa + B. Bb + C . Cc + D . Dd = A. Ee — A. $A2a$ + B. Ee + B. $B2b$ + C. Ee — C. $2Cc$ + D. Ee + D. $D2d$. Atqui — A. $A2a$ + B. $B2b$ — C. $C2c$ + D. $D2d = o$; igitur ſubductis hiſce terminis, remanet A. Aa + B. Bb + C. Cc + D. Dd = A. Ee + B. Ee + C. Ee, + D. $Ee = \overline{A + B + C + D}$. $Ee = M$. Ee *ex hypoteſi*. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

Si aliqua puncta gravia, vel corpora ſita eſſent infra planum *ad*, & aliquot ſupra dictum planum; tunc ſi diſtantiæ inferiores ſpectantur tamquam poſitivæ, ſuperiores affeientur ſigno negativo. Cæterum ſignis mutatis, Theorema verum eſt.

COROLLARIUM II.

Si omnia corpora A, B, C, D ſunt æqualia, omnes eorum diſtantiæ a linea *ad*, erunt multiplum diſtantiæ centri gravitatis E ab eadem linea ſecundum ponderum numerum, & in caſu primi corollarii computandi ſunt exceſſus ob ſigna partim affirmativa, partim negativa.

SCHOLIUM I.

Facile demonſtrari poteſt, quod ſi directiones gravium tendant ad centrum infinite diſtans, & ſint parallelæ, unicum datur in unoquoque corpore centrum gravitatis. Duorum ponderum A, B (Fig. 47.), ut brevitati conſulam, ſit centrum gravitatis E: non ſolum verificatur propoſitio ſuperior reſpectu plani *ab*, ſed etiam alterius quomodocumque inclinati CF; ſunt enim ſimilia triangula CAG, DEH, FBI: ex quo ſit, quod ſignato centro gravitatis in corpore, ad quodcumque planum, vel lineam ſuſpenſionis referatur, ſi directiones punctorum gravium ſint parallelæ, partes hinc inde a plano ſuſpenſionis ſunt æqualium momentorum.

SCHOLIUM II.

Hinc demonſtratur regula Guldini a Pappo indicata; nempe figuram ſolidam ex rotatione cujuslibet figuræ planæ circa rectam poſitione datam oriundam æquati producto ex figura genitrice in viam centri gravitatis. Pono ordinatam CE = y (Fig. 48.) fluxionem $Cc = dx$, diſtantiam GF = a, figuram genitricem ABD = f, ſolidum ab illa ge-

ni-

nitum in rotatione circa AD $= s$, ejus elementum $= ds$. Quibus poſitis, per noſtram propoſitionem erit $af =$ ſummæ omnium momentorum partium, ſeu punctorum gravium componentium figuram f. Elementi areæ, hoc eſt rectanguli $Ee = ydx$ centrum gravitatis diſtat a recta AD per dimidium EC, hoc eſt $\frac{y}{2}$; ergo ejus momentum $= \frac{y^2dx}{2}$;

ergo $af = \int \frac{y^2dx}{2}$, & ductis omnibus in p notam circumferentiæ, paf

$= \int \frac{py^2dx}{2}$: ſed pa eſt periphæria radii GF, & py circumferentia radii

CE, & $\frac{py^2}{2}$ circulus ex radio CE; ergo $\frac{py^2dx}{2} =$ cilindrulo inſcripto in

ſolido rotundo; ergo $\int \frac{py^2dx}{2} = s$; ergo tandem $paf = s$. Q. E. D.

Ob ſimilem rationem ſi punctum F ſit centrum gravitatis non ſpatii ABD, ſed curvæ AB, ſuperficies genita ex rotatione curvæ AB circa axem motus AD æqualis eſt rectangulo ex curva AB in viam rotationis puncti F. Notandum tamen hanc regulam Guldini locum invenire in corporibus uniformiter, non autem difformiter gravibus.

SCHOLIUM III.

Hinc ortum habent formulæ, quarum ope centra gravitatis inveniuntur. Si F ſit centrum areæ ABD, habebimus diſtantiam GF, hoc eſt $a = \frac{\int_0^x y^2dx}{\int ydx}$. Diſtantia porro $FH = b = \frac{\int_0^x x^2dy}{\int xdy}$, & cum utrobique area $ABD = \int ydx = \int xdy$, poſito quod DC ſit $= x$, erit GF: FH, ut ſolidum ex figura ABD circa axem AD ad ſolidum ex eadem figura circa DB. Similiter ſi ſit F centrum gravitatis curvæ AB, erit $FG = a = \frac{\int yds}{s}$: eſt autem curva AE $= s$, ejus elementum $Ee = ds$.

Centra gravitatis conoidum, eorumque ſuperficierum inveniuntur determinando centra gravitatis ſpatiorum analogorum.

SCHO-

SCHOLIUM IV.

Regula Guldini obtinet etiam in motibus, ubi centra, vel axes rotationis mutantur; ſemper enim vel ſolidum, vel ſuperficies genita æqualia ſunt figuris, vel curvis ductis in viam rotationis. Id explico, adducto Theoremate Leibnitiano.

Sit curva quæcumque ACB (Fig. 49.), cujus centrum gravitatis G. Evolvatur curva more Hugheniano per ſuas tangentes, ac generet figuram AMD, centrumque gravitatis curvæ in actu evolutionis incedat per curvam GFg. Sint duæ tangentes MN, *mn* proximæ. Centra gravitatis harum tangentium ſint puncta media E, *e*. Centrum gravitatis curvæ BN + rectæ NM ſit F; curvæ autem *Bn* + rectæ *nm* ſit *f*; rectæ EF, *ef* concurrant in puncto H.

Demonſtrat Varignonius, quod MN. E *e* = $\overline{\text{MN} + \text{NB}}$. F*f* = ACNB. F*f*; ergo per calculum ſummatorium area ABD = rectangulo *ex* ACB. GF*g*.

Conſule de centro gravitatis Varignonium laudatum in actis Academiæ regiæ Pariſienſis anni 1714.

CAPUT QUARTUM.

De Pendulis.

THEOREMA I.

GRave quodcumque deſcendat prius per lineam verticalem AB (Fig. 50.), deinde per planum inclinatum AC, & ſit linea quæcumque horizonti parallela EF: Dico primo in punctis E, F velocitates eſſe æquales. Linea verticalis FD exprimat vim abſolutam gravitatis, ejuſque directionem ad centrum infinite diſtans, & ſit DI normalis ad rectam AC: manifeſtum eſt vim FD reſolvi in vires ID, FI, quarum prima cum ſit plano inclinato perpendicularis, tota inſumitur in ejuſdem plani compreſſionem, altera vero FI juxta directionem plani ea eſt, quæ grave ad motum ſollicitat per dictum planum declive. Sunt autem vires acceleratrices FD, FI ſemper conſtantes, & uniformiter urgentes mobile, incipientes a puncto quietis A; ergo velocitatum quadrata utrobique ſe habebunt, ut factum ex vi ſollicitante in ſpatium decurſum, hoc eſt $V^2 : u^2 :: FD. AE : FI. AF$: ſed ob ſimilitudinem triangulorum AE F, FID, FD: FI :: AF: AE, vel FD. AE = FI. AF; ergo $VV = uu$, vel $u = V$. Q. E. D.

Quoad tempus: cum velocitates per elementa Ee, FH ſint æquales, ex formula $ds = udt$ evincitur, tempus, quo percurritur fluxio Ee, vel Ef,

Ff, ad tempus, quo percurritur fluxio FH, esse ut *Ff*: FH:: EA: AF, in qua ratione constat pariter esse tempora integra, quibus percurruntur spatia AE, AF; AB, AC. Q. E. D.

COROLLARIUM.

Ex puncto E duc ad rectam AC normalem EK: illud sequitur; quod spatia AE, AK æqualibus temporibus percurrantur. Cum enim tempus per AE ad tempus per AF sit, ut AE ad AF, tempus vero per AF ad tempus per AK in ratione dimidiata FA: KA, hoc est in ratione simplici FA: AE; ergo tempus per AE ad tempus per AK, ut AE: AE, hoc est in ratione æqualitatis.

COROLLARIUM II.

Ob angulum rectum ad punctum K idem punctum erit in circumferentia semicirculi, cujus diameter AE, unde ducta a puncto A quacumque chorda pertingente ad periphæriam, tempora per diametrum AE, & per dictam chordam sunt semper æqualia, quod invenit Galilæus.

THEOREMA II.

Feratur mobile A (Fig. 51.) per duo plana inclinata AB, BC: dico mobile non inchoare motum descensus in primo puncto B secundi plani ea velocitate, quam acquisiverat in puncto ultimo B primi plani post descensum acceleratum per integram AB. Velocitas acquisita in puncto B ex casu per AB exprimatur per eamdem AB, & producta CB ad partes E cadat ex puncto A ad CE normalis AE. Velocitas AB resolvitur in duas velocitates AE, EB, quarum prima, cum sit plano EBC perpendicularis, tota insumitur in compressionem dicti plani, & a plani reactione destruitur; altera vero EB juxta directionem plani BC, cum a nulla vi contraria destruatur, tota perseverat. Mobile igitur incipit moveri in plano BC non celeritate AB, sed solum celeritate EB, determinata ut supra. Q. E. D.

COROLLARIUM.

Ex puncto E duc ad AB normalem EF: mobile ea velocitate inchoat motum in plano inferiore BC, ac si descendisset ex puncto quietis F, non ex puncto quietis A, & eamdem velocitatem habet in puncto B, quam habet, & postulat casus per FB, non autem per integram AB. Reliqua velocitas, quæ mobili erat acquisita, amittitur, dum planum subjectum comprimit, & percutit. Hinc protracta AB in H usque ad horizontalem DC, si mobile motum suum continuasset per planum ABH in puncto H, eamdem velocitatem acquisivisset, ac si cecidisset per verticalem AD. Et percurrendo successive per duo plana inclinata

AB,

AB, BC, in puncto C majorem celeritatem non adipiſcitur, quam ſi deſcendiſſet per verticalem FG. Velocitas autem per FG ad velocitatem per AD ſe habet in ratione dimidiata ipſius FG ad AD. Hæc omnia ſatis manifeſta ſunt. Cum enim EB ſit media proportionalis inter AB, & BF, ſi velocitas terminalis acquiſita in deſcenſu per AB exprimitur per eamdem AB, velocitas terminalis acquiſita in deſcenſu per FB exprimetur per EB: ſed per eamdem EB exprimitur velocitas, qua mobile incipit moveri in plano inferiore BC; ergo &c.

COROLLARIUM II.

Si angulus ABC rectus eſſet, & ſecundum planum BC normaliter plano AB inſiſteret, tunc tota velocitas periret, & inſumeretur in percuſſionem. Id intelligo, exiſtente corpore non elaſtico; nam ſi elaſticum eſſet reflexionem pateretur. Similiter in poſitione planorum ABC, dum corpus elaſticum tranſit ab uno in aliud planum, aliquam reflexionem patitur, & ſaltum efficit. Movetur itaque in aere per parabolam, & rurſus ſecundam percuſſionem efficit, mox per alterum ſaltum tertiam percuſſionem, & ſic deinceps, uſquequo totus motus reflexionis amittatur, & mobile incedat tangendo planum declive. Hæc circumſtantia tamen non facit, quod in puncto C non acquirat velocitatem ſupra determinatam.

COROLLARIUM III.

Si angulus EBA eſſet infinite acutus, & angulus ABC a duobus rectis quam minime diſtans, ſupereſt inquirendum, quid inde ſequatur. Erit in hoc caſu tam EA, quam EF infiniteſima primi gradus ob finitas EB, BA; ergo FA infiniteſima ſecundi gradus. Nam BF: FE:: FE: FA. Sublimitates igitur deſcenſus non differunt, niſi per ſecundam differentiam.

COROLLARIUM IV.

Hinc ſi eſſent infinita plana ſe mutuo ſuccedentia, ita ut anguli inclinationis ab invicem differrent per angulos infiniteſimos, quod contingit in curvis, in quibus ſunt minimi anguli contactuum, in tranſitu ab uno plano in aliud minuitur ſublimitas deſcenſus per ſecundam fluxionem, quæ infinites repetita primam fluxionem æquat. Perveniant igitur duo gravia æqualia ad eamdem horizontalem BC (Fig. 52.), & unum deſcendat per verticalem AB, altèrum per curvam AC, velocitates in punctis B, & C erunt æquales. Nam grave deſcendens per curvam, eamdem acquirit velocitatem, ac ſi cecidiſſet ex ſublimitate DB: ſublimitas autem DB differt a ſublimitate AB per infinitas infiniteſimas ſecundi gradus, quæ ſimul junctæ, & in unam ſummam collectæ conſtituunt AD infiniteſimam primi gradus. Velocitates ergo utrobique ſe habebunt, vocando AB x, ut $\sqrt{x} : \sqrt{x-dx}$, hoc eſt æquales, quod erat demonſtrandum.

THEO-

THEOREMA III.

Deſcendat grave in hypotheſi gravitatis conſtantis per curvam quamcumque BCD (Fig. 53.), & gravitas abſoluta mobilis exponatur per conſtantem CG. Ducta tangente C *c* F, ex puncto G demittatur ad dictam tangentem normalis GF. Quoniam vis CG reſolvitur in vires CF, FG, quarum ſecunda nihil facit ad motum, cum ſit normalis ad curvam, & tota inſumitur, vel in gravitando curvam, vel in diſtenſionem fili AC in penduliſ; illud ſequitur, quod vis CF ſit illa, a qua mobile per curvam acceleratur, & quam deinceps vocabimus vim tangentialem: ſed CG: CF:: C*c* : : *co*; ergo vocando vim CF = *f*. CG = *a*, C*c* elementum curvæ = *ds*, *co* elementum abſciſſæ = *dx*, habebimus $f = \frac{adx}{ds}$.

COROLLARIUM I.

Si curva BCD ſit quadrans circuli, & exponatur vis conſtans CG per radium AC, erit ordinata EC = vi tangentiali FC. Unde circulus ipſe eſt relate ad ſe ipſum ſcala virium tangentialium acceleratium.

COROLLARIUM II.

Porro velocitas in quacumque curva eſt ſemper in ratione dimidiata ſublimitatis AE.

COROLLARIUM III.

Cum ſit $f = \frac{adx}{ds}$, vel $ds = \frac{adx}{f}$ & ſit $ds = udt$, habebimus $dt = \frac{adx}{fu}$, & integrando, $t = \int \frac{adx}{fu}$: utraque autem *f*, & *u* data eſt per *x*, ut docuimus.

THEOREMA IV.

In duobus pendulis oſcillantibus in vacuo AB, AD, (Fig. 55.) & arcus ſimiles deſcribentibus ſint vires abſolutæ *f*, F, in qua ratione cum ſint tangentiales, ut ob ſimilitudinem triangulorum manifeſtum fit, perinde eſt utrum uſurpentur tangentiales, vel abſolutæ, dum motus pendulorum circularium inter ſe comparantur. Sint maſſæ corporum *m*

M, & longitudines pendulorum AB, a, AD, A: quæro quænam relatio intercedat inter velocitates, & tempora oſcillationum. Pono arcus minimos $Gg = dt$, $Hb = dS$.

Quoniam ſi vires ſollicitantes pendula, ducantur in elementa ſpatiorum dimenſorum, producta æqualia ſunt facto ex momentis velocitatis in maſſam, igitur $fds = mudu$; FDS = MVDV; ergo fds : FDS:: $mudu$: MVDV, & integrando, $\int fds : \int$ FDS:: mu^2: MV^2 : ſed $Gg = ds$: $Hb = dS$:: AG = a: AH = A; igitur fa : FA :: mu^2 : MV^2, vel $\frac{fa}{m} : \frac{FA}{M} :: u^2 : V^2$.

Jam cum ſit $u = \frac{ds}{dt}$, & $V = \frac{dS}{dT}$, facta horum valorum ſubſtitutione, ponendo etiam loco ds, dS proportionales a, A; $\frac{fa}{m} : \frac{FA}{M} :: \frac{a^2}{dt^2} : \frac{A^2}{dT^2}$: unde fit $\frac{am}{f} : \frac{AM}{F} :: dt^2 : dT^2$, vel $\frac{\sqrt{am}}{\sqrt{f}} : \frac{\sqrt{AM}}{\sqrt{F}} :: dt : dT :: t : T$; nam cum ſint in aſſignata ratione tempora infiniteſima, quibus percurruntur ſpatia minima Gg, Hb, in eadem ratione erunt tempora integra, quibus conficiuntur arcus ſimiles quicumque BG, DH, BC, DE. Quod erat inveniendum.

COROLLARIA.

1°. Tempora oſcillationum pendulorum diverſorum ſunt ex formula aſſignata in compoſita ratione ex ſubduplicata maſſarum, & longitudinum pendulorum directe, & ſubduplicata itidem, ſed inverſa ponderum.

2°. Si longitudines pendulorum ſint æquales, hoc eſt $a = A$, erit $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{f}} : \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{F}} :: t : T$.

3°. Si $t = T$; ergo $\frac{am}{f} = \frac{AM}{F}$ vel $a : A :: \frac{f}{m} : \frac{F}{M}$, hoc eſt pendula ſunt iſocrona, quando pondera diviſa per maſſas ſunt in eadem ratione, ac longitudine.

4°. Quod ſi maſſæ ſint æquales, iſocroniſmus ſervatur, dum vires ſunt inter ſe, ut longitudines pendulorum, & ſi æquales vires, in eadem hypotheſi longitudines debent eſſe in maſſarum ratione inverſa.

5°. Si

5°. Si ſollicitationes, quibus pendula agitantur, id eſt vires, ve pondera ſint proportionalia longitudinibus pendulorum, tempora erunt in ratione dimidiata maſſarum; tunc enim $\sqrt{m} : \sqrt{M} :: t : T$.

6°. Cum autem ſint numeri oſcillationum in ratione inverſa temporum, hoc eſt $t : T :: \frac{1}{n} : \frac{1}{N}$ hinc alia corollaria deduci poſſunt; tot enim ſunt, ex quibus tot Theoremata confici poſſunt, quot ſunt combinationes ſpecierum a, A; f, F, m, M; t, T; n N, a quibus repræſentantur longitudines, maſſæ, pondera, tempora, & numeri oſcillationum.

SCHOLIUM I.

Attendendum potius eſt ad phænomena, quæ in pendulis communibus obſervantur. Si pendula ſint æqualis longitudinis ſemper erunt iſocrona, licet ipſis appendantur non ſolum æqualia pondera, ſed inæqualia, nec tantum ex eadem materia confecta, ſed etiam ex diverſa, ut ſi glans unius penduli ſit aurea, & alterius lignea, vel plumbea. In hujuſmodi pendulis machinæ Boyleanæ incluſis, ubi minima eſt aeris extenuati reſiſtentia, oſcillationes ſunt perfectæ iſocronæ, ſi fiant per arcus æquales; adeo ut in mille vibrationibus vix notari poſſit dimidiæ oſcillationis differentia. In aere libero reſiſtentia medii aliquid operatur, & turbat iſocroniſmum. Notandum tamen, quod pendula demitti debent ex æqualibus altitudinibus; nam per arcus inæquales in circulo deſcenſus non ſunt æque diuturni. His poſitis, in noſtra formula $\frac{\sqrt{am}}{\sqrt{f}} : \frac{\sqrt{AM}}{\sqrt{F}} :: t : T$ habebimus $t = T$, & $a = A$; ergo $\frac{m}{f} = \frac{M}{F}$, hoc eſt $f : F :: m : M$. Erunt igitur vires, ſeu pondera maſſis proportionalia, quod alibi ex deſcenſu verticali gravium demonſtratum eſt, & nunc confirmatur ex oſcillationibus pendulorum.

Quæ cum ita ſint, erit in formula generali ad pendula communia applicata $\frac{m}{f} = \frac{M}{F}$; ergo $\sqrt{a} : \sqrt{A} :: t : T$, hoc eſt tempora in ratione dimidiata longitudinum, quod comprobat experientia; ſi enim comparentur inter ſe duo pendula, quorum ſecundum ſit primi quadruplum in longitudine, tempora oſcillationum erunt in ratione dupla.

SCHOLIUM II.

Hoc fundamentale principium innumeras Phyſicorum hypotheſes evertit. Mirari non deſino confidentiam, qua Philoſophi minimis particulis corpora præſertim fluida componentibus peculiares figuras aſſignant. Sic atomi aquæ cilindricæ ſunt, vel ſphæricæ, at illæ, ex quibus argentum vivum componitur, ſunt minimæ ſphæroides elipticæ. Sal marinum conſtat ex cubis, & reliqua ſalia figuras ſortita ſunt determinatas, & regulares. Verum ſi hujuſmodi hypotheſis conferatur cum his, quæ demonſtrata ſunt, ſtatim falſitatis arguetur. Si aqua conſtat ex ſphæris, cum cubus ad ſphæram inſcriptam ſit quam proxime in ratione binarii ad unitatem, ſequeretur nullum corpus in natura dari, cujus gravitas ſpecifica eſſet plus quam dupla gravitatis aquæ in ſpecie, quod eſt contra experientiam. Sed de his dicta ſint ſatis.

PROBLEMA.

Invenire pendulum iſocronum in hypotheſi gravitatis conſtantis.

Quæſtio huc redit, ut determinetur curva, per quam pendulum oſcillando quaſcumque vibrationes, ſive magnas, ſive parvas eodem tempore perficiat.

Sit jam factum, & curva quæſita ſit BCD. (Fig. 53., & 54.). Gravitas mobilis in quocumque puncto C, cum ſit conſtans, & tendat ad centrum infinite diſtans, exprimatur per conſtantem GC axi AD parallelam: vis tangentialis, qua mobile urgetur uniformiter per elementum C*c* curvæ, erit CF, quæ determinatur, ut jam dictum eſt, ducta tangente CF, & demiſſa ex puncto G normali GF.

His poſitis curva BCD extendatur in rectam verticalem b_2Cd, & ſit $BC = b_2C$, & $2C_2c = Cc$. Ponatur ordinata $2C_2F = CF$, hoc eſt vi tangentiali curvæ in puncto C, & per punctum 2F, aliaque ſimiliter determinata tranſeat curva d_2F_2G, quæ ſit ſcala virium ſollicitantium mobile per rectam *bd*. In primis manifeſtum eſt pendulum deſcendere per curvam BCD, vel per quamcumque ejus portionem CD eodem prorſus tempore, quo mobile percurrit rectam *bd*, vel ejus partem $2Cd = CD$.

Cum enim tam ſpatiola C*c*, $2C_2c$, quam vires acceleratrices CF, $2C_2F$ ſint utrobique æquales, manifeſtum eſt tempora minima per C*c*, $2C_2c$ eſſe æqualia, quod cum verificetur in ſingulis elementis arcus CD, & abſciſſæ $2Cd$, evidens quoque eſt tempora integra per CD, $2Cd$ eſſe æqualia. Idem demonſtrabimus de deſcenſu penduli per arcum quemcumque KD, & mobilis per rectam æqualem *kd*. Interim Problematis conditio poſtulat, ut tempora deſcenſus per arcus BD, CD, KD, vel

per

per verticales bd, $2Cd$, kd &c. ſint æqualia; ergo per ea, quæ ſunt alibi demonſtrata, hæc conditio impleri non poteſt, niſi ſcala virium ſollicitantium mobile per verticalem bd ſit triangulum, & curva $d2F2G$ tranſeat in lineam rectam, tunc enim tempora deſcenſuum per bd, $2Cd$, kd ſunt æqualia; ergo $2Cd : 2C2F :: DC : CF$ in ratione conſtante.

Sit itaque arcus $DC = s$, ejus elementum $Cc = ds$, vis ſubtangentialis $FC = bs$, utpote quæ debeat eſſe ad arcum in ratione conſtante, gravitas abſoluta $CG = a$, elementum abſciſſæ De, hoc eſt $Ee = dx$. Ob ſimilitudinem triangulorum GCF, Cco, erit $GC = a : CF = bs :: Cc = ds : Co = dx$; ergo $\frac{adx}{b} = sds$, quæ eſt æquatio differentialis ad Cycloidem.

COROLLARIUM.

Si ponatur CG conſtans = duplo diametro circuli genitoris Cycloidis, hoc eſt gravitas abſoluta exprimatur per duplum ejuſdem diametri, vis tangentialis CF erit ubique arcui cycloidico CD æqualis.

CAPUT QUINTUM.

De Trajectoriis deſcriptis a viribus centralibus in vacuo.

ARduam tractationem aggredimur, quam tamen ad aliquas faciliores formulas adducere tentabimus, nonnullis præmiſſis Theorematibus.

THEOREMA I.

Sint duo gravia æqualia, quorum primum deſcendat verſus B (Fig. 56.) per lineam rectam AB ſollicitatum a viribus centralibus, quarum ſcala ſit curva CGg; alterum feratur per trajectoriam AF*f* hac lege, ut ex centro B ductis quibuſcumque arcubus circularibus EF, *ef* ſecantibus trajectoriam in punctis F, *f*, mobile in puncto F, vel *f* ſollicitetur verſus centrum B vi EG, vel *eg*: dico utrumque grave, tam illud deſcendens per rectam AE, quam illud, quod fertur per curvam AF, in punctis analogis E, F; *e*, *f* habere velocitates æquales.

Incipiant moveri dicta mobilia in punctis E, F velocitate impreſſa æquali, & mobile, quod fertur per lineam rectam, ſollicitetur per minimum ſpatium E*e* a vi centripeta EG: aliud vero deſcribens arcum infiniteſimum F*f* a vi tangentiali FI; nam poſita FK = EG, ſi ex puncto K ad tangentem FI demittas normalem KI, vis centralis FK reſolvitur in vires IK, FI, quarum prima utpote perpendicularis ad curvam trahit grave a tangente verſus curvam, altera juxta directionem tangentis illud accelerat.

Jam

Jam ob triangula ſimilia, KF: FI :: Ff: FH, vel Ee; ergo KF: FH = EG. Ee = FI. Ff. ſed GE. Ee = momento velocitatis in e, & IF. FE = momento velocitatis in f; ergo dicta momenta, hoc eſt velocitates in e, f ſunt æquales. Et quoniam id ſemper verificatur, ſumptis in recta AB, & curva AFK duobus aliis elementis analogis, ſequitur in quibuſcumque punctis analogis velocitates eſſe æquales. Quod E. D.

COROLLARIUM.

Ex Theoremate præmiſſo prima deducitur formula. Cum enim in motu rectilineo ſit ſemper — $fds = udu$, & velocitas etiam in motu curvilineo ſit eadem, atque inſuper ſit Ee = FH, habebimus pariter vim centralem ductam in elementum ordinatæ FH æqualem momento velocitatis mobilis in quocumque puncto F curvæ; ergo $2aa - 2\int fds = u^2$, ponendo FH = ds.

THEOREMA II.

Deſcribat grave, cujus vis centripeta tendat ad centrum B (Fig. 57. quamcumque trajectoriam AFK: dico tempus per arcum curvæ AF eſſe ſemper proportionale ſpatio ABF. Poſtquam mobile pervenit ad punctum F curvæ, habet velocitatem acquiſitam, per quam tempore infiniteſimo percurrat uniformiter curvæ arcum Ff: ſi dictum mobile a nulla vi centrali afficeretur, motum ſuum continuaret per tangentem Ff productam, & ſecundo inſtanti primo æquali percurreret ſpatium fI = Ff: ſed vis centripeta urget grave per directionem Ii, quæ cum centro ipſo concurrit, verſus quod grave impellit, & ob angulum infiniteſimum FBI eſt etiam parallela rectæ BF; ergo mobile per legem virium centripetarum fertur per elementum curvæ fi, & in fine ſecundi inſtantis reperitur in puncto i.

Jam rectæ infiniteſimæ æquales Ff, fI exponunt duo momenta æqualia, & cum ſint etiam æqualia duo triangula FBf, fBI, & triangulum fBI ſit æquale triangulo fBi, quod ſemper verificatur, veritas Theorematis manifeſta eſt.

COROLLARIA.

I. Hinc profluit altera formula; ſi enim elementum temporis, quo percurritur arcus infiniteſimus Ff, vocetur dt, ſit autem Bf = s, & arcus minimus fH = dz, habebimus $sdz = dt$.

II. Eſt autem tempus ut elementum Ff directe, & velocitas inverſe, ponendo Ff = dvv; $dt = \frac{dvv}{s}$; ergo $sdz = \frac{dvv}{u}$, quæ eſt tertia formula.

III Sit

III. Sit FL normalis ad curvam, ad quam ex centro B demittatur perpendicularis BL: habebimus ob ſimilitudinem triangulorum F*f*H, FBL (ſi ſtatuatur FL = *p*) BF = *s*: FL = *p*:: F*f* = *dvv*: *f*H = *dz*; ergo *sdz* = *pdvv*, & in formula corollarii ſecundi $sdz = \frac{dvv}{u}$, collocando loco *sdz* ſuum valorem *pdvv*, erit $pdvv = \frac{dvv}{u}$, hoc eſt $p = \frac{1}{u}$. Eſt igitur ſemper normalis FL reciproce ut velocitas, quæ eſt quarta formula.

IV. Sit radius oſculator MF, & centrum oſculi M, a quo ad ordinatam FB demittatur normalis MN, erit FN ſuboſculatrix, ſeu co-radius, ſitque FN = *q*; per ea, quæ dicta ſunt in problemate inverſo radiorum oſculatorum, $\frac{ds}{q} = \frac{dp}{p}$: ſed $ds = -\frac{udu}{f}$, & $\frac{dp}{p} = -\frac{du}{u}$ ab æquatione $p = \frac{1}{u}$; ergo factis ſubſtitutionibus, $\frac{udu}{fq} = \frac{du}{u}$, ſeu $u^2 = fq$. Velocitas igitur ſemper eſt media proportionalis inter vim centralem, & co-radium, quæ eſt quinta formula.

V. Quoniam $u^2 = fq$, vel $\frac{ds}{q} = \frac{fds}{u^2}$, & $\frac{ds}{q} = \frac{dp}{p}$; ergo $\frac{u^2dp}{p} = fds$: ſed $u^2 = \frac{1}{pp}$; ergo $\frac{dp}{p^3} = fds$, quæ eſt ſexta formula. Hæc etiam formula deduci poteſt ex prima *fds* = *udu*; nam cum ſit $u = \frac{1}{p}$ & $du = -\frac{dp}{pp}$, erit $-udu = \frac{dp}{p^3} = fds$.

SCHOLIUM.

Ex prædictis formulis nullo negotio deducere poſſumus æquationem trajectoriæ expreſſam per ſecundas differentias. Sed præſtabit formulam ipſam differentio-differentialem ex aliis principiis deducere. Sit trajectoria KCH (Fig. 58.), centrum virium A, & ſit mobile in puncto C. Sumatur arcus infiniteſimus CF, ſitque CE tangens curvam, quæ tangens ab ordinata AF producta ſecetur in E. Centro A intervallo AC deſcribatur arcus minimus CB, & centro C intervallo CF alter arcus minimus FD, deinde ſint rectæ CG, FG normales ad curvam in punctis C, F, quæ concurrant in puncto G, & ſit GC, vel FG radius oſculator.

Hæc

Hac præparatione facta manifeſtum eſt interceptam EF eſſe ſpatium, quod mobile percurrit ſollicitatum a vi centrali, eo tempore nempe dt, quo percurreret tangentem CE, ex quo fit, quod revera percurrat arcum CF. Jam velocitas, qua percurritur linea EF eſt fdt, hoc eſt ut vis ducta in tempus, & eſt etiam ut EF directe, & ut tempus inverſe; ergo $fdt = \frac{EF}{dt}$; vel $f = \frac{EF}{dt^2}$; ſed GC, r: CF, dvv:: :: CF, dvv: DF $= \frac{dvv^2}{r}$, & rurſus BG, dz: CF, dvv:: DF, $\frac{dvv^2}{r}$: FE $= \frac{dvv^3}{rdz}$ igitur ſubſtituendo, $f = \frac{dvv^3}{rdzdt^2}$. Verum cum tempora ſint in ratione arearum, habebimus $dt = sdz$, poſita nempe AC $= s$; ergo $f = \frac{dvv^3}{rs^2dz^2}$. Interea quia valor radii oſculatoris, ſumptis pro conſtantibus CB$=dz$, vel CF$=dvv$, vel BF$=ds$, eſt reſpective $\frac{sdvv^3}{dvv^2dz-sdzdds}$; vel $\frac{sdzdvv}{dzz-sdds}$, vel tandem $\frac{sdvv^3}{dzdvv^2+sdsddz}$; hinc factis operationibus, & opportunis ſubſtitutionibus, erit $f = \frac{dvv^2-sdds}{s^1dz^2}$, vel $f = \frac{dvv^2dz^2-sdvv^2dds}{s^3dz^6}$, vel $f = \frac{dzdvv^2+sdsddz}{s^1dz^3}$. Jactis his fundamentis, placet aliquot neceſſaria Problemata addere.

PROBLEMA I.

Determinare leges virium centralium in circulo.

Circa clavum fixum in puncto A (Fig. 59.) rotetur grave aliquod alligatum filo AB, & deſcribat circumferentiam BCD motu æquabili. Vocetur ut moris eſt vis centrifuga, ſeu conatus, quem mobile exercet, ut recedat a peripheria circuli per tangentem, vocetur inquam f, cui ſemper æqualis eſt, & contraria vis, qua retinetur in dicta circumferentia. Hac ſcilicet grave tentat extendere cordam, quam ſuppono infinite rigidam. Voco u velocitatem actualem mobilis per circumferentiam, & ſit radius AB$=r$, circumferentia $= cr$, tempus unius integri circuitus ſit t. Ergo habebimus $\frac{cr}{u} = t$, & hæc eſt prima formula.

Deinde ſumamus alteram formulam ex corollario quarto, hoc eſt $fq = u^2$, ſed cum in circulo tam radius oſculator, quam ſuboſculatrix coincidant cum ſemidiametro AB, erit $fr = u^2$.

De-

Denique idem grave, ut acquirat velocitatem u, quam habet dum agitur per circumferentiam BCD, debeat descendendo verticaliter ex puncto quietis H percurrere lineam verticalem HI, & in puncto I moveatur prædicta velocitate u. Vocetur altitudo HI, a, gravitas communis, g; ideoque $2ga = u^2$.

Ex inventarum formularum combinatione sequitur primum $fr = u^2 = 2ga$, & ponendo $r = 2a$, erit $f = g$, hoc est si mobile revolvatur ea velocitate, quam acquisivisset cadendo dimidii radii ex altitudine, conatus centrifugus gravitati æqualis est: & generaliter conatus centrifugus est ad gravitatem, ut dupla HI ad radium AB.

2°. Cum sit $fr = u^2$, & $u = \frac{cr}{t}$, vel simpliciter $\frac{c}{t}$ ponendo $c =$ circumferentiæ radii AB; ergo $fr = \frac{c^2}{t^2}$, vel $\frac{c^2}{fr} = t^2$, hoc est $\frac{c}{\sqrt{f}\sqrt{r}} = t$, & ponendo r loco unitatis, erit tempus ut arcus directe, vel integra circumferentia, & inverse ut radix conatus centrifugi. Reliqua habentur ex formulis.

SCHOLIUM.

Comparemus conatus centrifugos mobilium, qui circulos diversos describunt, & lineæ minusculæ designent in uno circulo, quod in alio majusculæ. Sit igitur $fr = u^2$, $FR = V^2$; $\frac{c}{t} = u$, $\frac{C}{T} = V$; $\frac{c}{\sqrt{f}\sqrt{r}} = t$ $\frac{C}{\sqrt{F}\sqrt{R}} = T$.

I. Sint velocitates æquales; ergo $fr = FR$; & conatus centrifugi in ratione inverse radiorum, seu distantiarum a centro, hoc est f: F:: R: r; deinde ob $\frac{c}{t} = \frac{C}{T}$, c: C:: t: T: sed c: C:: r: R; ergo tempora ut distantiæ, hoc est in ratione virium inversa:

II. Sint velocitates in quacumque ratione distantiarum, hoc est $u = r^m$, $V = R^m$: habebimus fr: r^{2m}:: FR: R^{2m}, vel f: F:: r^{2m-1}: R^{2m-1}. Si igitur velocitates sint ut distantiæ, & sit $m = 1$, vires erunt ut eædem distantiæ. Et si velocitates sint in ratione inversa dimidiata distantiarum, hoc est $m = -\frac{1}{2}$, vires erunt inter se in ratione reciproca duplicata distantiarum; habebimus enim f: F:: r^{-2}: R^{-2}. In

hac hypotheſi tempora erunt in ratione ſeſquiplicata diſtantiarum; & in hoc conſiſtit celebre Theorema Repleri pro motibus cæleſtibus. Nam cum $\frac{c}{u} : t :: \frac{C}{V} : T$, vel $\frac{u}{v} : \frac{R}{r} :: t : T$, hoc eſt $\frac{rr}{vv} : \frac{RR}{VV} :: t^2 : T^2$, &

$u^2 = fr$, $V^2 = FR$; ergo $\frac{r}{f} : \frac{R}{F} :: t^2 : T^2$: ſed $f = \frac{1}{rr}$, & $F = \frac{1}{RR}$

igitur $r^3 : R^3 :: t^2 : T^2$.

III. Si tempora periodica ſint æqualia, conatus centrifugi erunt ut diſtantiæ. Reliqua prætereo, quæ ex formulis facile deducuntur.

PROBLEMA II.

Invenire vim centralem cujuſcumque mobilis datam trajectoriam in vacuo deſcribentis.

VEl æquatio differentialis curvæ data eſt relate ad focum, hoc eſt ad centrum virium, vel ſolum data eſt relate ad axem.

In primo caſu res eſt facilis, ſive utamur formula ſecundas differentias involvente, ſive adhibeamus formulas continentes tantum primas differentias. Exemplum dabimus in utraque hypotheſi.

EXEMPLUM I.

Sit Logarithmica ſpiralis, cujus æquatio ſit $adz = bds$, hoc eſt ſit CB: BF (Fig. 58.) in ratione conſtante: erit ſemper triangulum minimum ſpecie datum, & $CF = dw = cds = hdz$. Jam ſumpta pro conſtanti dz, habebimus $bdds = 0$. In formula igitur $f = \frac{dw^2 - sdds}{s^3 dz^2}$

deleatur terminus $- sdds = 0$, & loco dw^2 collocetur valor $hhdz^2$: habebimus valorem $f = \frac{hh}{s^3}$, hoc eſt vires reciproce ut cubi diſtantiarum.

EXEMPLUM II.

Sit Spiralis hyperbolica ad focum, cujus ſubtangens ſit ſemper conſtans, & $= a$. Habebimus ergo $a : s :: dz : ds$, vel $\frac{ads}{s} = dz$. Sumantur iterum differentiæ, ſumpta ds pro conſtante, & habebimus $- \frac{ads^2}{s^2}$

$= ddz$

$= ddz$. Jam cum ſit $\frac{ads}{s} = dz$; vel $\frac{a^2ds^2}{s^2} = dz^2$, habebimus $\frac{a^2ds^2}{s^2} + ds^2 = dz^2 + ds^2 = dw^2$. Sumamus formulam huic caſui convenientem $f = \frac{dzdw^2 + sdsddz}{s^3dz^3}$, & ſubſtitue valores inventos loco dz, dw^2, ddz, & dz^3, & ſic ſtet formula $fs^3\,dz^3 = dzdw^2 - sds\,ddz$: habebimus $fa^3\,ds^3 = \frac{a^3\,ds^3 + ads^3 - ads^3}{s^5\quad s\quad s}$, & eliſis elidendis, & facta diviſione per ds^3, erit $f = \frac{1}{s^3}$, hoc eſt vires in ratione reciproca triplicata diſtantiarum, ut etiam in curva logarithmica ſpirali. Facilius fortaſſe præſtari potuiſſet, adhibita ſexta formula $fds = \frac{dp}{p^3}$, in qua p (Fig. 57.) ſignificat portionem normalis reſectam verſus partes ſuperiores a perpendiculari BL.

Sit rurſus ſpiralis hyperbolica, cujus ſubtangens a, ſive unitas, & retentis iiſdem denominationibus, ſit BO perpendicularis ad ordinatam BF, & per conſequens ſubnormalis curvæ, eritque $BO = \frac{sds:}{dz}$ ſed in noſtra hypotheſi $\frac{ds}{s} = dz$; ergo $BO = \frac{s^2}{a}$, & quadratum $OF = s^2 + \frac{s^4:}{a^2}$ ſed OF: FB:: FB: BL; ergo $FL = p = \frac{s^2}{\sqrt{aa+ss}}$, & differentiando, $dp = \frac{ds}{\sqrt{aa+ss}\,.\,\sqrt{aa+ss}}$, & dividendo utrobique per quantitates æquales $p^3 = \frac{s^3}{\sqrt{aa+ss}\,\cdot\,\sqrt{aa+ss}}$, erit $\frac{dp}{p^3} = fds = \frac{ds}{s^3}$, ergo f ut cubus diſtantiæ reciproce.

Altera hypotheſis eſt, quando curva refertur ad ſuum axem, ejuſque localis æquatio data eſt per abſciſſas, & ordinatas more Carteſiano. Hic caſus pariter in duos caſus dividitur; vel enim vis centripeta dirigitur ad datum punctum tamquam centrum virium, vel ad punctum infinite diſtans, ita ut directiones vis centripetæ fiant ſecundum ordinatas parallelas.

Si vis centralis tendat ad focum datum; tunc æquatio curvæ ad axem convertenda eſt in æquationem differentialem ad focum, & res per methodum ſupra expoſitam tractanda venit.

EXEMPLUM I.

Deſcribat mobile circuli peripheriam, & vis centralis tendat ad punctum datum in eadem circumferentia: quæritur lex vis centripetæ. In hoc caſu erit in ratione reciproca quintuplicata diſtantiæ.

EXEMPLUM II.

Moveatur Planeta per perimetrum alicujus ſectionis conicæ elipſis ſcilicet, vel parabolæ, vel hyperbolæ, & vis tendat ad centrum ſectionis, erit in tali caſu ut diſtantia. Hæc problemata ſolvuntur per regulas ſupra traditas.

Tranſitum faciamus ad hypotheſim, in qua vis dirigitur ad centrum infinite diſtans & recenſeamus noſtras tres formulas exhibitas in Scholio Theorematis ſecundi, nempe $f = \frac{dw^2 - sdds}{s^3 dz^2}$, in qua eſt conſtans dz; $f = \frac{dw^2 dz^2 - sdw^2 dds}{s^3 dz^4}$, in qua eſt conſtans dw; $f = \frac{dz dw^2 + sdsddz}{s^3 dz^3}$, in qua eſt conſtans ds.

Ut has formulas aptemus noſtræ hypotheſi, notandum primo, quod termini dw^2 in prima, $dw^2 dz^2$ in ſecunda, $dz dw^2$ in tertia, utpote cum aliis incomparabiles, evaneſcunt; eſt enim $s = \infty$.

Notandum ſecundo, quod quantitas s ſit conſtans; cum enim ſit infinita, variabilis eſſe nequit, & differentiæ finitæ duarum quantitatum infinitarum æqualitatem non deſtruunt.

Hinc formulæ prædictæ tranſeunt in tres ſequentes, aſſumendo pro conſtantibus eodem ordine dz, dw, ds, $f = -\frac{dds}{dz^2}$, $f = -\frac{dw^2 dds}{dz^4}$, $f = \frac{sddz}{dz^3}$.

EXEMPLUM I.

Sit quæcumque parabola vel hyperbola ABC (Fig. 60.); cujus abſciſſa $AD = z$, ordinata $BD = s$. Moveatur corpus in curva ABC, & detineatur in dicta curva a viribus centralibus, quarum directiones ſint juxta ordinatas BD. Sit æquatio catholica $z^m = s$, & differentiando, $mz^{m-1} dz = ds$, & rurſus differentiando, ſumpta conſtante dz, $mm - m . z^{m-2} dz^2 = dds$. Quoniam facta eſt conſtans dz, ſumatur prima for-

formula $f = -\frac{dds}{dz^2}$, & ſubſtituendo loco $-dds$ valorem inventum, habebimus $f = \overline{m-mm} \cdot z^{m-2}$: ſed $z^m = s$, ergo $z^{m-2} = s^{\frac{m-2}{m}}$; igitur $f = \overline{m-mm} \cdot s^{\frac{m-2}{m}}$.

COROLLARIUM I.

Si $m = 2$, & tunc $f = -2$, ſcilicet conſtans, & negativa: hoc ſignificat, quod deſcripta parabola AEF relata ad tangentem AG, per hanc fertur mobile gravitate conſtante exiſtente, ut jam demonſtravit Galilæus: verum vis centralis negativa eſt, quia non tendit ad partes ſuperiores verſus D, ſed ad inferiores verſus E.

COROLLARIUM II.

Sit $m = 1$, in quo caſu ABC eſſet linea recta, & tunc vis centripeta $f = 0$.

COROLLARIUM III.

Sit $m = \frac{1}{2}$, in quo caſu curva ABC eſt parabola relata non ad tangentem, ſed ad axem AG, & vis centralis erit reciproce, ut cubus ordinatæ BD. Omitto alias deductiones, quæ patent ex formula.

EXEMPLUM II.

Sit parabola ADEC (Fig. 61.), in qua ſit $AB = z$, $BD = s$, & æquatio curvæ $az - zz = bc$. Sumptis differentiis, erit $adz - 2zdz = bds$, & rurſus differentiando, ſumpta ds pro conſtante, ut locum inveniat tertia formula $f = \frac{dsddz}{dz^3}$, erit $addz - 2zddz - 2dz^2 = 0$; ergo $ddz = \frac{2dz^2}{a-2z}$. Facta ſubſtitutione, erit $f = \frac{2ds}{adz-2zdz}$: ſed $ds = \frac{a-2z}{b}dz$; ergo rurſus ſubſtituendo, $f = \frac{2}{b}$. Curva igitur parabolica eſt trajectoria, quam gravia noſtra deſcribunt; nam & gravitas in motibus pro-

projectorum pro conſtanti uſurpari poteſt, & directiones, quæ non niſi in centrum terræ convergunt, pro parallelis haberi poſſunt.

SCHOLIUM.

Problema addo, quod hanc materiam exhaurit. Grave A (Fig.62.) emittatur oblique cum data velocitate, & deſcribendo parabolam ABC, debeat pervenire ad datum punctum C: quæro per quam directionem, puta AD, grave impelli debeat. Sit linea verticalis FAI, ſumaturque AF talis, ut grave decidens ex puncto quietis F percurrendo rectam FA, acquirat in A eam velocitatem, cum qua grave proiicitur. Super AF deſcribatur ſegmentum circuli AHGF capiens angulum æqualem angulo CAI, & abſcindatur AE quarta pars ſagittæ AC, ducaturque altera verticalis EHG. Hæc vel cadit extra ſegmentum circuli, vel illud tangit, vel ſecat. In primo caſu velocitas impreſſa non eſt ſufficiens, ut projectum attingat ſcopum C. In ſecundo caſu unica tantum datur inclinatio, quæ præſtet effectum. In tertio datur gemina inclinatio, hoc eſt AHD, AGD: utralibet electa projectum attingit ſcopum C. Demonſtrationem inveniendam relinquo.

SCHEDIASMA XVII. (*)

In pleno tempora, quibus arcus trajactoriæ deſcribuntur, non poſſunt eſſe areis a radio vectore factis proportionalia.

SUſpicari quis poſſet Canonem Newtoni, quod nempe tempora, quibus arcus trajectoriæ deſcribuntur, ſint ſemper areis a radio vectore factis proportionalia, locum etiam invenire in pleno, dum Planeta fertur per medium reſiſtens; nam reſiſtentiæ fortaſſe ita temperari queunt, ut mobile eumdem arcum majori quidem tempore percurrat, ſed tamen arearum ratione ſervata. Hoc autem impoſſibile eſſe ſic demonſtro.

Circa focum A (Fig. 63.) deſcribat mobile in pleno trajectoriam BCE in quacumque virium centralium, & reſiſtentiarum ſuppoſitione, ſintque tempora per arcus BC, BE, ut areæ correſpondentes BAC, BAE. Cum curva BCE data ſit ſpecie, & poſitione, repetatur in *bce*, & determinetur vis centralis directa ad focum *a*, per quam eadem curva

(*) *Spianò la ſtrada alla dimoſtrazione del preſente Theorema la bella ſcoperta fatta dall' Autore l' anno* 1723., *che un Pianeta può deſcrivere nel vano la ſteſſa curva, mentre da infinite ſcale analoghe all' ordinate di forze centrali ſia ſtimolato. Al detto tempo adunque dee riferirſi queſto Schediaſma.*

va percurratur in vacuo, ejuſque ſcala ſit curva NLH. Jam demonſtratum eſt, quod ſumptis pro ſcalis virium centripetarum infinitis curvis analogis ad ordinatas NLH, *nlh* &c., ſemper eadem curva *bce* deſcribitur, variantibus temporibus & velocitatibus. Eligatur ea ſcala virium puta *nlh*, ut velocitates in punctis C, *c*, utriuſque curvæ æquidiſtantibus a verticibus B, *b* ſint æquales, & exiſtentibus æqualibus non ſolum velocitatibus ex conſtructione, ſed inſuper etiam arcubus minimis CD, *cd*, & elementis arearum CAD, *cad*, tempora quoque per arcus CD, *cd*, erunt æqualia. Sumantur alii duo arcus ad libitum æquales EF, *ef*, & cum ſit ex hypothesi tempus per CD ad tempus per EF; ut area CAD ad aream EAF, & ſit in vacuo ut tempus per *cd* ad tempus per *ef*, ita area *cad* ad aream *eaf*, tempora per EF, & *ef* erunt æqualia; ergo & velocitates per dictos arcus erunt æquales: ſed velocitas utrobique eſt media proportionalis inter vim centralem, & ſuboſculatricem punctorum E, *e*, quæ ſuboſculatrices ſunt æquales; igitur in dictis punctis erunt æquales vires centripetæ. Si itaque curva *bce* deſcribitur in vacuo, exiſtente *f* vi centripeta, per eamdem vim non poteſt altera curva BCE deſcribi in medio reſiſtente, quia reſiſtentiæ nullo modo agerent. Repugnat igitur, ut ſalva lege Newtoniana, quælibet trajectoria deſcribi poſſit in pleno Q. E. D.

SCHEDIASMA XVIII.

Del Siſtema Ticonico.

PEr riſpondere al quiſito fattomi, ſe ſiaſi mai dimoſtrato falſo il Siſtema di Ticone, io non mi fermerò in andar bilanciando i motivi ſinora addotti, ſopra i quali ſono già uſciti in pubblico i giudizj de' Dotti: ma piuttoſto proporrò una mia oſſervazione ad altri non venuta in mente, ch' io ſappia, e laſcierò a chi legge la cura di decidere di che peſo ella ſi poſſa eſſere.

I Difenſori de' due celebri ſiſtemi di Ticone, e di Copernico (mentre degli altri già ſcreditati non occorre farne menzione) convengono in ciò, che i cinque Pianeti, cioè Mercurio, Venere, Marte, Giove, e Saturno anno per centro delle loro rivoluzioni il Sole, intorno cui fanno i loro giri in tali tempi periodici, che giuſta la regola del Keplero ſono in ragione ſeſquiplicata delle diſtanze. Da queſta legge ne naſcono dimoſtrativa-

(*) *Queſto Schediaſma è ſtato dall' Autore compoſto a richieſta del P. D. Giovan Bernardo Piſenti C. R. S., il quale ne lo pregò con una lettera de' 25. Aprile 1734. Il C. I. gli riſpoſe così li 12. Maggio dell' anno medeſimo.*
„ *Per quello riguarda il dubbio da lei propoſtomi, le traſmetto una mia*
„ *Diſſertazione lavorata i giorni paſſati, e per cui ho dovuto ritardare*
„ *la riſpoſta.*

tivamente altre tre, vale a dire, che l'Orbite de' predetti Pianeti ſono tante curve ellittiche, trovandoſi il Sole in un umbilico d'eſſe a tutte comune; che la forza centrale d'ogni Pianeta in qualunque punto della ſua elliſſe ſta in proporzione reciproca duplicata della lontananza dal foco; e che i tempi parziali ſerbano la ragione delle aje deſcritte dal moto de raggi direttori: i quali canoni tutti e quattro ſi verificano nelle rivoluzioni dei Satelliti riſpetto ai Pianeti principali, come altresì delle Comete relativamente al Sole.

Non c'è diſcordia fra gli Aſtronomi d'ambo i partiti nello ſtabilire il moto della Luna intorno la Terra; reſtando tuttavia in quiſtione, s'ella debba annoverarſi fra i Pianeti primarj, ovvero fra' ſecondarj.

Tutta adunque la gran controverſia a ciò ſi riduce, ſe la noſtra terra abbia a collocarſi fra i Pianeti, onde faccia i ſuoi viaggi intorno al Sole colle regole già ſtabilite, e ſi ravviſi nel noſtro Vortice una perfetta unità di Siſtema: ovvero ſe coſtituita eſſa immobile, ſerva di centro ai giri di alcuni corpi celeſti, e ſpecialmente del Sole, che colle ſue rivoluzioni l'abbraccia, tirandoſi dietro il corteggio di tutti i Satelliti, tanto principali, quanto ſecondarj.

Ognuno comprende agevolmente, che l'ultima ipoteſi ci viene ſuggerita dalle apparenze, e che in qualunque luogo noi foſſimo ſtati prodotti, la perſuaſione di ſtare in quiete ci farebbe cangiar ſiſtema; non eſſendoci maggior ragione, per cui s'abbia ad attribuire il ripoſo piuttoſto alla Terra, che a Venere, o a Giove, e per cui gli Abitanti di que' globi, ſe per avventura ci foſſero, eſſer doveſſero immuni da un tal pregiudizio. All'incontro la coſtruzione Copernicana non ſoffre alterazione di ſorta alcuna dalla mutazione del ſito, in cui l'Uomo ſi ritrova, e di qualſivoglia Patria egli ſi finga Cittadino; purchè il Sole pongaſi nel centro dei moti, nè ſi diverſifica il ſiſtema, nè ſi varlano in conto alcuno le leggi della Natura.

Facciamoci ad inveſtigare più da preſſo le conſeguenze, che derivano dalla poſizione comune. Intorno la Terra immota gira da vicino la Luna opaca di ſua natura, e ad una aſſai più grande diſtanza il Sole riſplendente di luce propria, e circondato da cinque globi, che da lui prendono il lume, tre de' quali camminano da ſe ſoli, e due dalle loro lunule accompagnati. Per ultimo ad una incomprenſibile lontananza ſi rivolge attorno la Terra lo ſtuolo innumerabile delle Stelle fiſſe, che ſono tanti Soli. E quì ſi noti, che il moto annuale del Sole è lo ſteſſo, che alla Terra attribuir ſi dovrebbe collocata nel ſuo ſito fra Pianeti, per ſalvare la regola del Keplero.

Nel ſiſtema di Ticone il moto fiſico del Sole ſi fa per una ſpirale delineata intorno ad una ſpecie di fruſto conoidale, e per ben concepirla è d'uopo poner mente all'obbliquità, ed alla eccentricità dell'Ecclittica; ma perchè i due moti diurno, ed annuo ſogliono diſtinguerſi, e ſepararſi; oſſervo per quello appartiene al primo, che facendoſi le rivoluzioni diurne proſſimamente in tanti circoli paralleli all' equatore, i quali ſebbene anno e diametri, e centri diverſi, non oſtante ciò vengo-

no

no percorsi in ispazj di tempo poco presso eguali di ore ventiquattro; bisogna dire seguitando le dimostrazioni Newtoniane, che le forze centrali, le quali trattengono il Sole nelle periferie di questi archi, e rimirano centri differenti, atteso i tempi periodici eguali, siano proporzionali a' raggi dei medesimi circoli.

E se il Sole col giro annuale descrive un' ellissi intorno al globo terrestre, il quale è collocato non già nel centro, ma in uno dei fochi dell'Orbita, conforme le osservazioni Astronomiche c'insegnano, egli è evidente per le cose dimostrate dal citato Inglese, che costituito il Sole in varie distanze dalla Terra, le forze centrali, che lo sforzano a non abbandonare l'orbe ellittico, riguardano sempre il centro terreno, e decrescono in ragione inversa duplicata delle distanze. Sembrami una stravaganza, che allontanandosi il Sole da noi per descrivere i cerchi maggiori, che regolano il moto diurno, la forza centrale s'aumenti a misura che dee viaggiare per circonferenze più grandi; ed all'opposto, che relativamente al moto annuo la forza centripeta si accresca, ogni qual volta le distanze si minorano.

Non cesso frattanto di maravigliarmi, che non sia ad alcuno caduto in pensiero di misurare l'energia della forza centrale, per cui nel Sistema Ticonico il Sole viene obbligato nel corso d'un anno a percorrere la sua ellissi, la quale per la grandezza, e per la proporzione degli assi resta dagli Astronomi delineata, senza scostarsi gran fatto dal vero. Per farmi strada alla soluzione di questo nuovo Problema, premettasi ciò, che abbiamo dal lodato Sig. Newton, cioè che viene affetta dalla medesima gravità la Luna, che circondando il globo terracqueo si mantiene nella sua orbita, ed un corpo qualunque de' nostri, che per l'aere verticalmente discende. Veggasene l'ingegnosissimo computo, e la illazione, che se ne deduce, che quanto più i corpi, ne' quali la stessa gravità risiede, si discostano dal centro; tanto più vassi rallentando lo sforzo, che gli stimola alla discesa, e ciò in proporzione reciproca de' quadrati delle distanze.

A buon conto si sa, che questa legge si stende dalla Terra fino alla Luna, e posto giusta il Cassini, che l'intervallo medio fra questo Pianeta, e noi sia di semidiametri terrestri $57\frac{1}{2}$, e che per il numero 1000000. preso ad arbitrio si esprima la forza della gravità, che si ravvisa nei nostri corpi; se faremo come il quadrato di $57\frac{1}{2}$ alla unità, che ci espone il raggio della periferia massima della Terra, così 1000000. al quarto numero $= 302.\frac{242}{529}$, con esso dinoteremo il valore di quella forza, che conserva la Luna nella sua Orbita.

Che ſe ſupporremo propagarſi la legge menzionata ſino alle regioni del Sole, la diſtanza media del quale dalla noſtra Terra è di ſemidiametri terreſtri 22000., ſecondo il citato Caſſini, ed iſtituiremo la ſeguente analogia, come il quadrato di 22000. all'unità, così 1000000. ad $\frac{1}{484}$; avremo la miſura della forza centrale del Sole nell'ipoteſi aſ-

ſunta. Seguitando a cavare dagli ſteſſi dati le conſeguenze, giacchè per la regola del Keplero i quadrati de' tempi periodici ſono come i cubi delle diſtanze; troveremo, che il Sole dovrebbe compiere il giro della ſua ellifi in meſi lunari di giorni 27, ed ore otto l'uno n°. 7484. Ma il detto Pianeta, che cammina con aſſai maggior celerità, non impiega nella ſua rivoluzione, ſalvo che giorni n°. 365., e ſei ore; dunque la ſua forza centrale ſupera di lunga mano quella, che corriſponde al canone premeſſo.

Per rinvanirla farebbe di meſtieri dimoſtrare un Teorema, che per ora mi ſi conceda di ſupporlo vero, ed è, che quando un corpo qualunque ora più lento, ed ora più celere deſcrive una data orbita in due tempi differenti, le forze centrali ſono reciprocamente come i quadrati dei tempi periodici, nei quali le due rivoluzioni ſi compiono. Ed atteſo che 7484. meſi lunari contengono giorni $204562\frac{2}{3}$; ſe faremo come il quadrato di $365\frac{1}{4}$ all'altro di $204562\frac{2}{3}$, così $\frac{1}{484}$, forza centrale del Sole, che riſponde alla ragione reciproca duplicata delle diſtanze, ad un quarto numero proſſimamente $= 648$, ci darà queſto la forza centrale del Sole ſteſſo tal quale la ricerca il Siſtema Ticonico adattato alle oſſervazioni. In queſto mentre quella, che nella Luna riſiede, e s'è già determinata, s'eſprime col numero $302\frac{242}{529}$; dunque

nonoſtante la grandiſſima lontananza del Sole dalla Terra, che meſſa a confronto con quella della Luna ſi trova eſſere come $22000 : 57\frac{1}{2} ::$

$383 : 1$, la forza, che ſpinge il Sole verſo il centro terreſtre, è più che doppia dell'altra, che fa girare la Luna nella ſua ellifi.

Paſſiamo ad inveſtigare come ſi diffonda all'intorno del noſtro centro la forza, qualunque ella ſia, che ſi chiama gravità, per opera della quale la Luna, il Sole, e le fiſſe ſono obbligate nell'ipoteſi di Tícone ad abbracciare la mole terracquea colle loro rivoluzioni.

Primieramente per il computo Newtoniano, in cui ſi paragona la gravità di un corpo terreno con quella del globo lunare, abbiamo, che queſta forza ſi ſminuiſce in ragione inverſa de' quadrati delle diſtanze. Situata adunque la terra in A (Fig.64.), e la luna in B, la porzione

GH

GH della iperbola quadratica ci rappreſenterà la ſcala delle predette ſorſe decreſcenti.

In ſecondo luogo ſia AD la maſſima diſtanza del Sole dalla Terra, ed AC la minima, onde CD ſia la doppia eccentricità di ſemidiametri terreſtri 748: egli è manifeſto, che viaggiando annualmente il Sole per la ſua elliſſe, ed eſſendo poſta la Terra in uno de' fochi, almeno per tutto il tratto DC dovrà eſſere regolato il moto da una forza centrale, che colla legge già nota ſi minori al ricreſcere delle diſtanze. Fingaſi perciò, che la curva LK ſia una parte della iperboloide, che ſerve di ſcala alle forze, per cui viene temperato il corſo ellittico del Sole, e ſe ne deduca, che eſſendo l'ordinata CL, come di ſopra s'è provato, più che doppia di BH, l'arco KL non ha punto che fare colla curva GH, e che queſte due linee quantunque dello ſteſſo genere, ſono fra loro differenti per il valore delle coſtanti, ch'entrano nelle loro locali equazioni.

Finalmente eſſendo che la forza centrale va creſcendo, come abbiamo veduto nel paſſare dalle regioni Lunari alle Solari, e che sì fatto tranſito non ſi fa per via di ſalto, ma per gradi impercettibili; biſognerà, che la curva GH eſtendendoſi ſi ripieghi in ſenſo contrario, avanzandoſi col ramo HL, in maniera che le ſue applicate in progreſſo ſi aumentino ſino all'ordinata CL, indi torni ad inflettersi per un terzo ramo iperbolico Lk, di cui ſi è fatta parola.

Ciò, che ſin ora ſi è detto, baſterebbe per far comprendere la ſtravaganza del Siſtema, in cui la ſcala delle forze centripete, la quale è formata dal raccozzamento di vari pezzi di curve, non procede con legge certa, e determinata. Ma ſe rivolgeremo la noſtra conſiderazione a' moti delle ſtelle fiſſe, ci ſi preſenteranno nuovi, e maggiori aſſurdi.

Meſſo per ora da parte il loro moto diurno, per cui ſi girano in cerchi paralleli all' Equatore, nel centro de' quali non ſi trova quello dell' Univerſo, o ſia della Terra, e con forze tali, che ſerbano la ragione delle diſtanze; facciamci piuttoſto a riflettere ſovra un altro moto, per cui tutte le fiſſe compiono le loro rivoluzioni da Occidente in Oriente attorno la Terra ſtabile in anni numero 25920, il qual periodo ſi chiama anno grande, o Platonico, e la qual apparenza ſpiegaſi da' Copernicani col mezzo della preceſſione degli Equinozj. E ſe gli Aſtri predetti non ſono tutti inchiodati, come in una volta nella ſuperficie concava d'una ſfera, giuſta la credenza degli Antichi, ma ſono diſpoſti in differenti diſtanze dal centro comune del Mondo, ſiccome ce lo perſuadono il buon ſenſo, e parecchi fenomeni; biſogna neceſſariamente dire, che le loro forze centrali ſerbino la proporzione delle lontananze; ſtantechè nel compiere i loro giri c'impiegano tempi periodici eguali.

Inveſtighiamo preſentemente a quale intervallo abbia a collocarſi tal una d'eſſe Stelle, onde debba terminare il ſuo periodo nell'aſſegnato numero d'anni, ſalvo il canone del Keplero. E perchè ſe ne può fare un doppio paragone, cioè col corſo meſtruo della Luna, e coll'annuale del Sole, nel primo caſo, la Stella ſi diſcoſterebbe da noi per 283590

ſemidiametri terreſtri, vale a dire non arriverebbe ad eſſer lontana tredici volte, quanto è lontano il Sole; nel ſecondo caſo la diſtanza notabilmente s'accreſcerebbe, ſino ad eſſere 876 volte più grande di quella, che dal Caſſini al Sole viene attribuita.

Ognun ſa, che non abbiamo alle mani ſin ora dati ſufficienti per miſurare la lontananza delle Stelle fiſſe: a me baſta però per dedurre legittimamente le mie conſeguenze, che ſia maggiore delle due ipoteticamente determinate. E quanto alla prima, che ſupera di poco quella di Saturno, non ſe ne debbe fare alcun conto: per la ſeconda poi, la quale ha più del ragionevole, poſto il diametro apparente del Sole di mezzo grado, una Stella, per modo di eſempio Sirio, liberata con un ottimo Teleſcopio dal capillizio ſi vedrebbe ſotto un diametro apparente di minuti ſecondi $2\frac{1}{20}$ nella ſuppoſizione, che la mole di Sirio foſſe preſſo poco uguale a quella del Sole. E pure egli è certo, che l'angolo, ſotto cui ſi oſſerva, non eccede venti minuti terzi, coſicchè la minima lontananza, che a Sirio poſſa attribuirſi, è per ſei volte almanco maggiore di quella da noi fiſſata di 876. ſemidiametri dell'orbita annua del Sole.

Ma ſe non altro per dar regola ai calcoli prendiamo la miſura trovata dall'Ughenio per via delle ragioni Diottriche, che fa il diametro apparente di Sirio di quattro minuti terzi, e lo diſcoſta dal noſtro occhio 27664 volte più del Sole: avvertendo però, che coll'accreſcerla, o col diminuirla anche fuori del limite aſſegnato, non ſi toglie nè punto, nè poco la forza all'induzioni, che ſono per fare.

Fingo dunque, che alla ſteſſa diſtanza di Sirio ci ſia un gran corpo, il quale finiſca il ſuo periodo a confronto di quello del Sole in tanto tempo, quanto appunto ne richiede la regola del Keplero. In tale ipoteſi eſſendo i cubi delle diſtanze come i quadrati de' tempi periodici; avremo (eſprimendo per l'unità la diſtanza del Sole dalla Terra, ed il ſuo tempo annuale) avremo dico il tempo periodico di Sirio d'anni 4601214, ed in oltre la ſua forza centrale, che paragonata con quella del Sole $= 648$ decreſce in ragione inverſa de' quadrati delle diſtanze, eſpreſſa per la frazione $\frac{648}{765296896}$. Ma di fatto la menzionata Stella termina aſſai più preſto il ſuo corſo in anni 25920., dunque la ſua vera, e reale forza centripeta è incomparabilmente più grande di quello ſi conſaccia alla legge del Newton, da cui dipende la Kepleriana: ed iſtituito il computo in ordine del Teorema di ſopra ricordato, che le forze centrali, per cui ſi deſcrive la ſteſſa orbita da corpi differenti, o dallo ſteſſo con diverſe velocità, ſono reciprocamente come i quadrati de' tempi periodici, la troveremo proſſimamente $= \frac{1}{17}$ di gran lunga minore di quella, che riſiede nel Sole già ſtabilita $= 648$.

Sarà

Sarà perciò neceſſario, che la ſcala delle forze centrali, in paſſando dalle regioni Solari a quelle della Stella fiſſa a noi più vicina ſituata in E ci venga rappreſentata dalla curva KM, che ſempre più ſi va accoſtando all'aſſe ACE, onde la forza centrale ſi eſprima per l'ordinata EM minore aſſai di CL: avvertendo però, che la ſuddetta curva KM non è la continuazione dell'iperboloide LK, e molto meno dell'altra GH, le quali prorogate paſſerebbono fra i due punti E, ed M.

Ma perchè la ſcala delle tante volte mentovate forze centripete dee ſtenderſi per l'immenſo ſpazio di tutte le Stelle fiſſe, ognuna delle quali fa la ſua rivoluzione intorno la terra nel tempo prefiſſo d'anni 25920., per ſalvare queſta uguaglianza fra i tempi periodici, farà di meſtieri, che la noſtra ſcala proceda non più per pezzi di linee curve; ma bensì per la retta MO, la quale inferiormente prolungata vada a congiungerſi col punto A, centro della Terra, e dell'Univerſo.

La ſola iſpezione della figura, che ci mette ſotto gli occhi le irregolarità, di cui abbiamo a lungo favellato, ci fa comprendere, quanto ſia compoſto, diſordinato, ed irragionevole quel ſiſtema, che obbliga la Natura ad operare in una ſi ſtravagante maniera.

SCHEDIASMA XIX.

Riflеſſioni ſopra un principio uſato del Bradley per iſpiegare l'alterazione delle ſtelle fiſſe.

DIſcenda il mobile D (Fig. 6ª.) per la verticale DB, e giunga a colpire il piano ſottopoſto AC, che cammina con moto equabile per la direzione ABC: ſi dimanda ſecondo qual linea, e ſotto qual angolo ſi farà la percoſſa.

Per ſatisfare al quiſito, io premetto un notiſſimo principio. La Natura non opera mai per via di ſalto, vale a dire, che ſe il mobile riſpetto ad una qualſivoglia direzione ſi trova privo di moto, non acquiſterà mai un grado determinato di velocità giuſta la direzione medeſima, ſe prima non ſi paſſa per tutti i gradi di mezzo; perchè ſe ſi faceſſe in un momento il tranſito dalla velocità nulla ad una data, e finita, non ci vorrebbe meno d'una forza accelerante infinita.

Ap-

Ha data occaſione allo Schediaſma XIX. un Problema propoſto da un Geometra Napoletano, e che il Padre D. Giovanni Crivelli C. R. S. con lettera de 31. Marzo 1734. comunicò al noſtro Autore; acciocchè diceſſe la ſua ſentenza, e gli permetteſſe di mandarla a Napoli. A fine di eſaminare il principio uſato dal Sig. Bradley per iſpiegare l'alterazione delle ſtelle fiſſe, ſi cercava ſecondo qual linea una palla cadente a piombo percuota un piano orizzontale, che con direzione parimente orizzontale cammina con moto equabile.

Applicando al caſo noſtro l'aſſioma, egli è certo, che ſinattantochè la palla D cade per la perpendicolare DB, in eſſa non ſi ravviſa alcuna impreſſione orizzontale; quando non ſi voleſſe, che il moto del piano comunicato all'aere faceſſe deviare la ſfera menzionata dalla linea del piombo: la qual particolarità non ſi vede eſpreſſa nella propoſta, e ad altro non ſervirebbe, che a rendere la queſtione più complicata.

Perciò ſe noi ſupponiamo, che la percoſſa ſi faccia in un iſtante, io penſo, che il globo D nell' atto di toccare per un ſolo momento il piano, non poſſa guadagnare, ſalvo che un grado infinitesimo di velocità orizzontale. E ſe tanto la palla, quanto il piano foſſero perfettamente elaſtici; non ho dubbio, che la rifleſſione non ſi aveſſe a dirigere per la ſteſſa linea BD già traſcorſa nella diſceſa.

Ma ſe, per dir così, il colpo iſtantaneo muore nel piano, onde ſia eſcluſo il moto rifleſſo, dopo ſeguita la percoſſa ſecondo la linea verticale DB, il grave appoggiato al piano acquiſterà a gradi la velocità orizzontale; ma ciò ſi farà a norma dei canoni della comunicazione del moto fra i corpi molli. Sia M la maſſa del piano AC, V la ſua velocità, ed *m* la maſſa della palla D; ogni qual volta la palla ſteſſa camminerà con tutta quella celerità, che le può eſſere partecipata, avremo la velocità comune della palla, e del piano uguale alla quantità $\frac{MV}{M+m}$.

E ſe così è, cangiando ipoteſi, e poſto, che la percoſſa non ſia momentanea, ed il corpo D conſumi qualche piccolo ſpazio di tempo a premere il piano, perdendo ſucceſſivamente, e a gradi tutta la velocità acquiſtata nella caduta; mi ſembra manifeſto, che durante l'azione del colpo, o per dir meglio de' colpi replicati l' un dopo l' altro, alla palla ſi comunichi nel tempo ſteſſo una qualche parte di quella velocità, con cui il piano attualmente cammina. E ſe nel caſo dell'urto momentaneo queſta velocità è inaſſegnabile; ne ſegue dipender eſſa dal tempo, in cui la percoſſa ſi compie, il quale quanto ſarà più breve, tanto minor velocità orizzontale nella palla D verrà impreſſa. La durata del tempo da molte circoſtanze reſta alterata, cioè dalla grandezza, dalla materia, e dalla figura del corpo D, e molto più dalla ſua velocità, ed in oltre dalla materia, dall'aſprezza, e dalla velocità del piano, e da parecchj altri accidenti, che ſi potrebbono aggiungere.

A queſto paſſo ſi noti, che nel fermarſi, che fa la palla ſul piano, ſinattantochè la percoſſa ſi compia, relativamenente al punto mobile B del piano medeſimo reſterà eſſa alquanto indietro; perchè non può al primo tocco acquiſtare l'intiera velocità orizzontale. Ma riſpetto al punto immobile, che ſi conſidera fiſſo nella verticale DB, la palla in virtù del moto orizzontale guadagnato appoco appoco, nel mentre che và perdendo il verticale, s'avanzerà dal punto B verſo C giuſta la direzione del piano.

In-

Interverrà pertanto, che il primo urto ſi eſerciti a piombo contro il punto mobile B, e che in progreſſo la palla s'appoggi, e prema diverſi punti del piano compreſi fra i due limiti B, E, ſuppoſto che pervenuta la palla al contatto in E, tutto il moto per la direzione verticale ſia eſtinto, e finita conſeguentemente l'azione della percoſſa. Ognuno vede, che nelle impreſſioni di mezzo fra B, ed E ſi complicano i due moti verticale, ed orizzontale, e che ſi va ſempre variando la proporzione, atteſo che in vicinanza del punto B il moto a piombo ſupera di lunga mano l'orizzontale; laddove ne' punti proſſimi al punto E ſuccede tutto all'oppoſto. Diviſo perciò il tempo finito della percoſſa in minimi elementi, e conſiderato il colpo come una ſerie d' impreſſioni iſtantanee, e ſucceſſive contro tutti i punti della retta BE, egli è certo, che ogni impreſſione in particolare ſi fa ſotto una diverſa direzione, e in ordine a ciò farebbe meſtieri determinare la media direzione: ma ſtante, le contuſioni, che ſi fanno tanto nella palla, quanto nel piano ſottopoſto, e le coſe notate di ſopra, io giudico la quiſtione inſolubile.

Non è però affatto inutile la ſpeculazione, e ſerve, s'io non m'inganno, a metter in chiaro la bella ſcoperta dell Ingleſe Bradley in propoſito dell'aberrazione delle ſtelle fiſſe. Non cerco per ora, ſe la dimoſtrazione dell'Autore ſia concludente; affermo bensì, che corriſpondendo sì eſattamente la ſua ipoteſi alle oſſervazioni, non biſogna così di leggeri abbandonarla.

Ecco come per me la coſa ſi ſpiega. Mentre s'ammetta, che la luce ſi propaghi in tempo, ne naſce per neceſſaria conſeguenza, che ſi fa in tempo anche la noſtra viſione. L'occhio adunque ſtabile BC (Fig. 66) rimiri la ſtella fiſſa A, e la luce, che produce in noi la viſione, dopo aver penetrati gli umori dell'occhio faccia impreſſione in una fibrilla BC del noſtro enſorio, e la ripieghi nella curva elaſtica BEC: in queſto caſo la viſione ſi farà per la retta EA, che paſſa per il vertice E della curva, ed è l'aſſe, che taglia per metà, e perpendicolarmente tutte le ordinate della curva medeſima parallele alla BC.

Ma ſe nel tempo medeſimo, in cui s'inflette la fibra BC, accaderà, che l'occhio ſi muova giuſta la direzione CB, per le coſe dette i raggi luminoſi, che non acquiſteranno in un momento il moto giuſta la direzione dell'occhio, reſteranno addietro, ed in vece di piegare la fibrella nella curva BEC, la infletteranno nella curva alquanto obbliqua BFC ſegnata a punti, il di cui vertice ſarà in F. Per avere la media direzione di tutti gli impulſi, baſterà ſeguitando i documenti del Signor Gio. Bernoulli, a due punti eſtremi B, C tirare le due toccanti BG, GC, e diviſo l'angolo BGC per metà colla retta GH, determinerà eſſa il raggio viſuale, che formerà l'angolo piccioliſſimo HGI colla linea GI parallela ad EA. Non ſi vedrà adunque l'obbietto luminoſo per la GI, o per la EA, le quali linee per la loro minima diſtanza fiſicamente coincidono, ma piuttoſto per la GH, la quale prorogata alla diſtanza ſterminata, per cui ſono da noi lontane le ſtelle fiſſe, cagionerà quella

pic-

picciolissima diversità d'aspetto, o sia aberrazione, che da noi si osserva, e di quest'angolo d'aberrazione se non altro dai Fenomeni se ne avrà la misura. Sopra questo punto assai delicato sarebbe necessario prender per mano le osservazioni fin ora fatte, ed istituire calcoli assai laboriosi, ch'io lascio di buona voglia agli Astronomi, bastandomi d'aver arrischiato una conghiettura.

SCHEDIASMA XX. (*)

Determinare la lunghezza d'un pendolo semplice isocrono ad un dato composto.

Sia il pendolo composto ACB (Fig.67.) con due pesi C, B attaccati alla verga rigida, e non pesante AB, il quale movendosi dalla orizzontale AK pervenga nel sito ACB, e sia disposto a continuare il suo viaggio nel tempo minimo *dt* per gli archi infinitesimi, e simili $Bb = dS$, e $Cc = ds$. Le due verticali BD, CE espongano le masse M, *m* delle due ghiande B, C animate dalla lor naturale gravità, e condotte le rette *Bd*, *Ce*. che tocchino gli archi *Bb*, *Cc* nei punti B, C, dalle estremità D, E si lascino cadere sopra le menzionate tangenti le due perpendicolari *Dd*, *Ee*.

Ognun sa, che le intercette *Bd*, *Ce* esprimono le forze tangenziali, da cui i gravi B, C vengono stimolati alla discesa per gli archi *Bb*, *Cc*: non ostante ciò è cosa per se stessa manifesta, che per esse non ponno esporsi le totali azioni esercitate dalle ghiande B, C nell'atto di precorrere gli spazj *Bb*, *Cc*. La ragione si è, perchè essendo le forze morte tangenziali *Bd*, *Ce* in ragione siccome le masse M, *m*, o sia come BD: CE, in qualunque sito della verga AB si collocassero i pesi B, C, le intiere forze agenti, e conseguentemente gli effetti generati sarebbono proporzionali alle masse; lo che è un assurdo, che ci condurrebbe a stravagantissime conclusioni.

Nè giova ricorrere al tempo, di cui sogliono in simili incontri valersi i Cartesiani; attesochè nel nostro pendolo composto descrivendosi in pari tempo gli archi *Bb*, *Cc*, la durata dell'azione ajuta egualmente le due forze morte $Bd = Me$, e $Ce = m$.

Bisogna per tanto farsi ad esaminare da quali elementi le predette masse, ovvero le sollicitazioni per le toccanti restino avvalorate. Per venirne a capo io la discorro così. Se i due gravi B, C cadessero liberamente, senz'essere impediti, e deviati dalla verga girante intorno il centro A, discenderebbono dai punti I, G della orizzontale AH per le li-

(*) *Avendo il C. J. distesa questa soluzione l'anno* 1735, *la spedì al Padre D. Ramiro Rampinelli Monaco Olivetano, conforme s'impara da una lettera* 20. *Settembre* 1735. *dallo stesso dottissimo Padre diretta al Co. Giordano Figlio dell'Autore.*

linee del piombo, ed in tempi eguali precorrerebbono eguali ſpazj. Di più ſe i predetti mobili B, C oſcillaſſero in figura di pendoli ſemplici, impiegherebbono tempi minimi diſuguali, in paſſando per gli archi ſimili Bb, Cc, e la ghianda C v'impiegherebbe tempo minore della ghianda B. Nel dato tempo $= dt$ deſcriva il pendolo AC l'arco Ca, ed il pendolo AB l'arco Bg: e perchè quando i corpi C, B eſſendo congiunti coſtituiſcono un pendolo compoſto, le maſſe C, B nel tempo medeſimo paſſano per gli archi ſimili Cc, Bb, ne ſegue, che meſſa a confronto la prima colla ſeconda ipoteſi, il mobile C reſta indietro per l'archetto ca, ed all'oppoſito il mobile B avanza ſtrada per l'archetto gb.

Quindi la forza per la toccante cioè Ce non può eſtenderſi ad accompagnare il mobile, ſalvo che per tutto l'arco Cc, nè più oltre ſi diffonde, e per la ſteſſa ragione la forza morta Bd ſollecita coſtantemente la maſſa B per tutto l'arco Bb. Dunque le forze tangenziali Bd, Ce provenienti dalla gravità tante volte ripetono l'impreſſioni ne' predetti corpi B, C, quanti ſono gli elementi eguali contenuti negli archi ineguali Bb, Cc, ed il numero degli impulſi riſponde alle lunghezze degli ſpazj eraſcorſi.

In ordine a ciò le maſſe M, m, le quali eſſendo alle forze tangenziali proporzionate ſi poſſono in luogo loro ſoſtituire, anno a moltiplicarſi per le fluſſioni DS, DS degli archi corriſpondenti, onde ſi determini la preciſa miſura d'amendue l'azioni equivalenti una ad MDS, l'altra ad mds. Ma (chiamate U, u le velocità acquiſtate dalle maſſe M, m in B, C, e DU, du i loro elementi) la ſomma dell'azioni dev'eſſere proporzionale alla ſomma de' prodotti delle maſſe ne' momenti delle reſpettive velocità, cioè, MUDU, $mudu$; dunque perverremo all'equazione

(1ª.) $MDS + mds = MUDU + mudu$: ma $DS = UDT$, e $ds = udt$; dunque ſoſtituendo, (2ª.) $MUDT + mudt = MUDU + mudu$.

E perchè come i due raggi $AB = R : AC = r :: U : u :: DU : du$, troveremo $\frac{VU}{R} = u$, ed $\frac{VDU}{R} = du$, i quali valori ſurrogati nella ſuperiore eſpreſſione ci danno la (3ª) $MUDT + \frac{mvUdt}{R} = UDU + \frac{Mv^2UDU}{R^2}$.

Abbiaſi ora $AF = x$ lunghezza del pendolo ſemplice iſocrono al noſtro compoſto, in cui la forza tangenziale accelerante s'eſponga per la maſſa T, e tanto l'una, quanto l'altra per l'unità. Segniſi colla ſpezie W la velocità acquiſtata dalla ghianda F nel percorrere l'arco HF; e per la Teorica de pendoli ſemplici, il tempo dt conſumato nel paſſare per l'arco inaſſegnabile Ff ſarà come l'incremento dW della velocità, cioè $dt = dW$: ma per la ſeguente analogia $AB = R : AF = x :: DV : dW$ ſi ha $\frac{xDV}{R} = dW = dt$, e ſoſtituendo in cambio di dt il ſuo valore $\frac{xdV}{R}$,

l'eſpreſſione (3ª.) ſi trasformerà nella

(4ª.) $\frac{MXVDV}{R} + \frac{mrxVDV}{R^2} = MVDV + \frac{mr^2VDV}{R^2}$,

la quale eſpurgata ci ſomminiſtra $MRX + mrx = MR^2 + mr^2$, e finalmente la (5ª) $x = \frac{MR^2 + mr^2}{MR + mr}$, lo che &c.

SCOLIO I.

Preſa di bel nuovo per mano la ſeconda delle noſtre formole, vale a dire $MVDT + mudt = MVDV + mudu$; egli è manifeſto, che eſſendo le velocità V, *u* proporzionali alle diſtanze R, *r*, poſſo collocare in vece delle due prime le due ultime quantità, onde ſia

$MRDT + mrdt = MRDV + mrdu$.

Quindi ſi viene in cognizione per qual motivo il Sig. Ermanno ſia ſtato aſtretto ad avvalorare per una parte colle diſtanze R, *r* le maſſe M, *m* già moltiplicate nel tempo comune *dt*; e per l'altra abbia dovuto altresì avvalorare le quantità infiniteſime del moto acquiſtato MDV, *mdu*, per le diſtanze analoghe, R, *r*.

S'io debbo però dire ſinceramente il mio parere, giudico, che ſiaſi proceduto alla ſoluzione quantunque vera per un genere improprio, e che ſi ſieno aſſunti principj tali, che abbiano biſogno d'eſſere appoggiati ad altri più chiari, e più ſemplici.

La perpleſſità naſce, ſecondo me, da ciò, che il citato Autore ha fatto entrare nella ſua analiſi le differenze della quantità del moto MDV, *mdu*, le quali nella noſtra ricerca naturalmente non anno luogo, in iſcambio delle altre due MVDV, *mudu*, che ſono le fluſſioni delle forze vive miſurate alla maniera del Leibnizio. Ed in fatti chi non vede, che per iſcanſare il paralogiſmo è ſtato in neceſſità di moltiplicar le prime per le diſtanze R, *r*, riducendole a MRDV, *mrdu*, ſenza che ſe ne capiſca a prima viſta lo perchè: laddove ſenz'altri raggiri potea valerſi più naturalmente delle ſeconde.

In oltre i prodotti MDT, *mdt*, ſi applicano altresì per R, *r*, e ſi fanno diventare MRDT, *mrdt*, applicando al caſo la forza, o il momento delle maſſe M, *m*, avvalorate dal vette: ma MRDT eguale a MDS, e *mrdt*, a *mds*, e gli ſpazj DS, *ds* moltiplicati nelle forze tangenziali M, *m* ci danno la vera miſura delle azioni generate dal diffonderſi, che fanno le impreſſioni acceleranti Bd, Ce reſpettivamente per gli archi ſimili Bb, Cc; dunque ſenza tante tergiverſazioni aveva a farſi uſo della noſtra formula ſegnata (1ª.), e poi paſſar oltre, e dar compimento alla ſoluzione.

SCOLIO II.

La noſtra quinta equazione $x = \frac{MR^2 + mr^2}{MR + mr}$ ſi guida ad una conclusione, della quale, ſiccome d'un principio, s'è già ſervito il Signor Giovanni Bernoulli, ed è, che ſuppoſti due pendoli ſemplici AB, AC diſceſi per gli archi ſimili IB, GC, la ſomma delle forze vive da eſſi acquiſtate ne' punti B, C ſi trova eguale all'aggregato delle forze vive guadagnate dalle predette ghiande, mentre diſcendono in figura di pendolo compoſto per gli archi medeſimi IB, GC.

Non ſuccede però così, quando ſi confrontano inſieme le quantità del moto. E per dilucidare la materia, i due pendoli ſemplici AI, AG ſeparatamente diſcendano per gli archi ſimili IB, GC; è coſa chiara, che dalle replicate impreſſioni della gravità agente contro le maſſe B, C per gli ſpazj IB, GC un certo, e determinato effetto verrà prodotto. Ma ſtante che la gravità non ha il diſcernimento di diſtinguere, ſe i gravi B, C formino un pendolo compoſto, o due ſemplici; nell'uno, e nell'altro caſo avremo due effetti parì, ſiccome generati da pari cauſe agenti neceſſariamente.

Ciò poſto, gli effetti prodotti, o ſaranno le quantità del moto comunicate nella doppia ipoteſi aſſunta alle due ghiande B, C, ovvero le forze vive miſurate alla Leibniziana. Già ſappiamo, che l'uguaglianza ſta ſalda nella ſeconda ſuppoſizione: veggiamo coſa nella prima ſucceda.

Nel pendolo ſemplice AB la velocità acquiſtata in B può eſprimerſi per $\sqrt{AB}$; dunque la quantità del moto ad eſſo partecipata ſarà $= B.\sqrt{AB}$; e per la ſteſſa ragione la quantità del moto guadagnata dal pendolo ſemplice AC in C ſi eſporrà per $C.\sqrt{AC}$; laonde ſi avrà la ſomma delle predette due quantità di moto $= B.\sqrt{AB} + C.\sqrt{AC}$. Nel pendolo poi compoſto chiamata U la velocità della palla B in B, ſarà $= \frac{V.AC}{AB}$ quella della ſfera C in C, e conſeguentemente le due quantità del moto ſaranno BV, e $\frac{CV.AC}{AB}$, e il loro aggregato

$$BV + \frac{CV.AC}{AB}.$$

Se dunque gli effetti naſcenti dalla gravità nella noſtra doppia ipoteſi ſi miſurano dalle due ſomme della quantità del moto come ſopra generate, ambe eſſe ſomme deono eſſere fra loro eguali, cioè

$B \cdot \sqrt{AB} + C \cdot \sqrt{AC} = BV + \frac{CV \cdot AC}{AB}$, e ridotta l'equazione,

$$\frac{B \cdot AB \cdot \sqrt{AB} + C \cdot AB \cdot \sqrt{AC}}{B \cdot AB + C \cdot AC} =$$

Per rinvenire poscia in tale falsa suppoſizione il pendolo ſemplice AF iſocrono al compoſto ACB, pongaſi la lunghezza della verga $AF = x$, la velocità della ghianda F nel punto $F = \sqrt{x}$, e giacchè per avere l'iſocroniſmo, le velocità nei ſiti analoghi debbono eſſere proporzionali ai raggi, vale a dire $\sqrt{x} : V :: x : AB$; dunque $\frac{AB}{\sqrt{x}} = V$.

Scoperti in tal guiſa i due differenti valori di V, naſcerà l'equazione

$$\frac{B \cdot AB \cdot \sqrt{AB} + C \cdot AB \cdot \sqrt{AC}}{B \cdot AB + C \cdot AC} = \frac{AB}{\sqrt{x}}, \text{ ovvero}$$

$$\frac{B \cdot AB + C \cdot AC}{B \cdot \sqrt{AB} + C \cdot \sqrt{-AC}} = \sqrt{x}$$

Queſta formola ci porta ad un manifeſto aſſurdo, e per dimoſtrarlo, prendo a conſiderare un pendolo compoſto, in cui il punto di ſoſpenſione ſia di mezzo fra i due peſi C, B. Se in tal ſuppoſto prendeſi per negativa la diſtanza AC, la noſtra eſpreſſione paſſa nella ſeguente

$$\frac{B \cdot AB + C \cdot - AC}{B \cdot \sqrt{AB} + C \cdot \sqrt{-AC}} = \sqrt{x}$$

in cui nel denominatore della frazione ci ſi preſenta la quantità immaginaria $\sqrt{-AC}$, e perciò la grandezza x, o ſia la lunghezza del pendolo ſemplice iſocrono è impoſſibile a determinarſi, nè ſi trova ſcritta ſul libro della Natura.

Chi per iſcanſare l'inconveniente voleſſe porre negativa la maſſa C in cambio della diſtanza AC, ne incontrerebbe un altro, il quale ſi deduce dalla formola

$$\frac{B \cdot AB - C \cdot + AC}{B \cdot \sqrt{AB} - C \cdot \sqrt{+AC}} = \sqrt{x}.$$

Facciaſi $B \cdot AB - C \cdot + AC = 0$, onde le maſſe B, C ſieno in ragione inverſa delle diſtanze AB, AC, nel qual caſo i peſi ſtarebbono in equilibrio, ed il pendolo iſocrono AF ſarebbe infinitamente piccolo, cioè a dire

dire il centro di gravità della ſua ghianda s' unirebbe con quello di ſoſpenſione. Quanto dunque foſſe minore la differenza fra i due prodotti B. AB, C. AC, tanto più celeri ſi troverebbero le oſcillazioni del pendolo compoſto, il che è falſiſſimo. E da ciò ſi ſcuopre, che poſta l'uguaglianza fra i ſuddetti prodotti, la lunghezza del pendolo iſocrono ſemplice AF è infinita, come ſi ricava dalla noſtra formola.

$$x = \frac{MR^2 + mr^2}{MR - mr} = \frac{MR^2 + mr^2}{0}.$$

S C O L I O III.

Non ſi vuole laſciar d'avvertire, che la Natura in regolando i moti dei pendoli compoſti, e ſemplici nelle circoſtanze di ſopra notate mantiene ferma l'uguaglianza fra le forze vive Leibniziane, e non già fra le quantità del moto. Quantunque queſte due leggi ſpeſſo s'uniſcano, ſono però differenti, nè ſono talmente conneſſe, che una non poſſa ſtar ſenza l'altra. Molte fiate dalla Natura vengono nelle ſue operazioni inſieme congiunte; ma qualora ripugna, che amendue nel tempo medeſimo ſi verifichino, ha ſempre luogo la prima, e reſta eſcluſa la ſeconda; ſiccome nel caſo noſtro interviene. E da ciò ſi raccoglie, qual ſia la legge fondamentale, e principale della Natura, e quale l'acceſſoria, e ſecondaria. Potrei addurne parecchi eſempj, che ci fanno toccar con mano, quanto ſia ragionevole la ſentenza di Leibnizio, che colle ſue forze vive, e non colle quantità del moto miſura le azioni, e le reazioni.

SCHEDIASMA XXI.

Delle comunicazioni del moto, che ſi fanno per via di attrazione.

QUe' Valentuomini, che difendono la più vecchia, e la più comune opinione intorno la miſura delle forze vive, in veggendo, che ſe nell'urto dei corpi molli concedono eglino impiegarſi nelle ammaccature una qualche benchè picciola parte della forza primitiva; la coſa è fatta, ed il tutto in vigore delle mie deduzioni coſpira (*a*) a favore della ſentenza Leibniziana; volteranno i loro ſforzi a mettere in dubbio il principio, che ſerve di baſe alle mie dimoſtrazioni. Debbo però eccettuare l'in-

Fu ſcritto dal C. Jacopo nel 1733., *come ſi ricava da lettera del Padre D. Ramiro Rampinelli al Co. Giordano Riccati de'* 21. *Luglio* 1733. *Uſcì alle ſtampe tradotto in latino dal Padre Vincenzo Riccati l'anno* 1747. *nella terza parte del Tomo ſecondo dei Comentarj dell' Accademia di Bologna.*

(*a*) *Veggaſi il Cap.* XIX. *del lib.* 11. *de' Principj, e de' metodi della Fiſica.*

l'incomparabile Sig. Cav. Newton, il quale ha conoſciuta almen di paſſaggio queſta verità, e ce ne ha laſciata ne' ſuoi libri una pubblica teſtimonianza, che non può più cancellarſi: e quantunque non gli ſia venuto in mente di penſare alle illazioni, che cavar ſe ne poſſono; perchè gli uomini anche di viſta acutiſſima ſopra ogni obbietto non gittano i loro ſguardi, ciò non oſtante mi perſuado, che avendo egli ammeſſa una volta la maſſima, non iſdegnerebbe, ſe foſſe in vita, atteſa la ſua ingenuità, d'ammettere per belle, e per buone le conſeguenze.

In tanto almeno in grazia de' ſuoi diſcepoli, m' ingegnerò di dimoſtrare la mia propoſizione fondamentale con un altro giro di coſe: e perchè nel tempo medeſimo mi ſi apre la ſtrada di conſiderare una diverſa maniera di comunicare il moto, e di farlo paſſare da un corpo all'altro per via non già di ſpinta, ma di attrazione; farò vedere con che leggi ſi regoli queſto tranſito, e come la Natura ſia in tutte le ſue operazioni uniforme; mettendo in chiaro colla medeſima occaſione, che frà le infinite ipoteſi, che noi poſſiamo imaginarci intorno la giuſta miſura delle forze vive, trattane quella del Leibnizio, tutte le altre ci conducono ad aſſurdi, e contraddizioni.

Prima d'ogn' altra coſa io dimando, ſe ſuppoſta una corda elaſtica, o una molla nel ſuo naturale ſtato, per iſtenderla, ed allungarla abbiaſi ad impiegar forza. Di queſta mia interrogazione alcuni ſaranno le maraviglie, e ciò interverrà, perchè non diſtingueranno a prima viſta a quale ſcopo eſſa ſia indiritta. Se riſpondono affermativamente, ho io nelle mani quanto mi baſta, per condurre a fine la mia dimoſtrazione: ma in caſo di negativa, ch'io non lo credo, bramerei, che faceſſero meco le ſeguenti rifleſſioni.

Penda dal chiodo immobile A (Fig. 68,) l'elaſtro AB, alla di cui eſtremità B s'attacchi il peſo C, diſcenderà queſto con moto accelerato per eſempio ſino al punto C, indi per vigore dell'impeto impreſſo, ſeguiterà eſſo a diſcendere, ma con moto ritardato, diſtendendo la molla fino ad un certo termine, come ſarebbe il punto D, in cui ſi ridurrà alla quiete. Prevalendo allora la forza elaſtica, la diſceſa ſi volterà in aſcendimento, ed il grave C monterà da D ſino in C con moto accelerato, e poi con ritardato ſino in B. Così reciprocando a guiſa d'un pendolo, continuerà a calare abbaſſo, e riſalire in alto infinite volte, ſe la verga AB ſarà fornita d'una perfetta virtù elaſtica, e ſe il giuoco ſi ſarà nello ſpazio vano. Ma non verificandoſi queſte due circoſtanze, come in fatto non ſi verificano, dopo varie oſcillazioni ſi fermerà il peſo immobile nel ſito C, e l' elaſtro patirà la diſtenſione BC.

Ora ſe la reſiſtenza dell'elaſtro non faceſſe oſtacolo all' azione della gravità, dovrebbe il peſo diſcendere con quella ſteſſa legge di accelerazione, come piomberebbe nell' aere, mentre ſtaccato dalla verga veniſſe meſſo in libertà; perchè dunque percorrendo lo ſpazio BC non ſi affretta quanto dovrebbe; perchè va tardando il ſuo moto per l' intervallo CD; perchè giunto in D ſi trova in iſtato di ripoſo; e perchè finalmente mutata direzione, in vece di ſeguitar il ſuo cammino verſo

il

il centro, è obbligato a ritornar in dietro per la linea DB? Non è egli evidente, che tuttociò procede in parte dalla reazione, ed in parte dall' azione dell'elaſtro?

Per vederne il modo, ſi rifletta, che la molla AB ridotta alla ſua natural dimenſione ha una minima ripugnanza per ſoffrire uno ſtiramento infinitesimo: ma quanto più ſi và ſtendendo, altrettanto reſiſte ad una ultetior diſtenſione, ſinattantochè non potendoſi la verga prolungar all'infinito, giunta che ſia ad un certo termine di lunghezza, finalmente ſi ſpezza. La curva dunque, che colle ſue ordinate eſprime le tenacità creſcenti dell'elaſtro, avrà l'origine nel punto B, e ſi anderà ſempre più diſcoſtando dall' aſſe BE, come ſarà per cagion d'eſempio la curva BHK, di cui non importa per ora d'inveſtigar la natura, baſtando che la minima reſiſtenza riſponda al punto B, e la maſſima al punto E, poſto, che ſi ſpezzi la verga, quando alla lunghezza AE ſia pervenuta.

In queſto mentre la coſtante BG ci rappreſenti il peſo del Globo C, e tirata la verticale GI, tagli queſta nel punto F la ſcala delle reſiſtenze; egli è manifeſto, che nel punto B il grave eſercita tutta la ſua azione, perchè in quel ſito la reſiſtenza della molla è minima, ma arrivato, che ſia al punto M, la gravità non mette più in opera la ſua intiera, ed innata forza LM, dovendoſi da queſta ſottrarre il contraſforzo dell'Elaſtro eſpoſto dall'applicata NM; laonde l'impulſo, che ſollecita il grave all'ingiù, ci viene rappreſentato dall'intercetta LN, e l'aggregato di tutte le ſucceſſive impreſſioni non ſi miſura già dal rettangolo GFCB, come interverrebbe, ſe la palla C diſcendeſſe liberamente, ma bensì dal trilineo GFNB. Quindi fatta l'area FHI inferiore al punto F uguale alla ſuperiore GFNB. e condotta l'ordinata HD, ſegnerà eſſa il punto D, in cui il peſo C, dopo eſſere diſceſo per la verticale BD, ſi ridurrà alla quiete.

Deſcrivaſi ora la parabola Apolloniana B*cd*, colle ordinate della quale ſi eſpongano le velocità C*c*, D*d*, che avrebbe acquiſtate il grave non impedito nello ſcorrere reſpettivamente gli ſpazj BC, BD: e giacchè lo ſteſſo grave pendente dall'elaſtro, giunto che ſia al punto C in vece di camminare colla velocità intiera C*c*, cammina con una aſſai minore CO: ne ciò certamente naſce dall'azione della gravità, la quale in ogni punto della diſceſa non ceſſa di ſollecitarlo con tutta la ſua energia; dunque dobbiam dire, che una porzione della forza totale della gravità, la quale alla celerità CO avrebbe aggiunta la OC, ſiaſi impiegata contro l'elaſtro, vincendo la ſua tenacità, e ſtirandolo da B ſino in C. Similmente pervenuto il peſo al punto D, ſi trova egli coſtituito in quiete, in tempo che liberamente piombando avrebbe guadagnata la velocità D*d*; dunque tutta quella forza, ch'è neceſſaria per imprimere al mobile la ſuddetta velocità, qualunque ella ſiaſi, ſi è ſpeſa nello ſtendere la molla per tutto il tratto BD.

Oſſerviſi in oltre, che l'Elaſtro nell'atto di rimetterſi ſtraſcina all' insù il peſo C, e lo ſforza a rimontare dal luogo D fino in B: ma

per

per ſarlo aſcendere contro l'inclinazione della ſua gtavità innata; appunto tanta forza ci vuole, quanta ne avrebbe acquiſtata in diſcendendo liberamente da B ſino in D; dunque tutte le ſucceſſive impreſſioni comunicate dalla gravità coſtante al mobile C nella diſceſa, in vigore della reazione ſi ſono trasfuſe nell'elaſtro, il quale ricuperando la ſua natural dimenſione, tira in alto il peſo con un aggregato pari di forze, non oſtante i replicati impulſi, con cui tenta la gravità di ſpingerlo abbaſſo.

Queſte poche coſe, che dette ſi ſono fra le molte, che dir ſi potrebbono, baſteranno per farci intendere, che non può un elaſtro qualunque, le cui fibre ſieno per ſe medeſime in ripoſo, ſtenderſi, nè rannicchiarſi, ſenza che vi ſi adoperi una forza eſtrinſeca. Ciò premeſſo mi metto ſotto gli occhi la ſeguente

IPOTESI.

Alla palla A (Fig. 69.) ſia attaccato l'elaſtro rigido C, ed ambo camminino per uno ſpazio infinitamente raro colla velocità comune V. Nel tempo, che ſono in moto, e ſcorrono una linea retta orizzontale per non fermarſi mai, all'altra eſtremità della molla s'intenda congiunta la ſfera B priva affatto di moto, e per maggiore facilità ſi ſupponga, che tanto i due globi, quanto l'elaſtro ſieno ſenza gravità, e che la maſſa di queſto abbia alle maſſe dell'una, e dell'altra palla una minima inaſſegnabile proporzione; non eſſendovi ripugnanza, che una molla di una maſſa quanto ſi voglia picciola ſia dotata d'una finita tenacità: ſi dimanda con che leggi ſi regolerà nella noſtra ipoteſi la comunicazione del moto.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

Dico prima d'ogni altra coſa, che nell'atto, in cui ſi partecipa il moto alla palla B, l'elaſtro C ſi allungherà; concioſſiachè ſe la molla non patiſce alterazione di ſorta alcuna, ne ſeguirebbe, che la maſſa B nel primo iſtante della ſua unione all'elaſtro dovrebbe di ſalto acquiſtare tutta la velocità della ſfera A. E ſe ciò interveniſſe, avrebbeſi un effetto, che ſupererebbe di lunga mano l'energia della propria cagione; atteſochè la forza prodotta alla primitiva, ſtante le velocità pari, ſarebbe in proporzione, come le maſſe A + B: A. Mentre poi ſi voleſſe, che la palla B riceveſſe a gradi il moto, che ad eſſa per mezzo della molla ſi partecipa, allora ſi avrebbe l'azione, ſenza la corriſpondente reazione: ma tutte queſte conſeguenze ſono ripugnanti a verità incontraſtabili; dunque nella noſtra coſtituzione di coſe l'elaſtro neceſſariamente ſi ſtenderà; lo che ec.

CO-

COROLLARIO.

E perchè non si può tener ferma l'analogia, che passa tra la cagione, e l'effetto, se acquistando il corpo B una qualche velocità, il corpo A non ne perde una parte di quella, che in esso risiede; siccome il primo la va acquistando a gradi, il secondo altresì a gradi la và perdendo: ma la comunicazione del moto non si fa se non per via dell'elastro C; dunque anche questo si anderà estendendo appoco appoco, nè cesserà d'allungarsi, sinattantochè ambi i corpi A, B, e la molla stessa non camminino con pari velocità.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

Per istendere l'elastro oltre i limiti della sua natural dimensione, deesi nel caso nostro consumare una porzione della forza primitiva.

Supponiamo, che il corpo A, il quale certemente ne spende una parte a tirarsi dietro il corpo B, sia pervenuto a quel segno, in cui amendue essi corpi procedono con eguale celerità. E perchè il moto comune punto nè poco influisce nell'azione particolare sarà lo stesso, che la molla sia di mezzo a due palle, ch'assieme con essa si muovono di pari passo colla velocità comune per esempio V, come se stesse di mezzo alle predette due sfere costituite in riposo. Ciò dipende dalla dottrina dei moti traslati, e di fatto se si collocheranno i due globi in una navicella, che proceda in senso contrario coll'assegnata celerità V, coloro, che stanno fermi sul lido, vedranno la molla nell'atto del restringersi agire contro le due masse poste in quiete, l'una, e l'altra delle quali si verranno incontro con direzione opposta. L'elastro dunque, nel ridursi alla sua prima positura, vince l'inerzia di due corpi, che si ponno considerare in quiete, ed imprime loro velocità tali, che sono dell'ordine delle finite: ma ciò non può farsi senza forza, e questa forza la molla non può riceverla altronde, salvo che dalla sfera A; dunque una parte della forza primitiva è passata nell'elastro, il quale viene determinato ad operare nel rannicchiarsi a misura della forza, che nello stenderlo è stata impiegata.

COROLLARIO.

Se ambe le palle assieme colla molla si muovono, la forza primitiva si divide in tre parti, una se ne conserva nella sfera A, l'altra si comunica alla B, e la terza si partecipa all'elastro. Quando poi tutti e tre essi corpi procedono con celerità eguale, in tal caso essendo la molla

mente elaſtici: ma di ciò non occorre favellare, eſſendoſene in altra occaſione detto abbaſtanza. (a)

Le verità per noi ſemplicemente enunziate anno a ſtabilirſi colle dimoſtrazioni, onde ſi tolga di mezzo ogni dubbioſità, e ſi dia luogo ad alcune importanti rifleſſioni.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

La palla A giuſta la noſtra ipoteſi debba tirarſi dietro il corpo B, e fingaſi, che la comunicazione del moto ſi faccia in un vaſcello, il quale cammini colla velocità ſteſſa U impreſſa da principio nella sfera A, ma con direzione contraria. Coloro che ſono portati dalla nave, veggono ritardarſi appoco appoco il moto del globo A, ed accelerarſi quello del globo B, ſinattantochè in entrambi ſi ravviſi una velocità pari, ch'io chiamerò u. Tutto all'oppoſto gli ſpettatori fermi ſul lido oſſervano ſul principio la sfera A in quiete, a cui viene participato il moto dalla sfera B procedente colla velocità $-V$ del vaſcello, e ciò fino a tanto che amendue camminino con velocità eguale, che ſi eſponga per la ſpezie v. Ma i primi, terminata l'azione, anno ſotto gli occhi la velocità u propria delle due palle, ed i ſecondi la relativa $V-u$, cioè a dire la differenza, che paſſa tra la predetta celerità, e quella della nave; dunque $V-u=v$, o ſia $V=u+v$.

E da ciò s'inferiſce (concioſſiachè poſſo io ſervirmi dell'antecedente diſcorſo, quando ſtando ferma la palla A viene eſſa ſtraſcicata dalla palla B, che ſi ſuppone camminare da principio colla ſolita velocità V) s'inferiſce dico, che conſiderata l'azione nella sfera A, la quale ſi tiri dietro la sfera B, o tutto al roveſcio, facendo, che il corpo B imprima il moto nel corpo A, ogni qual volta nell'uno, e nell'altro caſo ambo eſſe maſſe procederanno con celerità pari, per cagion d'eſempio nel primo caſo colla velocità u, e nel ſecondo colla velocità v, l'aggregato di queſte due celerità ſarà ſempre uguale alla primitiva, e coſtante U, cioè $u+v=V$, lo che io m'era propoſto di dimoſtrare.

COROLLARIO I.

Le prenotate velocità u, v anno fra loro un qualche rapporto dipendente dall'analogia, che corre fra le maſſe A, B. Di fatto, ſe ſtando fermo il corpo A, e la celerità V, il corpo B ſi va ſcemando fino a diventare infiniteſimo, la velocità u vaſſi accoſtando alla primitiva,

(a) *Accennaſi dall'Autore il ſeguente Schediaſma XXII., in cui tratta dei limiti, da' quali reſtano determinate le leggi della comunicazione del moto in qualunque ipoteſi.*

a cui ſi ſa finalmente uguale, nel qual incontro l'altra velocità v diventa nulla. Ognuno vede, che mentre la ſfera A ha da tirarſi dietro una maſſa minima, non perde, ſalvo che una parte inaſſegnabile del ſuo moto: ſiccome parimente ſe la palla B dee ſtraſcinare un corpo infinitamente maggiore di ſe, non può ad eſſo comunicare, fuorchè una celerità infinitamente pigra. Così ſe il globo B va all'infinito creſcendo, ſi minora ſempre più la velocità u, aumentandoſi l'altra v, ſino a divenire uguale all'aſſunta V. Che ſe poi i corpi A, B foſſero di pari maſſa, ſarebbe $u = v$, ed amendue preciſamente uguali alla metà della velocità primitiva.

COROLLARIO II.

Riſponde altresì ad una qualche relazione fra le maſſe A, B la forza, che ſi ſpende nel dilatare la molla C, particolarmente quando ambo le maſſe giungono ad acquiſtare una velocità pari. Poſto che il corpo A ſia finito, ed il corpo B infiniteſimo, egli è evidente, che l'elaſtro patiſce uno ſtiramento inaſſegnabile, e che conſeguentemente vi ſi applica una forza minima: al contrario ſe B foſſe infinito, tutto lo ſforzo del globo A ſi conſuma in diſtendere la molla, e perciò nei caſi di mezzo, quando cioè le due ſfere ſi riguardano con una finita proporzione, l'energia della palla A divideſi in due, e parte s'adopra nella comunicazione del moto, e parte nello ſtirare l'elaſtro: con queſta avvertenza però, che quanto è maggiore la grandezza del corpo B riſpetto a quella del corpo A, altrettanto una maggior porzione di forza contro l'elaſtro ſi ſpende, la quale vaſſi ſempre diminuendo, quanto più, ſtando coſtante la maſſa A, viene ad impicciolirſi la maſſa B.

SCOLIO.

Fa a mio propoſito, che ſi mettano a confronto le due maniere, per cui ſi comunica il moto, cioè quella per via d'attrazione con l'altra, nella quale vi ſi impiega l'impulſo, e la percoſſa. Abbianſi (Fig: 70.) due altre palle $a = A$, e $b = B$, e facciaſi, che la ſfera a moſſa colla velocità V, urti nella b quieſcente, e dopo la colliſione, eſſendo ambedue perfettamente molli, ed inerti, camminino unite colla celerità comune x: indi la palla b, in cui riſegga la medeſima velocità V, ſi volti a percuotere la ſfera quieta a, e dopo il colpo procedano ambe di conſerva colla velocità y.

Dico, che la ſomma delle due predette velocità $x + y$ è uguale alla velocità primitiva V. Per i canoni della comunicazione del moto fra i corpi molli comunemente ricevuti, e da me dimoſtrati (*a*) ſi trova $x = \frac{aV}{a+b}$, ed $y = \frac{bV}{a+b}$; dunque $x + y = \frac{\overline{a+b}.\ V}{a+b} = V$. Da ciò ſe

ne

(*a*) *Lib.* 11. *Cap. XVIII. de' Principj, e de' metodi della Fiſica.*

ne ricava, che essendosi per noi provato essere $u + v = V$, avremo ancora $x + y = u + v$.

Dico di più, che ammessa per vera la sentenza dei Cartesiani, che le forze vive si misurino dalla quantità del moto, e che conservandosi nella collisione de' corpi inerti la stessa quantità di moto tanto prima, quanto dopo la percossa, onde niuna parte della forza viva passi in morta, e nella contusione si spenda; non può mai verificarsi la suddetta equazione $x + y = u + v$.

La ragione si è, perchè se dopo d'avere la palla A (Fig. 69. e 70.) comunicato per quanto può il moto alla palla B, si conservasse in esse palle tutta la forza primitiva senz'alcuna diminuzione, una parte non se ne potrebbe impiegare nel distendere l'elastro; altrimenti l'energia dell'effetto supererebbe di gran lunga quella della propria cagione: ma già si è detto, che una porzione di forza viene assorbita dalla reazione della molla; dunque la restante espressa secondo i Cartesiani per $\overline{A + B}$. u è minore della primitiva AV, a cui essendo uguale la forza $\overline{a + b}$. x, che richiede nei due corpi a, b, dopo la percossa; ne siegue, che essendosi poste uguali le masse A; a; B; b, la velocità x sarà maggiore di u.

Col medesimo progresso si proverà, che la celerità y è più grande di V; dunque il binomio $x + y$ eccederà l'altro $u + v$, il che è un manifesto assurdo, e contrario alla conclusione per noi di sopra dimostrativamente dedotta.

Nè si può credere, che una più grande porzione della forza primitiva si spenda nella contusione, messa al paragone di quella, che s'impiega a distendere la molla; conciossiachè si manterrebbe minor quantità di forza viva nelle due palle a, b dopo l'urto, ed all'incontro una maggiore quantità nelle altre due A, B, stirato che fosse l'elastro a norma della nostra supposizione. In ordine a ciò la velocità u supererebbe la velocità x, come altresì sarebbe v maggiore di y, e conseguentemente il binomio $x + y$ minore dell'altro $u + v$, il che ripugna alla nostra dimostrazione.

Bisogna per tanto dire, che una medesima porzione di forza viva si spenda ugualmente nello stirare l'elastro, e nel formare la contusione, e che in qualunque maniera passi l'azione da un corpo all'altro o per via di spinta, o per via d'attrazione, non alterandosi in conto alcuno la quantità primitiva del moto, da essa non abbia a prendersi la giusta misura della forza viva, da cui non solamente il moto superstite riconosce l'origine, ma di più ciò, che nelle ammaccature, o nelle distensioni degli elastri si consuma.

Le cose dette senz'altra perquisizione ci fanno comprendere con qual legge si regoli la prima comunicazione di moto, che si fà per via d'attrazione, stante che essendo per una parte $x = u$, ed $y = v$, e per l'altra

tra $x = \frac{aV}{a+b}$, ed $y = \frac{bV}{a+b}$, avremo le celerità u, v eſpreſſe per le maſſe, e per la velocità primitiva, e potremo tirare tutte quelle illazioni, che per intiero compimento della materia opportune ſi giudicaſſero, quand'anche ambo le maſſe da principio ſi ſupponeſſero moſſe con velocità diverſe, o coſpiranti, o contrarie. In tanto procuriamo di camminare per un altra ſtrada, e ſia

PROPOSIZIONE IV.

PROBLEMA.

Determinare quanta forza ſi conſumi nella diſtenſione dell'elaſtro, e come abbia a miſurarſi la forza primitiva della palla A.

Pongaſi per procedere generalmente la forza viva della palla A (Fig. 69.) avanti qualunque azione in ragion compoſta della maſſa A, e di qualſivoglia dignità U^n della velocità: e perchè già s'è inſinuato, che la forza, la quale ſi conſerva nelle due sfere A, B, compita che ſia la comunicazione del moto, a quella, che ſi traſfonde nell'elaſtro, ſerba una relazione, che dipende in qualche modo dall'analogia fra le maſſe A, B; facciaſi, che la diſtribuzione delle predette forze ſeguiti la proporzione, che paſſa fra le due poteſtà indeterminate $A^r : B^r$.

Inerendo alla noſtra ipoteſi, la forza viva, che reſta nelle due palle dopo l'azione, s'eſprime per le maſſe $A + B$ moltiplicate nella velocità u alzata all'eſponente n, cioè per $\overline{A+B}.u^n$: ma come $A^r : B^r :: \overline{A+B}.u^n : \frac{\overline{A+B}.B^r u^n}{A^r}$; dunque l'ultimo termine dell'analogia ci dinota la forza impiegata a prolungare l'elaſtro, e ſommate queſte due forze, che unite inſieme pareggiano la primitiva, atteſa l'egualità fra gli effetti prodotti, e la cagione producente, ci ſi preſenterà l'equazione $\overline{A+B}.u^n + \frac{\overline{A+B}.B^r u^n}{A^r} = AV^n$, o ſia $\overline{A^r+B^r}.u^n = \frac{A^{r+1}V^n}{A+B}$, ed abbaſſando i membri coll'eſtrazione della radice, il cui indice è n,

$$\frac{A^{\frac{r+1}{n}}V}{\overline{A+B}^{\frac{1}{n}}.\overline{A^r+B^r}^{\frac{1}{n}}} = u.$$

Similmente dopo l'azione della palla B, che moſſa da principio colla celerità V ſi tira dietro la palla A, la forza, che riſiede nelle due sfere,

re, si ritrova $= \overline{A+B}.\ V^n$; ma come $B^t : A^t :: \overline{A+B}.\ V^n : \frac{A+B.\ A^t V^n}{B^t}$,

e questo ultimo termine dinota la forza impiegata contro l' elastro; dunque uguagliando l'aggregato delle predette due forze alla primitiva BV^n, e riducendo il calcolo siccome di sopra s'è fatto avremo

$$\frac{B^{\frac{t+t}{n}}\ V}{\overline{A+B}^{\frac{t}{n}}.\ \overline{A^t+B^t}^{\frac{t}{n}}} = v.$$ Ma per il nostro Teorema $u+v=U$

dunque $\frac{A^{\frac{t+t}{n}}\ V+B^{\frac{t+t}{n}}\ V}{\overline{A+B}^{\frac{t}{n}}.\ \overline{A^t+B^t}^{\frac{t}{n}}} = V$, e finalmente

$$A^{\frac{t+t}{n}}+B^{\frac{t+t}{n}} = \overline{A+B.\ A^t+B^t}^{\frac{t}{n}}.$$

Fa di mestieri dunque, per iscoprire ciò, di che andiamo in traccia determinare talmente i due esponenti n, t, che qualunque siasi la proporzione, con cui si riguardano le masse A, B, che può in infiniti modi ad arbitrio variarsi, si verifichi sempre la nostra ultima equazione. Ciò però non si conseguirà mai, se non si fisserà l'esponente $t=1$, e l'altro esponente $n=2$; dunque la forza primitiva è come la massa A moltiplicata nel quadrato V^2 della velocità, e si distribuisce in maniera, che la forza, la quale dopo la comunicazione del moto si mantiene nelle due sfere A, B, a quella, che si spende nell'agire contro l'elastro nella stessa proporzione delle masse, cioè a dire come A, B: le quali tutte cose doveano determinarsi.

COROLLARIO I.

Sieno le forze vive proporzionali alle quantità del moto siccome vogliono i Cartesiani, onde abbiasi l'esponente $n=1$, e la formula generale si riduca alla particolare $A^{t+1}+A^{t+1} = \overline{A+B}.\ \overline{A^t+B^t}$, ovvero $A^{t+1}+B^{t+1} = A^{t+1}+A^tB+AB^t+B^{t+1}$. Comunque si determini il valore dell'indice t, nascerà sempre l'assurdo, che il tutto sia eguale alla parte, ovvero che una delle due masse A, B abbia a prendersi per negativa, riducendosi la premessa equazione alla seguente $A^{t+1} = -B^{t+1}$: laonde per picciola, che si finga quella porzione di forza, che si spende nello stiramento della molla, sarà sempre un fenomeno, che ci mette sotto gli occhi la ripugnanza della comune opinione.

CO-

COROLLARIO II.

Diversificata la supposizione, ci si affaccieranno gli stessi inconvenienti, o pure bisognerà determinare quel preciso valore della massa B per rapporto alla massa A, che alla nostra equazione soddisfaccia, ed allora potrà la Natura operare in un solo caso, e negli altri innumerabili dovrà pensare a mutar legge, ovvero a permettere una sorta di comunicazione di moto assurda, ed impossibile.

COROLLARIO III.

Non così interviene, mentre sia $t=1$, ed $n=2$; perchè in qualsivoglia determinazione delle masse sta salda l'egualità fra i due membri dell'equazione, essendo $A+B=\overline{A^2+2AB+B^2}^{\frac{1}{2}}$.

COROLLARIO IV.

Se poi si prendessero uguali le masse A, B allora l'equazione si fa più semplice, e si riduce alla seguente $2A^{\frac{t+2}{n}}=4^{\frac{2}{n}}A^{\frac{t+2}{n}}$, o pure $2^n=4$. ed in questo incontro si vede essere l'esponente t necessariamente uguale al binario; dunque se posta $B=A$, la forza della palla A ci viene esposta per il prodotto AV^2, non ammette essa alterazione in qualsivoglia altro caso; perchè la forza viva d'un corpo in moto in nessuna maniera dipende dal corpo B, a cui per mero accidente se ne debbe una qualche parte comunicare.

COROLLARIO V.

Presa di bel nuovo per mano la formula generale $A^{\frac{t+2}{n}}+B^{\frac{t+2}{n}}=\overline{A+B.\ A^t+B^t}^{\frac{2}{n}}$, si ridurrà essa più particolare; in facendo, $n=2$, giusta la determinazione del precedente corollario. Quindi $A^{t+2}+2A^{\frac{t+2}{2}}B^{\frac{t+2}{2}}+B^{t+2}=A^{t+2}+AB^t+BA^t+B^{t+2}$; e conseguentemente $2A^{\frac{t+2}{2}}B^{\frac{t+2}{2}}=AB^t+BA^t$, e dividendo tutti i termini per il prodotto AB; $2A^{\frac{t-2}{2}}B^{\frac{t-2}{2}}=B^{t-2}+A^{t-2}$, o sia

A^{t-2}

$A^{t-1} - 2A^{\frac{t-1}{2}} B^{\frac{t-1}{2}} + B^{t-1} = 0$, ed estratta la radice quadrata;

$A^{\frac{t-1}{2}} - B^{\frac{t-1}{2}} = 0$. Quest' ultime equazioni si riducono al caso particolarissimo di $A = B$, la qual egualità permettendoci di poter assumere come unità ognuna delle due masse A, B, nulla rileva, che alla quantità t si dia qualunque valore. Intanto ci è un' altra strada di salvare l'uguaglianza nelle formule antecedenti, ponendo l'indice t uguale all' unità, senza limitare la proporzione fra le due masse A, B.

SCOLIO.

Per tutto ciò, che fin ora si è spiegato, chiaramente apparisce, che surrogata qualunque altra legge, col mezzo della quale si pensi di misurare la forza viva d'un corpo in moto, trattane la sola Leibniziana, ci si fanno incontro parecchie contraddizioni. In fatti io stabilisco due principj incontrastabili, a' quali il mio discorso s'appoggia, cioè primieramente, che debba ammettersi la Teorica de' moti traslati, ed in secondo luogo, che una qualche porzione della forza primitiva si spenda nello stirare l'elastro: e da queste verità cavate per via di dimostrazione alcune necessarie conclusioni, chiaramente comprendo, che qualsivoglia canone, che mi piaccia d'assumere intorno le forze vive, distrugge o l'una, o l'altra, o amendue insieme le massime mentovate, le quali vanno perfettamente d'accordo colla sola legge scoperta dall' incomparabile Leibnizio. Ogn' altra ipotesi dunque è impossibile, ne può essere messa in opera dalla Natura, senza che ci si facciano innanzi gli inconvenienti, che si dia un effetto fisico, cui non risponda la propria causa, ovvero che il moto comune a molti corpi confonda, e perturbi il particolare.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

Ogni qual volta le due sfere A, B, sono ridotte a camminare con pari celerità, allora l'elastro C soffre il maggiore stiramento, a cui possa essere soggetto nelle circostanze, in cui si ritrova: e perchè abbiamo osservato, che allora sta in mezzo a due corpi, i quali con esso lui procedono con egual moto, cessata totalmente l' azione del globo A, e la reazione del globo B, comincia ad operare la molla, accorciandosi appoco appoco, finattantochè ritorna al suo stato naturale, ed in tal guisa viene ad accelerare il moto della sfera B, e a ritardare quello della sfera A; dico, che in tali circostanze la comunicazione del moto fassi secondo le regole dei corpi perfettamente elastici.

La palla $a = A$ (Fig. 69. e 70.) urti nella palla $b = B$, e ſiano le due maſſe A, b dotate d'una ſquiſita virtù di molla, onde dopo la percoſſa intieramente ſi reſtituiſcano. Già ſi è dimoſtrato, che tanta forza preciſamente s'impiega nell'ammaccatura, quanta nello ſtiramento dell'elaſtro, e che tanto le due ſfere a, b, quanto l' altre due A, B almeno per un momento procedono di conſerva con una velocità data $\frac{AV}{A+B}$;

le ſeconde quando l' elaſtro patiſce la maſſima diſtenſione, e le prime quando l'ammaccatura è intieramente compiuta. Le predette dunque due forze uguali nel rimetterſi agiſcono collo ſteſſo vigore ogn' una di eſſe contro maſſe uguali, moſſe colla medeſima direzione, e con uguale velocità; perciò ſtando tutte le coſe pari, non ci è ragione, per cui non abbiano ad eſſere uguali gli effetti, e conſeguentemente terminata l'operazione delle mentovate due forze, le velocità delle due palle A, a, come altresì delle due B, b ſaranno eguali: ma dopo la percoſſa, e la reſtituzione della contuſione, i globi a, b camminano colle regole della comunicazione del moto, che ſi oſſervano negli urti de corpi perfettamente elaſtici; dunque colla ſteſſa legge procedono anche le maſſe A, B, dappoichè l'elaſtro s'è ridotto alla ſua prima, e natural dimenſione.

COROLLARIO I.

In tale circoſtanza tutta la forza primitiva AV^2 riſiede nelle due ſfere; concioſſiachè niuna forza s'impiega contro la molla, mentre queſta non è ſtirata, nè compreſſa.

COROLLARIO II.

Di fatto la velocità della palla B ſi fa eſſere $= \frac{2AV}{A+B}$, e quella della palla $A = \frac{A-B.}{A+B} V$, ed alzando queſte due quantità ai loro quadrati, i quali ſi moltiplicheranno reſpettivamente per le maſſe B, A, avremo le forze vive delle due palle, cioè quella della ſfera $B = \frac{4BA^2V^2}{\overline{A+B}^2}$, e l'altra della palla $A = \frac{A^3-2A^2B+AB^2}{\overline{A+B}^2} . U^2$. Congiunte in una ſomma le ſuddette due forze, ſaranno preciſamente uguali alla primitiva AV^2.

SCO-

SCOLIO II.

Io non mi prenderò la briga di dedurre tutte quelle conſeguenze, che diſcendono dalle noſtre propoſizioni fondamentali, o conſiderando il paſſaggio del moto da un corpo all'altro, e la diſtribuzione delle forze; ovvero come dalla legge principale naſca la ſecondaria, per cui ſi conſerva ſempre la ſteſſa quantità relativa del moto, ed il centro di gravità delle due palle non cangia nè velocità, nè direzione. Laſcierò pure da parte i caſi più compoſti, cioè a dire ſe ſi ſupponeſſe, che alla ſfera B, nell'atto di congiungerſi con l'elaſtro, foſſe impreſſo un moto a parte a quello della ſfera A o coſpirante, o contrario. Di tutti queſti accidenti ho con altra occaſione favellato abbaſtanza, nè debbo io abbuſarmi della pazienza di chi legge, mettendogli innanzi più fiate la coſa medeſima, quantunque ſotto un aſpetto diverſo.

SCOLIO III.

Avvertirò per ultimo, che la comunicazione del moto regolata ſulle leggi dei corpi elaſtici non dura più d'un iſtante, e la ragione conſiſte in ciò, che o la ſfera B cammina con maggiore velocità della ſfera A, quand'ambo procedono colla medeſima direzione; ovvero, come può frequentemente ſuccedere in caſo, che A ſia minore di B, ſi vengono eſſe incontro con moto contrario. Comunque vada la faccenda, egli è neceſſario, che l'elaſtro patiſca una compreſſione, compiuta la quale, acquiſtando le ſfere una pari celerità, ci metteranno ſotto gli occhi un'altra ſpezie di comunicazione di moto, che ſi fa per via d'impulſo, e ſeguita le leggi dei corpi molli.

Ma trovandoſi la molla rannicchiata da una forza eſterna, dee di bel nuovo dilatarſi, e ricuperare la ſua naturale lunghezza; dunque ritarderà eſſa il moto della palla B, ed accreſcerà quello della palla A: terminata la qual operazione, la prima ſi ridurrà alla quiete, e la ſeconda acquiſterà la velocità primitiva V.

Così torneremo da capo, dappoichè alle due ſfere ſarà ſtato partecipato il moto in tutte le maniere, e circoſtanze poſſibili. La dimoſtrazione degli ultimi due ſenomeni ſi cava per via di corollario dalle premeſſe Propoſizioni.

SCHEDIASMA XXII. (*)

Dei limiti, da' quali reſtano determinate le leggi della comunicazione del moto in qualunque ipoteſi.

PRendo a conſiderare uno dei caſi più ſemplici, quando cioè il corpo R, che cammina con una data velocità = V, incontra per viaggio il corpo S coſtituito in quiete, e ad eſſo comunica il moto in qualunque ſuppoſizione, o ſieno ambo perfettamente molli, o perfettamente elaſtici, o di natura media fra le due eſtreme. Gli altri caſi più compoſti, vale a dire mentre il corpo S ſi muove con una determinata celerità o coſpirante, o contraria a quella del mobile R, ſi riducono facilmente al già propoſto col mezzo della teoria de' moti traslati.

Urtando dunque il corpo R nel corpo S, compito l'effetto della contuſione, prima che l'elaſtro ſi ſpieghi, procederanno eſſi almeno per un iſtante colla velocità comune $\frac{RV}{R+S}$, giuſta i canoni della comunicazione del moto fra i corpi inerti, e la loro forza viva in tale ſtato computata alla Leibniziana, moltiplicando della predetta velocità il ſemiquadrato $\frac{R^2V^2}{2.\overline{R+S}^2}$ per la ſomma delle maſſe R+S, ſarà = $\frac{R^2V^2}{2.\overline{R+S}}$: ma la forza viva del corpo R prima della percoſſa era nella ſteſſa ipoteſi = $\frac{RV^2}{2}$; dunque ſottratta quella da queſta, avremo la forza morta, che ſi ſpende nella contuſione = $\frac{RV^2}{2} - \frac{R^2V^2}{2.\overline{R+S}} = \frac{RSV^2}{2.\overline{R+S}}$.

Ora

(*) *Da una lettera ſcritta nel meſe di Luglio dell'anno* 1731, *e diretta al Fratello Co. Giordano ſiamo iſtruiti, che il Padre Vincenzo Riccati aveva ricevuta una Diſſertazione del C. J., che promette di tradurre in latino. Li* 4. *Settembre dell' anno ſeguente manda il Padre Vincenzo al Co. Giordano la traduzione della ſopraddetta Diſſertazione, ed indi a'* 17. *dello ſteſſo meſe rende ragione della verſione della parola elaſtro, dicendo per altro, che ſtarebbe bene modificata conforme il ſuggerimento del C. J. Queſta circoſtanza ci manifeſta, che la mentovata Diſſertazione era il preſente Schediaſma XXII., trovandoſi nell' eſemplare di pugno del Padre Vincenzo la ſtabilita correzione, e ſi rende noto altresì, che nell' anno* 1737. *era compiuto lo Schediaſma, di cui parliamo.*

Ora queſta forza morta ſi è quella, che torna ad eſſer forza viva, quando i corpi ſi rimettono in virtù del loro elaterio. E perchè la forza morta può reſtituirſi o in tutto, o in parte, ſecondo che i corpi ſono dotati o d'una perfetta, o d'una imperfetta elaſticità; facciamo, che l'intera $= \frac{RSV^2}{2.R+S}$, a quella, che dalla molla viene reſtituita, ſia in ragione come $1 : n$, onde la forza reſtituita s'eſprima generalmente per $\frac{nRSV^2}{2.R+S}$.

A queſto paſſo ſi noti, che la ſpecie n è circonſcritta da' ſuoi limiti, cioè per una parte dal nulla, e per l'altra dall'unità, oltre i quali non può traſcorrere. Nel primo caſo, quando $n = o$, i corpi ſono perfettamente molli; nel ſecondo, mentre ſia $n = 1$, ſono perfettamente elaſtici: nei caſi di mezzo la forza dell'elaſtro è imperfetta, ed a queſto genere ſi riducono tutti i corpi da noi conoſciuti, che per un verſo non ſi dimoſtrano affatto inerti, rendendo nella mutua percoſſa un ſuono muto, indicio di qualche elaſticità, e per l'altro lo ſteſſo ſuono, che s'ode, ci fa comprendere, che almeno una parte di quella forza, da cui venivano animati i corpi avanti la colliſione, ſi ſpende a mettere in tremito le minime particelle, delle quali ſono compoſti; laonde, trattane forſe la luce, non c'è materia dotata d'una iſquiſita elaſticità.

In altra occaſione ho dimoſtrato eſſere proprietà d'un elaſtro poſto in mezzo a due corpi coſtituiti in quiete di ripartire ad eſſi la ſua forza in proporzione reciproca delle maſſe. Perciò ſe la forza d'un elaſtro pareggi la grandezza $\frac{nRSV^2}{2.R+S}$, facendo $R+S : R :: \frac{nRSV^2}{2.R+S} : \frac{nR^2SV^2}{2.R+S^2}$, l'ultimo termine dell'analogia ci rappreſenterà la parte di forza, che dalla molla viene comunicata al corpo S; e facendo $R+S : S :: \frac{nRSV^2}{2.R+S} : \frac{nRS^2V^2}{2.R+S^2}$, l'ultimo termine ci dinoterà quella porzione di forza, che dall'elaſtro viene comunicata al corpo R.

Agevolmente ſi determinano le velocità, che a' ſuddetti corpi quieti R, S vengono partecipate per l'eſpanſione dell'elaſtro. Dividaſi per la maſſa S la forza viva $\frac{nR^2SV^2}{2.R+S^2}$ comunicata, come ſi è detto di ſopra al corpo S, e ci ſi preſenterà il ſemiquadrato della velocità cercata =

$= \frac{n R^2 V^2}{2.\overline{R+S}^2}$; dunque la velocità impreſſa dall' elaſtro al corpo

$S = \frac{RV\sqrt{n}}{R+S}$: ſimilmente la velocità partecipata al corpo R ſi troverà

$= \frac{SV\sqrt{n}}{R+S}$. Ma per la teorica del moto traslato, agli ſteſſi corpi nella dilatazione d'un elaſtro le ſteſſe velocità ſi comunicano, o ſieno quieti, o ſi muovano inſieme con qualunque celerità; dunque le velocità ritrovate ſon quelle ſteſſe, che nella noſtra ipoteſi ricevono dall' elaſtro i corpi R, S, l'una delle quali è contraria, l'altra coſpirante alla comune velocità primitiva $= \frac{RV}{R+S}$. Perciò l'intera velocità del corpo

$S = \frac{RV}{R+S} + \frac{RV\sqrt{n}}{R+S} = \frac{1+\sqrt{n}.RV}{R+S} = u$, e quella del corpo

$R = \frac{RV}{R+S} - \frac{SV\sqrt{n}}{R+S} = \frac{\overline{R-S\sqrt{n}}.V}{R+S} = W$; le quali due equazioni, poſta n indeterminata, ſono a due parabole Apolloniane.

COROLLARI

Andrò raccogliendo alquante conſeguenze, che naſcono immediatamente dall' Analiſi.

I. Le velocità, le quali dalla forza elaſtica, che ſi reſtituiſce, vengono impreſſe con direzione contraria nelli due corpi R, S, cioè a dire $\frac{\sqrt{n}.SV}{R+S} : \frac{\sqrt{n}.RV}{R+S}$ ſi ſcoprono eſſere come S : R in proporzione reciproca delle maſſe.

II. Perciò moltiplicando la velocità partecipata dall' elaſtro al corpo $R = \frac{\sqrt{n}.SV}{R+S}$ per la maſſa R, e l'altra comunicata al corpo S $= \frac{\sqrt{n}.RV}{R+S}$ per la maſſa S, avremo per una parte, e per l'altra quantità

tità di moto uguali, ma con opposta direzione. E questa è una proprietà comune a tutti gli elastri collocati in mezzo a due corpi, che può facilmente dimostrarsi per altra strada.

III. La somma delle quantità del moto generata dall'elastro, e fra due corpi egualmente distribuita $= \frac{2\sqrt{n} \cdot RSV}{R+S}$, paragonata colla quantità del moto RV, che risiedeva nel corpo R prima della percossa, ci da la proporzione come $2\sqrt{n}$. S: R + S. La prima dunque può essere maggiore, minore, ed eguale messa a confronto della seconda, conforme si va variando la ragione fra le masse R, S, ed il valore della spezie *n* relativamente all'unità.

IV. Egli è certo, che se urtando la massa R colla velocità V nella massa S quieta, si farà la comunicazione del moto secondo le note regole dei corpi molli, ambo essi corpi R, S procederanno colla celerità comune $\frac{RV}{R+S}$. Moltiplicando pertanto la velocità del corpo R per la sua massa R, e quella del corpo S per la sua massa S, avremo le due quantità di moto $\frac{R^2V}{R+S}$, $\frac{RSV}{R+S}$, che unite in una somma ci daranno la quantità di moto RV, quella stessa, da cui veniva animato il corpo R avanti la percossa.

V. Ora se dalla quantità del moto del corpo R $= \frac{R^2V}{R+S}$, con cui camminerebbe esso corpo dopo la collisione, se fosse affatto inerte, sottrarremo la prodotta dell' elastro in senso contrario $= \frac{\sqrt{n}\ RSV}{R+S}$, ed alla quantità del moto del corpo S nella circostanza come sopra $= \frac{RSV}{R+S}$ aggiungeremo la generata dalla molla con direzione cospirante parimenti $= \frac{\sqrt{n}\ RSV}{R+S}$, scopriremo, che sieno i mobili o inerti, o dotati di perfetta, o imperfetta elasticità, tanto prima, quanto dopo l'urto si mantiene la stessa quantità di moto, avuto però riguardo ai moti o cospiranti, o contrarj.

VI. Quindi non resterà mai alterata nè la velocità, nè la direzione del centro di gravità dei due corpi R, S; e come camminava avanti il congresso, così seguiterà a muoversi dopo la collisione.

VII.

VII. La velocità relativa delli due corpi R, S, reſtituito che ſia l'elaſtro, s'eſprime generalmente per la quantità $U\sqrt{n}$, e ſarà alla velocità relativa de' predetti corpi prima dell'urto come $\sqrt{n} : 1$, la quale analogia ſi cambia in egualità, poſto che i corpi ſieno perfettamente elaſtici.

VIII. Finalmente computata la forza viva del corpo R avanti la percoſſa giuſta la ſentenza del Leibnizio, moltiplicando la maſſa R nel ſemiquadrato $\frac{V^2}{2}$ della velocità, queſta forza ſarà all'aggregato delle forze vive, che riſiedono nei corpi R, S compiuta la comunicazione del moto, come $R+S : R+nS$, e conſeguentemente a quella porzione di forza, che dai corpi imperfettamente elaſtici reſta per così dire aſſorbita, e non agiſce nell'atto della reſtituzione, come $R+S : S-nS$.

Se dunque ſaranno i corpi affatto inerti, fatta $n=o$, la forza primitiva ſarà alla viva, che reſta, come la ſomma delle maſſe $R+S$ alla maſſa R del corpo in moto, ed alla morta, che ſi perde nella contuſione, come la ſomma delle maſſe $R+S$ alla maſſa S del corpo in quiete, ed in conſeguenza avremo in ragione di R : S la forza viva, che nei corpi dopo l'urto ſi conſerva, alla morta, che ſenza reſtituirſi nella mutua ammaccatura ſi ſpende.

Se poi ſi ſupporranno eſſi corpi perfettamente elaſtici, allora eſſendo $n=1$, la forza viva prima del urto ſi mantiene la ſteſſa anche dopo l'urto, dividendoſi fra corpi con quelle leggi, che dal calcolo riſultano.

Nei corpi dotati d'imperfetta elaſticità, la formula c'inſegna come cammina la faccenda.

S C O L I O

I Corollarj, che ſi ſono dedotti, e che concordano colle Propoſizioni già dagli altri Geometri dimoſtrate intorno la comunicazione del moto ne' due caſi più ſemplici di corpi o perfettamente molli, o perfettamente elaſtici, mi porgono motivo di render la ragione, da cui ſono ſtato perſuaſo a ſervirmi nell'analiſi della ipoteſi Leibniziana, ſupponendo, che le forze vive d'un corpo in moto abbiano a miſurarſi dalla maſſa moltiplicata nel ſemiquadrato della velocità, e non dalla quantità del moto, come pretendono i Carteſiani, ed i Newtoniani.

Il Corollario quinto c'inſegna, che urtando il corpo R nel corpo S, ſi mantiene coſtante tanto prima, quanto dopo l'urto la medeſima quantità di moto, o ſieno i corpi totalmente inerti, o dotati di perfetta, o imperfetta elaſticità. Su queſto principio ſuole comunemente fondarſi una delle principali ragioni, per cui ſi profeſſa, che la forza viva dalla quantità

tità del moto non ſi diſtingua: e pure s'io non m'inganno, penſo, che da ciò debba tirarſi una conſeguenza direttamente contraria.

Egli è certo, che nelle percoſſe vicendevoli di tutti que'corpi, che abbiamo alle mani, quantunque ſieno de più riſentiti, e de'più diſpoſti a prontamente rimetterſi, non ſi conſerva intera dopo l'urto quella quantità di forza viva, da cui erano animati prima della colliſione. In prova di queſta verità baſta leggere le accuratiſſime oſſervazioni fatte col mezzo dei Pendoli dal Cav. Nevvton, e le più recenti regiſtrate in una Diſſertazione del Sig. Giovanni Rizzetti ſtampata nel primo Tomo degli atti dell'Accademia di Bologna.

E perchè nelle citate ſperienze ſono ſtate computate diligentemente le reſiſtenze, e particolarmente quella, che naſce dal contraſto dell'Aria; ſi perſuadeva il Matematico Ingleſe, che la diminuzione della forza, la quale nelle palle di vetro da lui adoprate era proſſimamente la decimaſeſta parte della forza primitiva, naſceſſe da qualche picciola contuſione, per cui nell'atto della percoſſa reſtaſſero eſſe sfere intaccate, e viziate in maniera, che per quanto foſſero pronte a reſtituirſi, non giungeſſero però mai a ricuperare eſattamente la loro primiera figura.

A buon conto ſecondo l'opinione del citato Autore, ogni qual volta dopo l'urto rimane la contuſione, abbiamo ad inferire, che ci è perdita di forza: ma nel congreſſo dei corpi molli ſi rende manifeſta al ſenſo l'ammaccatura; dunque ſe la ſteſſa quantità di moto ſi conſerva, o la forza è una coſa diverſa dalla quantità del moto, o nulla di forza ſi perde nella contuſione. Guardinſi dunque i Nevvtoniani, che nell'opporſi al Graveſande, che prima d'ogni altro di quella forza, che nelle ammaccature ſi conſuma, e paſſa da viva in morta, ha fatto parola, non gettino a terra le maſſime del loro Maeſtro, e non impugnino una verità evidente da lui conoſciuta, e inſegnata per diſendere una ipoteſi, che mal s'accorda con i fenomeni.

In molti incontri la coſa ſuccede almeno in parte come il Signor Nevvton va diviſando, ſpecialmente in quella ſorta di materie, che fra le molli, e le dure ſtanno di mezzo, e che ci fanno ſentire un ſuono ottuſo. Frattanto ſpeſſe fiate accade, che parecchi corpi poſſono chiamarſi in un ſenſo perfettamente elaſtici, come per cagion d'eſempio le sfere di vetro, di bronzo, d'avorio, in quanto cioè compiuta la compreſſione naſcente dalla percoſſa, anno in ſe tal virtù di rimetterſi, e di ricuperare la loro figura, che in eſſe non ſi diſcerne nè pur veſtigio di qualſiſia minima contuſione. Sopra queſto punto merita d'eſſer letto ciò, che dopo il Mariotte ha dottamente ſcritto il Sig. Rizzetti nella citata Diſſertazione.

Non oſtante ciò ſe rifletteremo, che tutta la forza primitiva non s'impiega nella comunicazione del moto, ma che una parte ſe ne trattiene, per così dire, dai corpi ſteſſi, le minime particelle dei quali vengono agitate, e ſconvolte da un moto inteſtino di tremito, e di palpitazione, per cui ſi genera il ſuono, che ſempre mai durerebbe, ſe non veniſſe eſtinto dalla reſiſtenza del mezzo; conchiuderemo, che in

qualunque caſo la forza, dalla quale viene generato il moto prodotti dalla rifleſſione, è ſempre minore di quella, che riſiedeva nei corpo ſteſſi, e da cui naſceva il moto locale prima della percoſſa.

E ſe così è (perchè s'altrimenti foſſe, la forza viva, che ſi conſerva nel moto rifleſſo, aggiunta l'altra, che ſi ſpende, o nel tremito, o nella contuſione, o in ambo i ſuddetti elementi, ſupererebbe la forza primitiva, che ſola l'uno, e l'altro effetto produce, e ſi porrebbe un'eccezione al generaliſſimo aſſioma, che l'energia dell'effetto non può mai eccedere quella della propria cagione) mi ſembra evidente, che ſe nella percoſſa una qualche parte della forza viva s'impiega ſempre in produrre il tremito, e frequentemente anche la contuſione, e che ciò non oſtante tanto prima, quanto dopo l'urto la ſteſſa quantità di moto locale ſuſſiſte in tutti i corpi o affatto inerti, o perfettamente, o imperfettamente elaſtici; non abbia punto che fare la forza viva colla quantità del moto, e che queſte ſieno due proprietà diverſe, che ſenza incorrere in un manifeſto paralogiſmo non poſſono mai prenderſi per una coſa medeſima.

COSTRUZIONE.

La velocità U, con cui cammina il corpo R (Fig. 71., 72., 73.) prima d'urtare nel corpo S, ci venga rappreſentata dalla retta CD, alla quale tirata la perpendicolare CA, queſta ci eſponga tutta la forza, che s'impiega nella compreſſione, e che intiera ſi reſtituiſce dai corpi perfettamente elaſtici, con che le abſciſſe creſcenti C*m*, CM, che principiano dal nulla, e vanno a terminare nella maſſima CA, eſprimeranno le forze, con cui ſi ſviluppano gli elaſtri imperfetti in tutti i caſi poſſibili. Compiuto il rettangolo CABD, la baſe AB ſi divida in due parti AI, IB, che ſieno in ragione reciproca delle maſſe R, S, e dai vertici C, D intorno gli aſſi CA, DB ſi deſcrivano le due ſemi parabole come nello ſchema, che ambe paſſino per lo punto I. Quindi prorogata CD in H, facciaſi tanto DH, quanto CG uguali all'ordinata BI, e condotte le normali HL, GK, ſi avrà ciò, che baſta per la coſtruzione, e per le neceſſarie determinazioni.

COROLLARJ.

I. L'ordinata BI appartenente alla curva BPI nel punto, dove le due parabole ſi tagliano, dinota la velocità, con cui urtando il corpo R colla celerità AB nel corpo S quieto, ambo camminerebbono uniti dopo la percoſſa, mentre foſſero perfettamente molli. All'incontro l'applicata AI dell'altra parabola CNI eſprime la velocità, colla quale nella medeſima ipoteſi procederebbero di conſerva i mobili S, R, quando il corpo S colla ſuddetta velocità AB urtaſſe nel corpo R coſtituito in ripoſo.

II.

II. La ſuppoſizione dell'antecedente Corollario ci ſomminiſtra uno dei limiti, che per un verſo circoſcrivono le operazioni della Natura. L' idea d'un corpo affatto inerte è un lavoro del noſtro intelletto, al quale poco coſta il fingere, che tutta la forza impiegata nella contuſione paſſi in forza morta, di modo che ſe ne reſtituiſca una porzione, o nulla, o infinitamente picciola. In fatto ſi trovano alcune materie pigre, e cedenti, come per eſempio la creta molle, che a tale immaginaria proprietà così da vicino ſi accoſtano, che fra i canoni, i quali da eſſa ſe ne deducono, e le più delicate ſperienze non ſi ravviſa differenza, che col ſenſo poſſa diſtinguerſi. Nel caſo noſtro ſi vuole, che ſia $n=0$, conſeguentemente le due abſciſſe ne due punti H, G, ſaranno nulle, e le ordinate, che partono dai predetti punti anderanno a terminare nei vertici D, C delle parabole, camminando dopo l' urto ambo i corpi congiunti colla celerità comune HD, ovvero GC.

III. Il limite oppoſto ha luogo, qualunque volta i due corpi R, S ſono perfettamente elaſtici, e per tali intendo io non già quelli, che nell'atto di rimetterſi, eſattamente la loro prima figura riacquiſtano; ma ſolamente gli altri, ſe pur ſi danno in Natura, che non ritengono in ſe alcuna quantunque minima parte di forza impiegata nel comprimerli, e nel far loro cangiar figura. Per le oſſervazioni del lodato Sig. Rizzetti proſſimamente ſi verifica la poſizione in certi corpi ſferici, piccioli, pronti, che rendono un acutiſſimo ſuono, e che conſeguentemente un breviſſimo tempo in reſtituirſi conſumano. L'ipoteſi richiede, che ſia l'abſciſſa $CA=n$: e giacchè le velocità ſi miſurano dalle applicate LI, KI, che vanno a terminare nella interſecazione delle parabole; la prima ſpiegato intieramente l'elaſtro, converrà al corpo S, e la ſeconda al corpo R.

IV. E qui cadono in acconcio alquante conſiderazioni. Qualora le due maſſe R, S, fornita la colliſione, in figura di maſſe inerti camminano di conſerva, la retta IB, ovvero BL dinota la loro comune velocità: perciò ſi fa manifeſto, che aggiunto al corpo S il moto prodotto dalla forza coſpirante dell' elaſtro, ſi raddoppia la ſua velocità. All' incontro l'azione della molla comunica alla ſfera R la celerità AI, la quale, come già ſi è avvertito, non è diverſa da quella, con cui congiuntamente procederebbero i corpi molli R, S, quando S urtaſſe in R colla velocità AB. Ed eſſendo la celerità AI contraria di direzione alla KA, o ſia BI acquiſtata già dalla palla R prima dello ſviluppamento dell'elaſtro, ne ſiegue, che compiuta l'operazione, camminerà eſſa colla velocità IK, differenza, che paſſa fra le celerità aſſegnate.

V. Quindi ſi ſcorge, che ſiccome nel doppio urto ſucceſſivo dei corpi inerti, mentre cioè R percuote S, ſi muovono ambo colla velocità IB, e mentre S percuote R, procedono ambo colla velocità AI, le quali velocità unite inſieme ſono eguali alla primitiva AB; così parimente nella doppia azione, che naſce dall'evoluzione della molla, ſi generano le predette velocità in ſenſo contrario, aggiungendoſi la prima al corpo S, e levandoſi la ſeconda al corpo R: dal che ſi rende manifeſto, quanto

tenace delle proprie leggi ſia la Natura, e quanto uniforme nelle ſue operazioni.

VI. Dalli mentovati due limiti reſtano abbracciati tutti gli altri caſi. In fatti ſe la forza impiegata nella contuſione, e nella coſtipazione delle parti non ſi reſtituiſce intieramente, facciaſi come la forza intera a quella, che ſi rimette, così AC: MC, e tirata la retta MQ, dinoteranno le applicate UP, MN quelle velocità, che dalla ſola azione dell'elaſtro imperfetto vengono comunicate a due corpi S, R, ed aggiunta al primo, e ſottratta dall'altro la comune velocità UQ, o ſia MO, ſarà QP la velocità totale del corpo S, ed ON quella del corpo R, compiuta che ſia la reſtituzione.

VII. Quanto i corpi ſono dotati di maggior forza di molla, tanto più s'aumenta la celerità del corpo S, e ſi ſcema quella del corpo R; di modo che queſta ultima in parecchie circoſtanze può diventar nulla, ed anche negativa. Se il corpo R è maggiore del corpo S, ſuccede ciò, che la figura adattata a queſto caſo ci dimoſtra (Fig. 71.), e di qualunque genere i ſuddetti corpi eſſer ſi poſſano conſerveranno dopo la percoſſa la direzione del corpo R, ed ambo acquiſteranno quelle velocità, che negli incontri particolari reſtano dalla coſtruzione determinate.

VIII. Ma ſe le maſſe R, S (Fig. 72.) foſſero uguali, ed in conſeguenza uguali i ſegmenti AI, IB, la perpendicolare GK verrebbe a cadere nel punto I, interſezione delle due parabole; laonde riducendoſi a nulla la retta KI, ci dà a divedere, che nell'ipoteſi d'una perfetta elaſticità il corpo R, compiuta la reſtituzione, ſi ferma immobile, e che il corpo S riceve in ſe tutta la velocità AB. Se poi i mobile ſaranno imperfettamente elaſtici, fatta la forza, che ſi ſpende nella contuſione, a quella, che ſi reſtituiſce, come AC: MC, e tirata la retta MQ, il corpo R procederà colla velocità OM, ed il corpo S colla celerità QP verſo dove era diretto il moto del corpo R prima dell'urto. Ma perchè nel preſente caſo le due applicate ON, OP ſono eguali, accaderà, che la ſomma delle due velocità QP + PO ſia ſempre uguale alla celerità primitiva IL, o ſia AB.

XIX. Per ultimo ſe la maſſa, che ſi muove, è minore dell'altra, che ſtando quieta aſpetta d'eſſere cacciata di luogo, la Fig. 73. ci manifeſta con quali canoni ſi regoli la comunicazione dei moti. Se ambe eſſe maſſe foſſero affatto inerti, procederebbono per la direzione RS colla comune velocità IB. Se poi foſſero dotate di perfetta elaſticità, la palla S giuſta l'aſſegnata direzione camminerebbe colla velocità LI, e la palla R tornerebbe indietro colla velocità IK. Nelle coſtituzioni di mezzo, ſecondo la varia proporzione fra la forza impiegata nella contuſione, e quella, che dall'elaſtro imperfetto ſi rimette, può accadere, che muovendoſi ſempre il corpo S verſo la medeſima parte, l'altro R o ſeguiti i ſuoi veſtigi, o ſi fermi, o volti cammino. Si ferma, qualora la velocità generata dall'eſpanſione dell'elaſtro è preciſamente uguale a quella, con cui progrediva in figura di corpo molle, ed il punto *n*, in cui la ret-

retta GK taglia la parabola, ed a cui conviene l'ordinata $mn = AK$, determina la proporzione tra AC, MC. Procede per la direzione del corpo S, quando la forza reſtituita è minore di mC: e muta viaggio in ſenſo contrario, mentre ſia maggiore di mC la forza, colla quale la molla ſi ſpiega, eſſendo obligata in tal incontro a retrocedere colla velocità per eſempio ON.

S C O L I O.

Per dimoſtrare maggiormente quanto la Natura ſia conſorme, e coſtante nelle ſue operazioni, io dico, che non ſolamente il centro di gravità continua il ſuo ſolito viaggio, compiuta che ſia la comunicazione del moto, ma di più nell'atto ſteſſo ſenz'alcuna interruzione, in cui il moto va paſſando per gradi, e ſucceſſivamente da un corpo all'altro, e ciò generalmente, e ſenz'alcuna eccezione in tutte le varie ſuppoſizioni, che da noi ſin ora ſono ſtate conſiderate.

Prima di proceder oltre ſi noti, che quantunque paja al ſenſo ridurſi con tal preſtezza a termine l'operazione, che non ſi poſſa diſcernere il principio dal fine; contuttociò ſempre vi s'impiega un tempo determinato, ora più lungo, ed ora più breve ſecondo la varia natura, e coſtituzione dei corpi, lo che ci viene chiaramente indicato dal ſuono più acuto, e più grave, che ſi ode nell'atto della percoſſa.

Aggiungaſi, che dovendo far paſſaggio il corpo S (Fig. 71.) dallo ſtato di quiete ad un grado determinato di celerità, e conſeguentemente ſcemarſi, ed alterarſi quella del corpo R, che talvolta, come abbiam veduto, è obbligato a cangiar direzione; ne ſiegue, che non operando mai la Natura per via di ſalto, anderanno a poco a poco creſcendo, e decreſcendo le predette velocità, fino a giungere in paſſando per tutti i gradi di mezzo a que' limiti, che già ſi ſono aſſegnati. Ma con che regola procedano principiamo ad inveſtigarlo dal caſo, in cui gli elaſtri dopo ſofferta la compreſſione ſi vanno di paſſo in paſſo ſviluppando.

Sia dunque la forza impiegata nella contuſione a quella, che ſi reſtituiſce, come AC: MC, onde ſieno ON, QP le velocità dei due corpi R, S, terminata che ſia l'evoluzione dell'elaſtro. Suppongaſi, che la molla cominci ad impiegare una parte minima della ſua azione contro le maſſe R S, eſpreſſa per l'abſiſſa Cm, e ci ſia conceſſo d'impedire con qualche ordigno l'ulteriore reſtituzione; egli è manifeſto, che in queſto caſo procederà la coſa, come ſe la forza conſumata nell'ammaccatura, a quella, che ſi rimette, foſſe in proporzione di AC: mC: ma per ciò, che di ſopra ſi è provato, in tale circoſtanza non reſta punto alterato il moto del centro di gravità; dunque nè meno ſarà ſoggetto a qualſiſia alterazione in quel momento di tempo, in cui il mobile R cammina colla velocità on; ed il mobile S colla celerità qp. Facciaſi, che la molla agiſca con un ſecondo elemento di forza, e replicato il diſcorſo, ſi raccolga, che quantunque le ſuddette velocità a miſura, che ſi va ſpiegando l'elaſtro, o ricreſcano, o ſi diminuiſcano, non oſtan-

te

te ciò mantengono fra loro una così giusta relazione, e sono in maniera temperate, che il centro di gravità seguita sempre il suo viaggio in qualunque ipotesi colla stessa direzione, e colla stessa velocità.

Deducasi dalle cose dette per via di corollario, che le parabole nello schema delineate servono di scala per determinare le velocità variabili dei corpi R, S nell'atto, che la molla si va sviluppando. Compiuta la contusione, le due masse camminano per un istante in qualità di corpi molli colla comune celerità GC, ovvero HD, ma in progresso si aumenta il moto della palla S, e si sminuisce quello della palla R, finattantochè la prima acquisti la velocità QP, e la seconda si riduca colla velocità OU, nel quale stato si suppone, che l'elastro consumata tutta la forza, cessi d'esercitar la sua azione. In questo mentre avendo il corpo R a passare dalla velocità GC alla ON per tutti i gradi intermedj, ci sarà un momento di tempo, nel quale dovrà procedere colla velocità YS, ed in questo medesimo istante il corpo S camminerà colla celerità corrispondente ZT, regolandosi le respettive velocità sulla comune abscissa CR, e sulle ordinate terminate alle due curve paraboliche.

La mentovata legge di Natura, siccome generale, trova altresì luogo nell'atto stesso, che percuotendosi un corpo con l'altro, si genera la mutua contusione. La Massa R nell'esercitar la sua azione contro la massa S costituita in quiete perde la sua velocità a gradi, ed a gradi parimente la palla S acquista la velocità ad essa dovuta, finattanto che finita l'operazione, ambe procedono con pari passo in figura di corpi molli. Frattanto in qualunque stato si mantiene sempre costante la medesima quantità di moto; perchè colle stesse leggi la forza viva passa in morta, e la morta in viva, ed in ogni elemento di spazio l'elastro si spiega con una forza eguale, o almeno proporzionale a quella, con cui è stato compresso; cioè a dire uguale, mentre i corpi sieno perfettamente elastici, e proporzionale, quando sono dotati d'una imperfetta elasticità.

Colla retta AB (Fig. 74.) espongo la velocità della palla R, e condotta al punto B la perpendicolare BC, faccio AB : BC in ragione inversa di R: S. Taglio per metà colla linea BD l'angolo retto ABC, e dal punto D d'intersecazione lascio cadere la normale DE = EB. Egli è certo, che se le sfere R, S saranno affatto molli, ed inerti, terminata che sia la comunicazione del moto, ambe cammineranno colla comune celerità ED, o sia EB: ma nel tempo, in cui dura l'azione, se per cagion d'esempio la massa R avrà perduta la velocità AF, la massa S avrà acquistata la velocità FG, e così successivamente, fin tanto che la celerità DE acquistata dal corpo S, e la EB rimasta nel corpo R sieno eguali, cessando allora l'azione, e la forza della percossa, quando il primo con pari velocità si sottragge alle impressioni del secondo.

SCHE-

SCHEDIASMA XXIII. (*)

Veræ & germanæ virium elaſticarum leges ex phænomenis demonſtratæ.

ARduum opus aggrediuntur hi, qui quæſtionem aliquam enodandam ſibi proponunt, in qua cum nihil datum ſit, quod ad inveſtigationem perducat, quot data invenire oportet, totidem nova, & difficilia problemata ſolvenda occurrunt. Et quamquam ea, quæ pro notis uſurpamus, non ex fictis philoſophorum hypotheſibus, ſed ex ipſa natura, & ab experimentis petenda ſunt; ſæpiſſime accidit, ut quæ propriora videntur, & rem fere attingunt, ea nos a propoſito longiſſime removeant. Hoc periculo meo didici; cum enim in leges virium elaſticarum inquirerem, putabam me voti compotem fieri debere, ſi ſpirarum, laminarum, funium ſeſe reſtituentium ſupellectile comparata, majori qua poteram accuratione experimenta inſtituiſſem. Verum incaſſum recidit labor, & rei difficultas qualemcumque induſtriam meam fruſtrata eſt; nullus enim canon obſervationibus ex omni parte reſpondens ſanciri potuit; quod an materiæ defectui, & circumſtantiarum varietati, an experimentorum ſubtilitati tribuam, neſcio: parumque abſuit, quin in doctiſſimi Jacobi Bernoullii ſententiam deſcenderem, unumquodque ſcilicet corpus pro varia ſuarum partium textura, peculiarem, & ab aliis corporibus diverſam elaſticitatis legem obtinere.

Cum autem de re mea non conquieſcerem, venit in mentem ab acuſtica auxilium petere. Notiſſimæ ſunt fidium muſicarum armonicæ proprietates, ſed nondum compertum eſt, ex quo canone virium elaſticarum dependeant, argumentumque hoc nullis clariſſimorum mathematicorum paralogiſmis inclaruit. Nam ſi elaſticitatis legem aliquam inter ſimpliciores tamquam datam aſſumimus, quod hucuſque factum eſt; tunc id quod quærendum erat, ſupponitur, & hypotheſis detorquenda eſt, me-

(*) *Sino dall' anno* 1720. *il Conte Jacopo incominciò a lavorare intorno il preſente Schediaſma, come ſi raccoglie da una lettera ſcritta nel meſe di Settembre al celebre Sig. Antonio Valliſnieri. Impariamo da due lettere del Sig. Niccolò Bernoulli all' Autore in data de' 24. Novembre, e de' 9. Dicembre* 1721., *ch' egli avea diviſato di ſpedire una lettera al Sig. Giovanni Bernoulli Padre del Sig. Niccolò, una copia della quale ſi conſerva fra i ſuoi manoſcritti. Contiene queſta un eſtratto dello Schediaſma XXIII. Avendo l' Accademia di Bologna richieſta al Conte Jacopo una qualche Diſſertazione, mandò egli la preſente al Sig. Euſtachio Manfredi, il quale con lettera de* 12. *Ottobre* 1723. *ne accuſa la ricevuta. Finalmente eſſa comparve al pubblico l' anno* 1731. *nel Tomo primo dei comentarj della mentovata Accademia.*

ut omnibus phænomenis ſatisfaciat. Quod ſi inter infinitas unam, aut alteram attentando eligimus, quæ melius propoſitum præſtet; etiamſi, quod difficile eſt, veram fortuito aſſequamur, talem aggreſſionem geometra indignam exiſtimo: Ex quibuſdam igitur datis conditionibus, quas circumſtantiæ ſubminiſtrant, vires elaſticæ ſollicitantes, licet omnino ignotæ, inter ſe comparandæ fuerunt, ut deinde cum notis phænomenis collatione facta, unica, & germana lex, qua natura utitur in hujuſmodi motibus temperandis, tandem prodiret; quod an feliciter, & ex voto ceſſerit, clariſſimorum Academiæ Bononienſis ſociorum judicio relinquo.

ſed altius contemplatio petenda eſt; & aliquot lemmata præmittenda.

LEMMA PRIMUM.

Sint duæ figuræ ſimiles ACB, *acb* (Fig. 75.), & duo corpora B, *b*, quorum maſſæ M, *m* ex punctis quietis B, *b* ſecundum directiones BA, *ba* moveantur, & ſollicitentur a viribus acceleratricibus expoſitis per ordinatas curvarum AEC, *aec*: dico quod tempora, quibus lineæ BA, *ba*, vel earum partes ſimiles percurruntur, erunt in ratione dimidiata maſſarum.

Fiat BA: *ba*:: BD: *bd*, & in eadem proportione ſumantur fluxiones BF, *df*, ducanturque ordinatæ DE, *de*.

Quoniam velocitates, quibus percurruntur elementa DF, *df*, per ea, quæ ab aliis demonſtrata ſunt, ſe habent in ratione dimidiata arearum BDEC, *bdec* directe, & in ratione pariter dimidiata maſſarum reciproce; hujuſmodi autem velocitates ſunt etiam directe ut ſpatia conficienda DF, *df*, & inverſe ut tempora T, *t*, quibus hæc ſpatia conficiuntur, atque inſuper proportio dimidiata arearum BDEC, *bdec*, ob earum ſimilitudinem eſt eadem, quæ fluxionis DF ad fluxionem *df*; igitur $\frac{DF}{T} : \frac{df}{t} ::$ $DF : df$, hoc eſt $T : t :: \sqrt{M} : \sqrt{m}$; quod cum verificetur de temporibus per quaſcumque alias fluxiones ſimiles, & ſimiliter poſitas; ſequitur tempora integra, quibus percurruntur lineæ BA, *ba*, vel earum portiones quælibet ſimiles, eſſe in ratione maſſarum ſubduplicata Q.E.D.

COROLLARIUM.

Hinc ſi maſſæ ponantur æquales, tempora quoque erunt æqualia: & ſi maſſæ ſint ut ſpatia percurrenda BA, *ba*, tempora erunt in dictorum ſpatiorum proportione dimidiata Quod ſi M: *m* :: $\overline{BA}^2 : \overline{ba}^2$ hoc eſt

eſt maſſæ ſe habeant, ut quæcumque ſpatiorum dignitates, tempora ſe habebunt ut $\overline{BA}^{\frac{n}{2}} : \overline{ba}^{\frac{n}{2}}$.

SCOLION.

Ex origine A (Fig. 76) circa communem axem AB deſcribantur infinitæ figuræ ſimiles AED, AGF, ACB &c.: linea recta, quæ connectit puncta A, C, tranſibit per infinita puncta E, G &c.; ſunt enim tam in figuris ſimilibus, quam in triangulo ABC, AB: BC:: AF: FG:: AB DE &c.; recta igitur AC eſt communis locus, in quem deſinunt puncta extrema, & analoga omnium ſimilium figurarum. Cum autem curva AHC ad libitum ſumpta ſit, nullaque tam ex analyticis, quam ex mechanicis a demonſtrata proprietate excludatur; manifeſtum eſt inter ipſas locum etiam rectæ lineæ AEC concedendum. Si itaque triangulo ABC, & linea AF, vel AG pars lineæ majoris AC. In hoc ſolo caſu, reliquis omnibus excluſis, unica linea, hoc eſt recta AEC idem officium præſtat, ac infinitæ curvæ ſimiles. Porro ex præmiſſo lemmate, maſſis exiſtentibus æqualibus, ſpatia BA, FA, DA &c. æquali tempore percurruntur. Solum igitur triangulum pro ſcala virium ſollicitantium habendum eſt, in qua motus a quiete incipientes in quocumque puncto axis, & deſinentes in punctum A ſint iſochroni.

LEMMA SECUNDUM.

Iisdem poſitis, ut in antecedenti lemmate, hoc ſolum immutato, quod loco duarum curvarum ſimilium, accipiantur duæ curvæ AEC, *aec*, (Fig. 77.) analogæ ad ordinatas; in quibus ſcilicet ſumptis abſciſſis æqualibus AD, *ad*, applicatæ DE, *de* ſint ſemper in coſtante ratione: dico tempora, quibus a mobilibus B, *b* conficiuntur ſpatia æqualia BA, *ba*, vel BD, *bd*, ſe habere in ratione directa ſubduplicata maſſarum, & inverſa pariter ſubduplicata virium ſollicitantium.

Velocitates, quibus percurruntur ſpatia infiniteſima æqualia DF, *df*, ex una parte ſunt in ratione reciproca temporum, ex altera ut radices arearum BDEC, *bdec* diviſæ per radices maſſarum: ſed areæ ſunt inter ſe ut ordinatæ, ſeu vires accelerantes BC, *bc*; ergo tempora per DF, *df* ſunt directe ut radices maſſarum, & inverſe ut radices virium. Quod autem demonſtratum eſt de fluxionibus DF, *df*, de quibuſcumque aliis ſub iiſdem conditionibus verificatur; igitur eadem temporum proportio locum habet, etiamſi conficiantur ſpatia finita BA, *ba*, vel BD, *bd*. Q. E. D.

COROLLARIA.

Maſſis exiſtentibus æqualibus, tempora ſe habebunt in ratione inverſa dimidiata virium, & ſi maſſæ ſint ut vires, tempora utrobique erunt æqualia.

LEMMA TERTIUM.

Sint modo curvæ AEC, *aec* (Fig. 78.) ad abſciſſas analogæ, hoc eſt diviſo utroque axe BA, *ba* proportionaliter in punctis D, *d*, ordinata DE alteri *de* ſit ſemper æqualis: dico tempora per BA, *ba*, vel BD, *bd* eſſe in ratione compoſita ex dimidiata ſpatiorum BA, *ba*, & dimidiata maſſarum.

Velocitates per elementa proportionalia DF, *df* ſunt ut ipſa elementa directe, & tempora, quibus percurruntur, inverſe: & cum hujuſmodi velocitates ſint pariter in ratione ſubduplicata directa arearum BDEC, *bdec*, & inverſa ſubduplicata maſſarum; areæ autem ſervent proportionem fluxionum DF, *df*, hoc eſt ſpatiorum BA, *ba*; igitur vocatis T, *t* temporibus per DF, *df*, habebimus $\frac{BA}{T} : \frac{ba}{t} :: \frac{\sqrt{BA}}{\sqrt{M}} : \frac{\sqrt{ba}}{\sqrt{m}}$

quæ analogia alteram ſuppeditat $T : t :: \sqrt{BA} . \sqrt{M} : \sqrt{ba} . \sqrt{m}$. Exiſtentibus porro temporibus per quaſcumque fluxiones proportionales, & proportionaliter reſectas in ratione conſtante, eadem proportio manebit, dum corpora B, *b* feruntur per ſpatia finita proportionalia BD, *bd*, BA, *ba*. Q. E. D.

COROLLARIA.

Si maſſæ ſunt æquales, tempora ſe habebunt in ratione dimidiata ſpatiorum; & ſi maſſæ ſint ut ſpatia percurrenda, tempora quoque erunt ut ipſa ſpatia. Quod ſi maſſæ ſint reciproce ut ſpatia, tempora utrobique erunt æqualia.

SCHOLIUM.

Dum vires ſollicitantes quomodocumque per ordinatas alicujus curvæ exponuntur, qua ratione tractandæ ſint, geometram latere non poteſt, poſtquam apud illuſtres mathematicos canones generales paſſim demonſtratos inveniet; at cum vires omnino ignotæ inter ſe comparandæ veniunt, tunc tria lemmata, quæ conſulto præmiſſa ſunt, latiſſime patent, & eximium præſtant uſum. Id pluribus in medium allatis exemplis evincere poſ-

poſſem, ſed inſtituti noſtri ratio poſtulat, ut non niſi de lege diſtractionum in corporibus elaſticis ad potentias diſtrahentes relata diſſeramus.

CANON PRIMUS

Ab experientia deſumptus.

Fides ſonoras ex eadem materia confectas aliquot præditas eſſe proprietatibus phiſicos, & muſicos longa eſperientia docuit. In primis certum eſt itus, & reditus ejuſdem chordæ ſub conſtante diſtractione ad inſtar oſcillantis penduli eodem fere tempore perfici. Iſochroniſmo locus eſſe nequit, ut in primo lemmate demonſtratum eſt, niſi curva, ſeu ſcala tenſionum ſit linea recta, hoc eſt arithmetice creſcentibus potentiis diſtrahentibus, diſtractiones eadem prorſus ratione augeantur, quod experientiæ non ſatisfacit. Quo longior chorda eſt, cæteris paribus, magis ab iſta lege diſcedit, & inter maſſimas, & minimas ejuſdem chordæ vibrationes, hoc eſt inter ſonos his reſpondentes integri comatis differentiam audiri ſepius expertus ſum, & poſt alios teſtatur doctiſſimus Jeſuita de Chales. Cum autem fides jam diſtractæ viribus minimis licet inæqualibus pulſantur, tunc vibrationes fieri æque-diuturnas ita demonſtro.

Funis AB a pondere DC patiatur diſtentionem BC (Fig. 79.). Addatur pondus minimum IG, cui conveniat ulterior diſtractio CE, manifeſtum eſt chordam ab hoc onere ſuperadjecto liberatam ſeſe reſtituere per ſpatium EC. Rurſus appendatur pondus majus, ſed infiniteſimum KH, quod efficiat diſtentionem CF, atque eo remoto, reſtitutio fiat per majus ſpatium FG; in utroque caſu ſcala virium funem reſtituentium exponitur a minimis trilineis DGI, DHK, quorum ordinatæ repræſentant cum potentias diſtrahentes, tum chordæ tenacitates diſtractioni reſiſtentes. Sed cum pars curvæ DK ſit infiniteſima, cum ſua tangente confunditur, & ideo trilinea DHK, DGI triangulum rectilineum conſtituunt; igitur per ſcholium lemmatis primi utraque reſtitutio, quæ fit ſeorſim per ſpatia FC, EC, eſt iſochrona. Q. E. D.

COROLLARIUM.

Hoc verum eſt in rigore geomctrico, dum chorda jam diſtenta a viribus æqualibus, vel ad æqualitatem proxime accedentibus, vel tandem a viribus infiniteſimis quamcumque rationem obtinentibus rurſus ſollicitatur. In cæteris caſibus differentia exigua eſt, & plerumque ſub ſenſum non cadit; cum virium reſtituentium ſcala paululum a triangulo aberret.

CANON SECUNDUS

Ab experientia deſumptus.

Sumptis duobus nervis ſola longitudine inæqualibus, qui ab eodem pondere diſtrahantur, & pulſentur ictibus æqualibus, tempora oſcillationum ſunt inter ſe, ut nervorum longitudines. Ex hoc canone nihil ad rem noſtram colligi poteſt; locum enim invenit in quacumque hypotheſi diſtractionum, quod ſic oſtendo.

Chordis AB breviori, & *ab* longiori (Fig. 79. aptetur idem pondus P, quod hinc inde producat diſtentiones BF, *bf*. Intelligantur deſcriptæ curvæ tenſionum, quæcumque tandem ſint BDK, *bdk*, quarum abſciſſæ deſignent diſtractiones, applicatæ vero potentias diſtrahentes. Hujuſmodi curvæ ſemper erunt analogæ relatæ ad abſciſſas; ponderibus enim æqualibus reſpondent diſtenſiones, chordarum longitudinibus proportionales, ut ex lemmate ſubiiciendo conſtabit. Sublato hinc inde pondere P, dum utraque chorda regreditur per ſpatia FB, *fb* eamdem proportionem ſervantia, ac chordarum longitudines, ſollicitatur a viribus, quarum ſcalæ ſunt curvæ BDK, *bdk*. Porro cum maſſæ ſint in noſtra hypotheſi ut ſpatia percurrenda FB, *fb*, vel ut chordarum longitudines AB, *ab*, tempora quoque reſtitutionum ex corollario lemmatis tertii ſe habebunt in eadem ratione. Q. E. D.

LEMMA QUARTUM.

Pendeant chordæ prædictæ AB, *ab*, duobis clavis A, *a*, & tendantur a ponderibus æqualibus: dico diſtentiones BF, *bf* eſſe inter ſe, ut chordarum longitudines.

Hæc propoſitio jam demonſtrata fuit a ſummis Viris Galilæo, Borello, & Jacopo Bernoullio, ſed alteram placet addere demonſtrationem his, quæ dicenda ſunt, magis accommodatam.

Sumatur ex chorda AB pars minima AL, cui in puncto L applicetur datum pondus P, quod diſtrahendo fibram AL, producat diſtentionem LM. Pariter ex altera chorda accipiatur pars *al* = AL, & eodem aptato pondere in *l*, fiat diſtentio *lm* = LM. Punctum *m* figatur clavo, ut fibra *am* ſe contrahere non poſſit. Sumpta iterum ex eadem chorda portione *mn* = AL, agat rurſus pondus P in fibram *mn*, & oriatur ſecunda diſtentio *no* = LM, punctumque *o* ut prius altero clavo firmetur. Sic repetita operatione ex ultima fibra, quam ſtatuamus eſſe *op*, libere pendeat idem grave P, & ſit *pq* = LM poſtrema diſtractio.

Cum duæ fibræ diſtractæ *am*, *mo* tentent ad conſuetam longitudinem ſeſe reducere, & alligatæ ſint duobus clavis *a*, & *o*, manifeſtum eſt, quod clavus intermedius *m* trahitur ſurſum, & deorſum a viribus

bus æqualibus inter ſe æquilibrium conſtituentibus. Similiter duæ fibræ *mo*, *oq* ſunt in æquilibrio reſpectu clavi *o*, prima namque eamdem vim exercet in clavos *m*, *o*, ac ſecunda in clavum *o*, & onus ſuſpenſum ex puncto *q*, contrariis tamen directionibus; igitur remotis clavis intermediis *m*, & *o*, non deſtruitur æquilibrium, ſed omnibus in eodem ſtatu manentibus, grave P non aſcendet, neque deſcendet; ex quo fit, quod tot erunt diſtentiones æquales, quot fibræ, & quod diſtractio totius chordæ *ab*, quæ æquivalet omnibus ſuarum partium diſtractionibus, ad diſtractionem unius fibræ AL, vel omnium fibrarum componentium chordam AB ſe habebit, ut longitudo ad longitudinem. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

Ad procurandas diſtentiones funium AB, *ab* requiruntur vires obtinentes proportionem longitudinum; vidimus enim pro numero fibrarum in utraque chorda multiplicandam fuiſſe actionem conſtantem ponderis P ſingulis partibus infiniteſimis applicatam. Quod ſi potentiæ quomodocumque in funes agant, puta ſi pondera æqualia ſuſpenſa ex punctis B, *b* motu accelerato deſcendentia chordas ſecum traherent, & diſtenderent, tandemque poſt varias reciprocationes in punctis F, *f* conſiſterent; evidens puto vires in diſtractiones inſumptas in eadem ratione eſſe; cum cauſæ ſint ſemper effectis productis proportionales, & æqualibus effectis æquales cauſæ reſpondere debeant.

COROLLARIUM II.

At diſtractione jam facta, ad impediendam reſtitutionem utriuſque chordæ ſufficiunt pondera æqualia, etiamſi chordæ ſint longitudinis inæqualis. Hoc fortaſſe mirum alicui videbitur, ſed phænomeni explicatio augebit admirationem. Dico igitur, quod grave applicatum chordæ in puncto infimo *q* ſuſtinetur, & æquilibratur ſolummodo a dimidia vi ultimæ fibræ *oq*. Reſtitutis clavis in locis *o*, & *m*, patet fibram minimam *op* tendi a conſueto pondere P, atque eodem tempore, dum nititur ſe contrahere, non ſolum ſuſtinere onus P, ſed æquali vi deorſum urgere clavum *o*. Similiter fibra ſuperior *mn* paſſa diſtractionem *no* pari vi ſurſum trahit clavum *o*, & deorſum clavum *m*, & ſic ſucceſſive; ergo dum ſingulæ fibræ virtutem contractionis directione oppoſita exercent, actio unius elidit actionem alterius, & pondus P non eſt in æquilibrio niſi cum dimidia reſiſtentia inferioris fibræ *oq*. Dummodo fibræ ſint in utraque chorda ejuſdem tenacitatis, & reſiſtentiæ, nihil facit ad hunc effectum explicandum longitudo chordæ, quamvis in infinitum excreſceret.

CO-

COROLLARIUM III.

Colligo ex dictis, vim gravitatis ponderis finiti P quiescentis esse infinitesimam, sustinetur siquidem a dimidia vi minima fibræ *oq*, quæ cum sit totius chordæ *ab* pars inassignabilis, necesse est ut agat inassignabili ratione. Æquilibrium igitur a natura non instituitur, præterquam inter vires evanescentes, seu inter elementa, & fluxiones virium; supponamus enim vires in statu manente, & cum loco cujuscumque vis mortuæ pondus substitui possit, absque eo quod tollatur æquilibrium, vires autem ponderum quiescentium sint minimæ, liquet inter vires mortuas tantummodo æquipondium subsistere. Hinc ni fallor corrigendi veniunt nostrates Galilæus, & Borellus, qui animadvertentes vim percussionis ad vim gravitatis habere rationem quacumque data majorem, cum supposuissent vim gravitatis finitam esse, alteram percussionis infinitam fecere. Sed potius vis percussionis inter finitas collocanda erat, & vis gravitatis cum omnibus aliis viribus mortuis, quæ scilicet a motu non roborantur, ut vires elasticæ, pressiones &c. inter infinitesimas erant recensendæ.

SCHOLION.

Fortasse ex proprietatibus chordarum elasticarum peti potest demonstratio principii fundamentalis Dynamices, quod scilicet vires vivæ corporum sint inter se, ut facta ex massis in velocitatum quadrata, non autem ut quantitates motus; quam legem tota fere Mathematica Republica reclamante, nulla licet demonstratione munitam, sanciendam tamen putavit incomparabilis Leibnitius.

THEOREMA

Vires ejusdem corporis sub diversis velocitatibus, non sunt ut velocitates.

Chordis AB, *ab* in punctis B, *b* aptentur pondera æqualia FK, *fk*: Descendat utrumque ad puncta F, *f* usquequo chordarum resistentiæ sint dictis ponderibus æquales, quod evenit, quando, descriptis curvis BDK, *bdk*, tenacitatum ultimæ ordinatæ KF, *kf* cum inter se, tum ponderibus sunt æquales, & abscissæ FB, *fb* se habent ut longitudines AB, *ab*.

Jam fingamus tam pondus BX, quam *bx* sollicitatum a naturali gravitate, & nullo modo impeditum a reactione chordarum descendere per spatia BF, *bf*: velocitates in punctis F, *f* erunt in ratione dimidiata spatiorum confectorum, aut rectangulorum XF, *xf*. Rursus descendant dicta pondera chordis appensa; vires acceleratrices in punctis analogis C, *c* erunt æquales, utpote quæ determinantur a vi constante ponderum ZC, *zc*, subductis viribus æqualibus resistentiarum utriusque chordæ DC, *dc*. Scalæ itaque virium sollicitantium pondera descendentia erunt curvæ BDK, *bdk* relatæ ad axes KX, *kx*, & velocitates in punctis F, *f* ut radi-

dices quadratæ arearum BDKX, *bdkx*; ſed hujuſmodi areæ ſunt ut abſciſſæ KX, *kx*; igitur velocitates in punctis F, *f* ſe habebunt in ratione dimidiata dictarum abſciſſarum.

His poſitis, animadvertendum eſt, gravitatem BX, vel *bx* comitantem utrumque pondus per ſpatia BF, *bf* paſſim agere extendendo chordas AB, *ab*, partim accelerando gravia deſcendentia uſque ad terminos F, *f*: ſed hujuſmodi vis gravitatis continue applicata, & non impedita gignere poſſet velocitates in ratione dimidiata ſpatiorum hinc inde decurſorum, atque impedita a tenacitate chordarum de facto velocitates utrinque producit in eadem proportione; igitur ſi fieri poteſt, quod vires vivæ ſint ut velocitates, deducendo velocitates, ſeu vires genitas a velocitatibus, ſeu viribus, quæ generari potuiſſent a ponderibus non impeditis, ſequitur, quod reliqua pars virium, quæ ex utraque parte inſumitur in chordarum diſtentionem, ſit pariter in ratione dimidiata linearum BF, *bf*, vel longitudinum AB, *ab*, quod eſt abſurdum, & contra corollarium primum noſtri lemmatis; nam cum diſtentiones ſint, ut vires tendentes, vis, quæ efficit diſtentionem BF, ad vim efficientem alteram diſtentionem *bf* ſe habet ut BF ad *bf*; non vero ut $\sqrt{BF}$ ad $\sqrt{bf}$. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

In idem abſurdum incidimus ponendo vires vivas reſpondere cuicumque functioni celeritatum, unica tantum excepta, quod nempe vires ſint in ratione velocitatum duplicata. Juxta hanc hypotheſim gravitas non impedita agendo per ſpatia BF, *bf* producit vires vivas in ratione eorumdem ſpatiorum, ac inſuper impedita a reſiſtentia chordarum efficit vires dictis ſpatiis proportionales, & facta ſubtractione, ea vis, quæ erogatur in diſtentionem chordarum, ſervat pariter rationem diſtentionum, quod verum eſſe ſupra comprobatum eſt.

COROLLARIUM II.

Vires tendentes chordas, & inducentes diſtentiones BF, *bf* metiri debemus per areas BDKF, *bdkf*, quæ in eadem proportione inveniuntur cum longitudinibus chordarum; ordinatæ ſiquidem curvarum BDK, *bdk* exprimunt reſiſtentias creſcentes chordarum, ad quas vincendas in ſingulis punctis C, *c* adhibetur pars aliqua conſtantis gravitatis, quæ per eaſdem applicatas CD, *cd* exponitur. Quod ſi chorda *ab* in plures partes dividatur, & ſingulæ extendantur ab eodem pondere P, ſumma omnium virium partes ditrahentium eſt præciſe æqualis vi, quæ in chorda *ab* efficit diſtractionem *bf*; ſicuti hæc diſtractio æqualis eſt omnium partium diſtractionibus. Mirabuntur fortaſſe hi, qui contrariam ſententiam tuentur, & vires vivas corporum ex quantitate motus, hoc eſt ex facto maſſæ in velocitatem metiuntur, me in allata demonſtratione nullam inire ra-

rationem temporis, quod profecto elementum in hujuſmodi diſquiſitionibus abſque paralogiſmo omitti non debuit. Verum, niſi peſſime fallor, certo certius eſt in ea re, de qua ſermo eſt, temporis rationem nullo modo ſubducendam eſſe; cum enim funis elaſticus brevior per violentam diſtractionem tranſit in longiorem, non mutatur ejus reſiſtentia, ſeu longo, ſeu breviſſimo tempore ad æqualem diſtentionem perveniat. Ad æqualem porro reſiſtentiam vincendam eadem vis adhibetur, dum manu, vel lento motu, vel velociori funis ducitur:

CANON TERTIUS

Ab experientia deſumptus.

Altera proprietas fidium noſtrarum in hoc conſiſtit. Si geminæ chordæ æquales ab inæqualibus ponderibus diſtrahantur, & ex his ſumantur portiones æquales, quæ pari vi pulſentur, ſoni erunt inter ſe in ſubduplicata ratione ponderum tendentium, & tempora oſcillationum in ſonorum proportione reciproca. Supereſt inquirendum, quid ad rem, de qua ſermo eſt, ex hoc canone deduci poſſit.

Ex funibus æqualibus AB, *ab* (Fig 80.) ſuſpendantur duo gravia inæqualia, quorum minus C efficiat diſtentionem minorem BC, majus vero *c* majorem *bc*. Fiat *cg* æqualis inregræ CA, & punctum *g* clavo firmetur, ita ut pars ſuperior *ag* ulterius tendi non poſſit; deinde punctis C, *c* aptentur duo alia pondera æqualia magnitudinis infiniteſimæ, quibus conveniant minimæ diſtentiones CD, *ce*. Sublatis hiſce ponderibus a punctis extremis D, & *e*, tempora reſtitutionum per fluxiones DC, *ec* ſunt in ratione compoſita tam dimidiata earumdem fluxionum, quam maſſarum CA, *cg*. Id patet ex lemmate tertio; nam portiones naſcentes curvarum, ſive arearum, quæ hinc inde ſunt ſcalæ tenacitatum a triangulis non differunt, quorum baſes æquales ſunt ob æqualia pondera infiniteſima ſuperaddita; altitudines autem plerumque inæquales ob diverſam funium inæqualiter tenſorum reſiſtentiam. Jam cum maſſa *gc*, ad maſſam *ac*, vel AC, ſit ut recta *gc*, vel AC, ad rectam *ac*, ſi maſſa utriuſque funis per unitatem exponatur, maſſa portionis *gc* exprimi poterit per magnitudinem $\frac{AC}{ac}$, igitur tempora reſtitutionum per DC, *ec* ſe habebunt ut $\sqrt{DC} : \frac{\sqrt{ec} \cdot \sqrt{AC}}{\sqrt{ac}}$. Sed hæc tempora experientia docente ſunt etiam in ratione reciproca ſubduplicata ponderum inæqualium C, *c*; ergo $\sqrt{DC} : \frac{\sqrt{ec} \cdot \sqrt{AC}}{\sqrt{ac}} :: \frac{1}{\sqrt{C}} : \frac{1}{\sqrt{c}}$, quæ analogia debi-

tis

tis operationibus inſtitutis tranſit in ſequentem $\frac{AC}{C} : \frac{ac}{c} :: DC : ec$, quod erat inveniendum.

COROLLARIUM.

Removeatur clavus *g*, & tunc onus infiniteſimum, quod agendo in ſolam portionem *cg* producebat diſtentionem *ce*, ſollicitando integram chordam *ca*, efficit diſtentionem *cd*, eritque *ce*, *cd* :: *cg* = CA : *ca*, ideoque $\frac{CA \cdot cd}{ca} = ce$, quo valore ſubſtituto in ſuperiori analogiſmo

$\frac{AC}{C} : \frac{ac}{c} :: DC : ec$, alter oritur $\frac{\overline{AC}^{a}}{C} : \frac{\overline{ac}^{a}}{c} :: DC : dc$.

SCHOLIUM.

Reponet fortaſſe aliquis, me in allata demonſtratione computum non inire ponderum C, *c*, prima vice ſuſpenſorum, quorum maſſæ in reſtitutionibus per fluxiones DC, *ec* movendæ ſunt: at hæc pondera conſideranda non veniunt in caſu noſtro; ſunt enim in æquilibrio cum tenacitatibus chordarum, a quibus ſuſtinentur, & eorum actio a retro actione eliditur. Ut hoc evincam, rem ad abſurdum deduco. Chordis ſola longitudine inæqualibus AB, *ab* (Fig. 79.) aptentur duo pondera finita æqualia CD, *cd* efficientia diſtentiones BC, *bc*; ſubinde alia duo infiniteſima æqualia HK, *hk*, quibus conveniant ulteriores diſtentiones CF, *cf*. His remotis, quadrata temporum reſtitutionum per FC, *fc* ſe habebunt ob vires ſollicitantes æquales, ut ſpatia percurſa FC, *fc* ducta in maſſas movendas, ſeu juxta hypotheſim aſſumptam in maſſas chordarum, additis hinc inde ponderibus æqualibus DC, *dc*; igitur $\overline{T}^{a} : \overline{t}^{a}$ FC. $\overline{AB + DC}$: *fc*. $\overline{ab + dc}$: eſt autem FC : *fc* :: AB : *ab*; ergo vocato P pondere DC, vel *dc*, $\overline{T}^{a} : \overline{t}^{a} :: \overline{AB}^{a} + AB \cdot P : \overline{ab}^{a} + ab \cdot P$.

Interim cum pondus P ad pondera chordarum poſſit eſſe in ratione quacumque data, ſequitur tempora reſtitutionum per FC, *fc* vergere ad æqualitatem, quod eſt abſurdum; ſunt enim ſemper inter ſe ut chordarum longitudines.

CANON QUARTUS.

Ab experientia deſumptus.

Remanet poſtrema proprietas chordarum ſola diametro differentium: Si ſumantur ex his portiones æquales ab æqualibus ponderibus diſtractæ, quæ pulſentur viribus æqualibus, tempora vibrationum ſunt ut diametri.

Sint hujuſmodi chordæ AB, *ab* tenſæ a gravibus æqualibus C, *c*, (Fig. 81.) & ſit diſtractio BC chordæ ſubtilioris major diſtractione *bc* chordæ craſſioris. Facta CG = *ca*, & fixo de more clavo in puncto G, addantur hinc inde duo pondera minima æqualia producentia diſtentiones inaſſignabiles CD, *cd*. Facile demonſtrare poſſum, curvas naſcentes in punctis C, *c*, ſeu ſcalas tenacitatum analogas eſſe, ſi referantur ad abſciſſas. Hinc per lemma tertium, dum chorda, remotis ponderibus infiniteſimis, ſe contrahit per fluxiones DC, *dc*, tempora reſtitutionum ſe habebunt in ratione compoſita ex dimidiata maſſarum CG, *ca*, & ex dimidiata ſpatiorum confectorum DC, *dc*. Maſſa autem partis CG ad maſſam chordæ craſſioris ſe habet in ratione compoſita longitudinis CG, vel *ca* ad longitudinem CA, & maſſæ chordæ ſubtilioris BA, ad maſſam craſſioris *ba*; quæ maſſæ ob altitudines æquales ſunt ut baſes circulares in utraque chorda, vel ut quadrata diametrorum: hoc eſt vocando *x* diametrum funis AB, & *y* alteram diametrum funis *ab*, & ſumendo maſſam chordæ craſſioris pro unitate, maſſa CG exponitur per magnitudinem $\frac{ca \cdot x^2}{CA \cdot y^2}$; igitur $T : t :: x \cdot \frac{\sqrt{DC} \cdot \sqrt{ca}}{y \cdot \sqrt{CA}} : \sqrt{dc}$: ſed prædicta tempora ex noſtro canone ſunt etiam ut diametri chordarum; ergo $x : y :: x \frac{\sqrt{DC} \cdot \sqrt{ca}}{y \sqrt{CA}} : \sqrt{dc}$, ex qua analogia altera fluit DC : *dc* :: CA : *ca*. Quod erat inveniendum.

COROLLARIUM.

Auferatur clavus G, & tunc onus infiniteſimum ſuperadditum funem ulterius extendat uſque ad punctum E: & cum diſtentiones ſint ut chordarum longitudines, erit CG = *ca* : CA :: CD : CE, hoc eſt $\frac{ca \cdot CE}{CA} = CD$

$=$ CD, quo valore ipſius CD ſubſtituto in ſuperiori analogiſmo, alter oritur FC: $dc :: \overline{CA}^{a} : \overline{ca}^{a}$:

SCHOLIUM I.

Simplices, & elegantes ſunt explicatæ proprietates funiculorum, qui ſola craſſitudine differunt, & qui a ponderibus æqualibus illorum illo-rithmetice creſcentibus extenduntur. Datis duabus chordarum jam diſtractarum longitudinibus AC, *ac* (Fig. 81.), reliquæ omnes a quibuſcumque potentiis æqualibus provenientes tali pacto determinari poſſunt. Voco cognitas AC, *ac*; *m*, *n*, binaſque alias diſtracti funis longitudines AD, *ad*; *x*, *y*. Jam cum per corollarium ſuperius ubique ſit $xx : yy ::$ $dx : dy$; ergo $-\frac{dx}{xx} = -\frac{dy}{yy}$, & integrando addita conſtante, $g + \frac{1}{x} = \frac{1}{y}$: ſed eo caſu, quo fit $x = m$, altera indeterminata y datæ n æqualis evadit; igitur conſtans $g = \frac{1}{n} - \frac{1}{m}$, & æquatio curvæ quæſitæ tranſit in ſequentem $\frac{1}{n} - \frac{1}{m} + \frac{1}{x} = \frac{1}{y}$, vel $mxy - nxy + mny = mnx$, qui locus eſt ad hyperbolam vulgarem, cujus reductionem Analiſtis relinquo, ſolamque conſtructionem exhibeo.

Ponatur AC æqualis longitudini AC chordæ gracilioris (Fig. 82.) & C*a* ipſi normalis æqualis longitudini chordæ craſſioris. Abſcindatur CB $=$ CA, & fiat AB: AC:: CB: CD, actaque perpendiculari DQ, intra aſymptotos DQ, DC deſcribatur *hyperbole*, quæ tranſeat per punctum *a*. Producta C*a*, ſit C*e* $=$ CD & per punctum *e* agatur *e*H parallela aſymptoto DR. Si ſumatur *e*F $=$ AC, hoc eſt longitudini *m* chordæ ſubtilioris jam diſtractæ, erit FG $=$ C*a* longitudo chordæ craſſioris ab æquali pondere diſtractionem paſſæ. Inclinata porro *e*N ad angulum ſemirectum; ita ut abſciſſa *e*M ſit æqualis MN, hæ lineæ nobis repræſentant longitudines æquales utriuſque chordæ in ſtatu naturali. Hinc ſi recta MK, vel MH exponit diſtractiones a quibuſcumque ponderibus factas in chorda graciliori, correſpondentes SL, TO exhibent diſtentiones, quas eædem potentiæ efficiunt in chorda craſſiori. At ordinatæ, & abſciſſæ inter puncta *e*, & M ad compreſſiones pertinent. Exiſtente MO compreſſione alicujus cylindri ſubtilioris, NI erit com-

preſſio craſſioris; dummodo inter baſes cylindrorum ſit eadem proportio, quæ inter baſes chordarum. Compreſſio autem uſque ad punctum *e* pervenire nequit, niſi cylindrus ita comprimi poſſit, ut ad altitudinem infiniteſimam reducatur, quo in caſu erit *ea* altitudo cylindri craſſioris. Sed de compreſſionibus redibit ſermo.

SCHOLIUM II.

Nondum actum puto, niſi oſtendam canonem quartum a tertio pendere, ejuſque eſſe conſectarium. Iiſdem poſitis (Fig. 81.), accipiatur altera chorda PQ ipſi AB æqualis tam diametro, quam longitudine. Fiat ut maſſa *ab* ad maſſam PQ; ita grave *c* ad aliud R ſuſpendendum ex puncto Q, cui conveniat diſtentio QR = *bc* (tunc enim diſtentiones ſunt æquales, dum funibus æque longis aptantur pondera in ratione craſſitudinum, quod ab aliis demonſtratum eſt) ex puncto R pendeat aliud grave infiniteſimum æquale jam applicatis in punctis C, *c*, oriaturque nova diſtentio RT: manifeſtum eſt, quod hoc pondere diminuto in ratione maſſæ PQ ad maſſam *ab*, eo caſu diſtenderet funem per ſolum ſpatium RS = *cd*, & tunc reſtitutiones per dicta ſpatia *dc*, SR eodem tempore fierent. Id conſtat ex lemmate ſecundo; ſunt enim ſcalæ tenacitatum, ſeu virium ſollicitantium analogæ ad ordinatas, & maſſæ movendæ in eadem ratione cum viribus. Verum cum pars curvæ diſtentionum reſpondens abſciſſæ evaneſcenti RT, a linea recta non aberret per primum canonem, dum chorda reſilit, plus temporis non inſumit percurrendo ſpatium TR majus, quam SR minus, remotis ſcilicet ambobus ponderibus infiniteſimis ſeorſim applicatis. Modo comparando funes æquales AB, PQ primum diſtentos a ponderibus inæqualibus C, & R, deinde ab æqualibus infiniteſimis D, T, tempus reſtitutionis per DC, ad tempus reſtitutionis per TR, vel SR eſt in ratione reciproca dimidiata ponderis C, ſive *c* ad pondus R ex canone tertio, hoc eſt in directa ſubduplicata maſſæ PQ, vel AB ad maſſam *ab*, aut ſicut diameter chordæ AB ad diametrum chordæ *ab*: ſed tempora per SR, & *dc* ſunt æqualia; ergo tempora per DB, *dc* ſe habent ut diametri chordarum ſubtilioris, & craſſioris Q. E. D.

Huc uſque dicta, præmiſſis aliquibus corollariis, ad ulteriora viam aperiunt.

COROLLARIUM I.

Quoniam ex traditis canone tertio $\frac{\overline{AC}^2}{C} : \frac{\overline{ac}^2}{c} :: CD : cd$ (Fig. 80.)

quæ analogia, ſi ſumatur ex chorda *ca* pars *cg* toti CA æqualis tranſit in

in ſequentem $\frac{AC}{C} : \frac{ae}{e} :: CD : ee$, ſequitur, quod ſi differentia ga inter

funium longitudines ſit inaſſignabilis; ita ut maſſa eg accipi poſſit tanquam æqualis utrique maſſæ ee, CA; tunc tertius prodit analogiſmus $\frac{1}{C} : \frac{1}{e} :: CD : ee$, in quo ſola conſideratur tenacitas, & vis elaſtica fibrarum.

COROLLARIUM II.

Verum dum chordæ æquales inæqualiter diſtractæ ulterius diſtrahuntur, tria elementa diſtinguenda veniunt.

Primo quo magis fibræ tenduntur, eo magis diſtentiori reſiſtunt vi propriæ tenacitatis.

Secundo quo funis magis tenditur, eo magis in longitudinem excreſcit, & ex hoc capite minus reſiſtit ulteriori diſtentioni.

Tertio minuitur reſiſtentia ex alio capite; fit enim chorda ſubtilior, quo magis in longum deducitur. Ex tribus hiſce elementis, quorum duo alteri contraria ſunt, ejuſque actionem limitant, ſemper oritur compenſatio, & fieri poteſt, ut ſecunda diſtractio CD ſit major, minor, & æqualis, ſi cum analoga cd comparetur, quod ex formula maniſeſtum eſt.

COROLLARIUM III.

Oppoſitum contingit in compreſſione, cujus elementa ſunt conſpirantia. Cylindrus compreſſus reſiſtit ulteriori compreſſioni, non ſolum ob fibrarum majorem rigiditatem, ſed inſuper quia fit brevior, & craſſior.

SCHOLIUM.

Fortaſſe minus veritati conſonat, quod docuit in Actis Academiæ Regiæ Pariſienſis anni 1705. Summus Vir Jacobus Bernoullius, diſtractionem nihil aliud eſſe, quam negativam compreſſionem; & ſemper contingere, ut creſcentibus arithmetice ponderibus, diſtractiones decreſcant. Id vero equidem experimento, ſed unico confirmat: quod ſi in multis chordis ex diverſa materia conſectis, & variæ longitudinis periculum feciſſet, miram in diſtentionibus obſervaſſet irregularitatem. Iterum veroſimile putat, legem diſtractionum variam eſſe pro varia in diverſis corporibus fibrarum ſtructura: at mutata chordarum materia, ſoni fiunt quidem graviores, vel acutiores, conſtante tamen manente inter ſonos aſſignata proportione. Neque melior eſt Hirii ſenioris ſententia aſſe-

aſſerentis tenſionem ſequi proportionem directam virium tendentium; compreſſionem vero reciprocam comprimentium.

PROBLEMA PRIMUM.

Ponderibus arithmetice creſcentibus, determinare in eadem chorda ſcalam, ſeu curvam tenacitatum.

Pono (Fig. 80.) conſtantem $\frac{\overline{AC}^{a}}{C} =$, elementum CD $= du$ quod ſtatuo æquale differentiis ſingulis ponderum creſcentium in proportione Arithmetica. Sit pondus variabile $c = u$, $ac = x$, $cd = \pm dx$ (ſignum affirmativum locum habet in diſtractionibus, & negativum in compreſſionibus) & cum ſit $\frac{\overline{AC}^{a}}{C} = \frac{\overline{ac}^{a}}{c}$ :: DC : dc, habebimus, $\frac{xx}{u}$ :: du : $\pm dx$, hoc eſt $\frac{du}{u} = \pm \frac{da}{xx}$, quæ æquatio integrata dat ſequentem conſtructionem.

Lineæ Af, MO (Fig. 83.) normaliter ſe interſecent in puncto R. Ipſi Af citra, & ultra punctum R inſiſtant perpendiculares AB, ab æquales longitudini corporis diſtrahendi, & comprimendi, & hinc inde intra aſymptotos jam deſignatas deſcribantur hyperbolæ vulgares BEH, beh tranſeuntes per puncta B, b. Replicentur AB, ab in CD, cd, & diſtractio DE referatur ad potentiam CK, compreſſio vero de ad potentiam ck. Tum ex origine R gemina intelligatur deſcripta logarithmica ſcilicet MKI tranſiens per punctum K, cujus ordinatæ decreſcant, & altera mik tranſiens per punctum k, cujus ordinatæ creſcant: patet, quod ſi chordæ CD ſollicitatæ a pondere CK debetur diſtenſio DE, grave FL agens in eamdem CD, vel FG efficiet diſtentionem GH. Sic ſi potentia ck agens in cylindrum ba, vel de producit compreſſionem de, altera potentia fl gignet compreſſionem gh.

SCHOLIUM I.

Quod caput rei eſt in hoc ſitum puto, abſurdum primo aſpectu videri, quod chordæ AB nulli adhuc diſtractioni obnoxiæ reſpondeat potentia finita AI nullum producens effectum. Ni fallor arcani quid latet in conſtructione, & ipſa geometrica effectio, quod mirum profecto eſt, phyſicam proprietatem nos docet.

Vim

Vim elaſticam intra certos terminos contineri experimentis didicit ſolertiſſimus Graveſandus, quibus & noſtræ conſonant obſervationes. Is igitur ſuorum elementorum lib. 1. cap. 26. ubi agit de legibus elaſticis fibræ, inquit, nullam habent elaſticitatem, niſi certa cum vi tenſæ ſint, ut patet in chordis parum tenſis, & quarum extremitates fixæ ſunt, quæ ſi a ſitu paululum removeantur, ad illum non redeunt. Quiſnam vero ſit gradus tenſionis, a quo elaſticitas inchoetur, experimentis nondum fuit determinatum. Quando nimia cum vi fibra tenditur, elaſticitatem amittit, & neque gradus hic tenſionis notus eſt: illud conſtat, tenſionem fibrarum, quæ elaſticitatem conſtituit, certis limitibus terminari.

Obſervabam ego aurum, quod per exigua foramina veluti netur; & in longum filum extenditur, magnam acquirere elaſticitatem ex partium conſtipatione: at dum igne candeſcit, & rareſcit, ita elaſticitatem amittit, ut quaſi linum illud trahere poſſis, & ducere, atque in tenuiſſimum filum extendere.

Mirum igitur non eſt, ſi noſtra conſtructio pondus AI deſignet; quod quidem chordam diſtrahat, ſed adhuc inertem, & nondum elaſticam. Porro linea AB non exprimit veram, & naturalem funis longitudinem, ſed potius eam, quam acquirere debet, ut elaſticus fieri incipiat, & ut fibris debita rigiditas inducatur, qua valeant ſe reſtituere. Quod dictum eſt de diſtractionibus, dicendum pariter de compreſſionibus.

SCHOLIUM II.

Alterum inconveniens ex noſtra conſtructione ſequi videtur, quod nempe potentiæ finitæ RM conveniat infinita diſtentio; ſed præter id, quod funis nimis diſtentus elaſticitatem amittit; natura ipſa huic difficultati occurrit funem rumpendo, ejuſque fibras a ſe invicem divellendo.

SCHOLIUM. III.

Noſtra æquatio $\frac{du}{u} = \pm \frac{dx}{xx}$. Geometris ignota non eſt. Si enim proponatur determinanda denſitas aeris a ſolo proprio pondere compreſſi in duplici hypotheſi, quod ſcilicet denſitas ſit oneri impoſito proportionalis, & gravitas aeris ſit in ratione reciproca duplicata diſtantiæ a centro telluris, formula noſtra ſatisfacit, ut videre eſt apud Taylorum, & Varignonium. Sed data occaſione de fluidis elaſticis agamus.

PRO-

PROBLEMA SECUNDUM.

Inveſtigare legem compreſſionis in fluidis elaſticis relatam ad potentias comprimentes.

Sint duo tubi vitrei *ab*, AB æquales (Fig. 84), & æqualem aeris quantitatem continentes, qui ut præſcindere poſſimus ab aeris gravitate, diſponantur in ſitu horizontali. Aer AB cogatur a data vi V in ſpatium quodcumque AC, atque aer *ab* a vi majori *u* redigatur in ſpatium minus *ac*. Deinde vires hinc inde infiniteſimæ æquales ſuperadditæ efficiant ulteriores compreſſiones CD, *cd*, quæ ex noſtris principiis, hoc eſt Canone tertio, erunt in ratione compoſita inverſa virium V, *u*, & directa longitudinum CE, *ce*, videlicet $\frac{CE}{V} : \frac{ce}{u} :: DC : dc$, vel

denominando conſtantes $\frac{CE}{V} = a$, $DC = du$, & variabiles $ce = x$;

$dc = -dx$ (creſcente enim potentia arithmetice per infiniteſimam du; quam conſtanti DC æqualem poſſum ſtatuere, ipſa *ce* decreſcit) habebimus $-dx = \frac{xdu}{u}$, quæ æquatio differentialis eſt ad hyperbolam Apollonianam.

Curva itaque intra Aſymptotos *eb*, *eg* deſcripta, & exprimentibus *ch*, *di* potentias comprimentes, abſciſſæ *ce*, *de* deſignabunt ſpatia decreſcentia ab aere ſemper magis compreſſo occupata: ſed denſitas aeris ſub altitudine *ed* ad ejuſdem denſitatem ſub altitudine *ec* ſe habet inverſe, ut *ed*: *ec*, hoc eſt directe ut *di*: *ch*; igitur denſitates aeris ſunt viribus comprimentibus proportionales. Q. E. I.

SCHOLIUM.

Hæc lex vera eſt tam in aere humili, quam ſublimi, ut amicus meus didicit experimentis ſeorſim in utroque inſtitutis. Verum quidem eſt, quod ſi comparentur utriuſque denſitates, ut ab Academicis Pariſienſibus factum lego, huic canoni nullo modo reſpondent: verum ni fallor caloris habenda ratio eſt; conſtat enim aerem telluris ſuperficiei proximum calidiorem eſſe, quam remotum, & montanum, & ex hoc capite magis pro ſua denſitate rareſcere inferiorem, quam ſuperiorem, quod Gallorum obſervationibus optime congruit, & ſancitam legem tot experimentis comprobatam potius confirmat, quam evertit.

Interim illuſtris Newtonus hanc notiſſimam fluidorum elaſticorum affectionem oſtendit, ſupponendo particulas aeris vi aliqua præditas eſſe, qua ſe invicem repellant, & hanc vim decreſcere ſtatuit ea pro-

por-

portione, qua inter eaſdem particulas diſtantia creſcit. Verum noſtra demonſtratio nihil aſſumit, & ex phænomenis, atque principiis virium elaſticarum, quod propoſitum erat deducit.

PROBLEMA TERTIUM.

Invenire proportionem inter vires elaſticas duorum corporum ex diverſa materia confectorum.

Sint geminæ chordæ AB, *ab* ejuſdem longitudinis, & craſſitudinis; quæ materia differant (Fig. 80.) Earum tenacitatem, ſeu vim elaſticam aliter metiri non poſſumus, quam per potentias, quas adhibere oportet, ut prædictæ chordæ aequirant diſtentiones æquales BD, *bd*. Jam ex Lemmate ſecundo eum ſchalæ tenacitatum in hac hypotheſi ſint analogæ ad abſciſſas, facile infertur tempora reſtitutionum eſſe inter ſe in ratione dimidiata directa maſſarum, & inverſa pariter dimidiata potentiarum tendentium: ex quo fit, quod potentiæ tendentes, ſeu ob legem actionum, & retroactionum, reſiſtentiæ, ſeu tenacitates, & elaſticitates chordarum ſervent proportionem compoſitam ex inverſa quadratorum temporum reſtitutionis, & ex directa maſſarum, ſeu ſpecificarum gravitatum. Q. E. I.

SCHOLIUM.

Experimentum facilius ſumitur in corporibus ſimilibus, puta ſphæris. Sit e. g. altera ſphæra vitrea, & altera eburnea, quarum gravitates ſpecificæ *g*, G notæ ſint ex regulis hydroſtatieis. Inveſtigetur ratio diametrorum *a*, A vel circino, vel melius ex ſphærarum ponderibus in aere, & tempora reſtitutionum, ſeu tremitus ex ſonis determinetur. Jam finge ſphæram ex ebore ejusdem diametri cum ſphæra vitrea, hæc ſe reſtituet tempore $\frac{aT}{A}$; nam hujuſmodi tempora in ſphæris ejuſdem materiæ ſunt ut diametri ex doctiſſimi Carrè obſervationibus; igitur vires elaſticæ vitri, & eboris erunt inter ſe, ut $\frac{gaa}{tt}$: $\frac{GAA}{TT}$.

Ex allatis principiis methodo ſynthetica omnia demonſtrari poſſunt, quæ ad vires elaſticas pertinent, ſive agatur de nervorum oſcillationibus, aut de tremitibus corporum ſolidorum, vel de curvatura funium, & laminarum elaſticarum: ſed modo elementa ſolum, & principes proprietates harum virium proſecutus ſum, cætera in aliud tempus rejicio.

ANNOTAZIONE DELL' EDITORE.

I. NEl ſovrappoſto Schediaſma ſuppone il Conte Jacopo, che leggi ſimili diano norma .e alla conſuete vibrazioni delle corde, che oſcillano di traverſo a due ſcannelli appoggiate, e alle vibrazioni delle corde, che oſcillano per lungo, mentre il peſo tendente a vicenda aſcende, o diſcende. La prima ſuppoſizione ne chiama due altre, cioè che le corde ſieno prive di naturale rigidità, e che il peſo ſtirante ſia minimo in relazione alle maſſe delle corde; ammeſſe le quali circoſtanze, oſſerveremo in progreſſo, che da canoni analoghi vengono regolati i due deſcritti generi di vibrazioni. Due rigidità vogliono nelle corde diſtinguerſi: l'una, che chiamiamo naturale, conſiſte in quella ripugnanza, che ha la corda a laſciarſi allungare anche prima, che le venga applicata veruna forza tendente; l'altra, che chiamiamo artificiale, s'eguaglia all'accreſcimento di ripugnanza per eſſere ulteriormente diſteſa, che dalla forza, o peſo tendente nella corda proviene. Le due rigidità ſi poſſono parimente nominare intrinſeca, ed eſtrinſeca; dipendendo quella da cagione interna, cioè a dire dalla ſtruttura della corda, e dallo intralciamento delle ſue fibre, e queſta da cagione eſterna, cioè a dire dalla forza ſtirante. Concioſſiachè ella è conſiderazione anzi geometrica, che fiſica l'aſſumere corde ſolide prive di naturale rigidità, ſtimiamo opportuno, accoſtandoſi più alla Natura, di mettere a computo il detto elemento nella ſoluzione del ſeguente Problema, e di ſupporre altresì finita la proporzione fra le maſſe delle corde, ed i peſi tendenti.

Trovare la proporzione fra gli allungamenti delle corde, ed i peſi o forze, che li producono.

II. Prima di tutto egli è neceſſario di porre in chiaro, quali ſieno quelle forze, o peſi, che producono gli allungamenti nelle corde.

Sia la corda AB (Fig. 55.) teſa del peſo P, con cui ſtia in equilibrio; egli è certo, che per allungarla ſarà d'uopo aggiungere al peſo P un nuovo peſo per eſempio *p*. Si ponga in B un impedimento NO, il quale non permetta, che il punto B della funicella AB poſſa muoverſi da B verſo A, e levato poſcia il peſo P, la corda AB eſercitерà contro l'impedimento NO quello ſteſſo ſforzo, che eſercitava contro del peſo P. Se torneremo ad attaccare alla corda un peſo o minore, o eguale a P, non cagionerà queſto veruna diſtenſione, impiegandoſi tutta la ſua energia o a minorare, o a togliere interamente di mezzo il contraſto dell'impedimento NO colla corda AB, il quale tornato ad appendere alla ſteſſa il peſo P, non ſoſtiene più veruna fatica. Chi vorrà dunque allungare la corda AB, dovrà applicarle un peſo P+*p* maggiore di P, ed il peſo *p* aggiunto al dato P ſarà quello, che produrrà in eſſa la diſtenſione.

III. Di-

III. Dilucidato un tal punto a ſolo fine di evitare gli sbagli, avanziamoci a ricercare l' allungamento inaſſegnabile *dl* operato nella corda qualunque AB, la cui lunghezza L + *l*, dalla forza minima *dp* aggiunta alla forza, o peſo finito P + *p* ſtirante la corda ſteſſa. Avvertaſi, che per L s'intende la lunghezza della corda corriſpondente al peſo conoſciuto P, e per la diſtenſione cagionata dal peſo variabile *p*. Più elementi poſſono influire nel mentovato allungamento, la forza *dp*, la lunghezza della corda AB = L + *l*, il peſo tendente P + *p*, la rigidità naturale *r* della corda, la groſſezza della corda.

CANONE I.

Eſſendo tutti gli altri elementi pari, la diſtenſione *dl* è come la forza minima *dp*, che la genera.

CANONE II.

Eſſendo gli altri elementi dati, la diſtenſione *dl* è come la lunghezza L + *l*, della corda AB.

Vegganſi le dimoſtrazioni di queſti due canoni nello Schediaſma dell' Autore.

CANONE III.

Poſti coſtanti tutti gli altri elementi, e nulla la rigidità naturale della corda, la diſtenſione *dl* è inverſamente come il peſo P + *p* tendente la corda.

Supponendoſi nulla la rigidità naturale della corda, la forza P + *p* s'eguaglia alla rigidità artificiale d'eſſa corda, con cui ſta in equilibrio. Un peſo adunque minimo proporzionale a P + *p* produce un allungamento coſtante, e per conſeguenza, fatto uſo del primo canone, un peſo coſtante *dp* genera un allungamento in ragione inverſa del peſo tendente P + *p*.

CANONE IV.

Poſti tutti gli altri elementi pari, e nullo il peſo tendente la corda, l'allungamento *dl* ſta in ragione reciproca della rigidità naturale *r* della corda.

La dimoſtrazione di queſto canone è affatto ſimile a quella del canone precedente.

CANONE V.

Se due corde non differiſcono, ſalvo che nella rigidità, e nel peſo tendente, la diſtenſione *dl* cagionata dalla ſteſſa forza minima *dp*, è in ragione inverſa della ſomma $r + P + p$ della rigidità, e del peſo tendente, cioè a dire *dl* come $\frac{1}{r + P + p}$. Abbiamo detto della ſomma, e non del prodotto, perchè ſe foſſe *dl* come $\frac{1}{r \cdot P + p}$, s' incontrerebbe nell'aſſurdo, che ſuppoſto uguale a nulla il peſo tendente $P + p$ la diſtenſione *dl* ſi ſcoprirebbe infinita.

Queſto canone non è, che una conſeguenza dei canoni terzo, e quarto aſſieme combinati.

CANONE VI.

Se gli altri elementi tutti ſaranno coſtanti, nulla la naturale rigidità di due corde, ed ineguali ſolamente le baſi, un pari allungamento *dl* verrà prodotto dalla forza minima data *dp*.

Si conſiderino le due corde come faſcj ineguali di funicelle di pari diametro. Il numero delle funicelle d'un faſcio al numero delle funicelle dell'altro faſcio ſtarà come la baſe d'una corda a quella dell'altra. Tanto nel faſcio piccolo, quanto nel grande ſi concepiſcano e il peſo tendente $P + p$, e la forza minima *dp* diviſi in tanto numero di parti eguali, quante ſono le funicelle componenti un faſcio, e ſi ſcoprirà, che a due funicelle a diverſi faſcj appartenenti toccano e peſi tendenti, e forze minime, che ſi corriſpondono in ragione inverſa delle baſi delle corde. Eſſendo dunque nelle dette funicelle le forze minime come i peſi tendenti, combinati i canoni primo, e terzo, ſi troverà coſtante la diſtenſione *dl* in ambe le funicelle. Quello, che s'è detto d'una funicella, ſi può applicare a tutte l'altre componenti la ſteſſa corda, ed indi cavare la conſeguenza, che ſono eguali le diſtenſioni di due corde, la cui rigidità naturale ſia nulla, ed in cui tutti gli altri elementi, a riſerva delle baſi, ſieno comuni. Queſto ſeſto canone s'uniforma col terzo, il quale conſiderate due corde, in cui l'unico elemento variabile ſia il peſo tendente $P + p$ e la rigidità naturale eguale a nulla, ſtabiliſce la diſtenſione *dl* in ragione inverſa del peſo tendente, o ſia come $\frac{1}{P + p}$. Suppoſto coſtante $P + p$, ſi trova pure coſtante l'allungamento *dl*, come vuole il ſeſto canone. Quindi i canoni terzo, e ſeſto s'uniſcono in un ſolo, nè trattandoſi di corde, la cui rigidità naturale ſia nul-

nulla, importa in riguardo alle distensioni considerare l'elemento della varia grossezza,

CANONE VIII.

Essendo costanti tutti gli altri elementi, e nullo il peso tendente; le distensioni di due corde differenti di grossezza serberanno la ragione inversa delle naturali rigidità, e si verificherà essere *dl* come $\frac{1}{r}$.

Avvertasi, che il quarto, ed il settimo canone sono una cosa stessa. Amendue suppongono nullo il peso tendente, e variabile la rigidità: quello vuole la grossezza costante, e questo variabile. Se due corde differentemente grosse saranno della stessa materia, si ritroveranno le rigidità, come le basi, o grossezze, cioè *r* come *g*, ed in virtù della stessa forza minima *dp* ne risulteranno allungamenti in ragione inversa delle grossezze, ch'è quanto dire *dl* come $\frac{1}{g}$.

Paragonate assieme due corde di grossezza, e di materia differente, e posto che la specie *h* esprima la rigidità variabile di corde dello stesso diametro, ne proviene la totale rigidità *r* come *hg*, e *dl* come $\frac{1}{r}$, come $\frac{1}{hg}$.

La dimostrazione del presente canone riesce semplicissima. Se fosse *dp* come *r*, l'allungamento *dl* si scoprirebbe costante; dunque supponendosi *dp* costante, il detto allungamento per il primo canone è come $\frac{1}{r}$, come $\frac{1}{hg}$.

Non si trascuri il corollario, che in riguardo a corde fornite di finita naturale rigidità, l'elemento della varia grossezza serve a determinare la misura d'essa rigidità.

CANONE VIII.

Se gli unici elementi variabili sieno la grossezza, e la rigidità si avrà *dl* come $\frac{1}{P + p + r}$, vale a dire le minime distensioni inversamente come l'aggregato del peso stirante $P + p$, e della rigidità *r*.

Cor-

Questo canone nascente dalla combinazione del sesto, e del settimo, non è che una replica del canone quinto.

IV. I canoni fra loro diversi sono il primo, che vuole dl come dp; il secondo, che vuole dl come $L+l$, il quinto, che vuole dl come $\frac{1}{r+P+p}$. Gli altri tutti s' uniformano con il quinto, usato al più l'artificio di supporre o la rigidità, o il peso tendente eguale a nulla. Combinati per tanto assieme i tre diversi canoni, si trova essere dl come $\frac{L+l \cdot dp}{r+P+p}$, o sia $bdl = \frac{L+l \cdot dp}{r+P+p}$, ch'è quanto a dire le minime distensioni in ragione composta diretta delle lunghezze delle corde, e della forza minima producente esse distensioni, ed inversa della somma della rigidità naturale delle corde, e del peso tendente.

V. Si vuole osservare, che nella stessa corda la rigidità r non è costante; imperciocchè quanto più in vigore dei pesi aggiunti p cresce la lunghezza $L+l$, altrettanto cala la base, a cui è proporzionale la rigidità. Chiamata adunque b la rigidità della corda corrispondente alla lunghezza L, ed al peso stirante P, avremo generalmente $r = \frac{bL}{L+l}$.

La quantità $\frac{L}{L+l}$ è proporzionale alla base variabile della corda, la quale moltiplicata per la lunghezza variabile $L+l$, mi dà il prodotto costante L, indice della massa, che nella corda più, o meno allungata resta sempre la stessa. L'espressione $r = \frac{bL}{L+l}$ s' adatta anche a corde diverse, purchè per b s'intenda quella rigidità, che in esse corde corrisponde alla lunghezza L, ed al peso tendente P amendue dati. Per computare la spezie b, bisogna aver riguardo alla rigidità della materia, onde è formata la corda, ed alla base della stessa corda tesa dal peso P. Le basi si ritrovano esattamente col pesare le corde, e coll'avvertire, ch'esse basi sono proporzionali ai pesi divisi per le lunghezze.

Sostituito nella formula superiormente trovata in cambio di r il suo valore $\frac{bL}{L+l}$, ci si presenterà l' equazione differenziale $bdl = \frac{L+l \cdot dp}{\frac{bL}{L+l}+P+p}$, che generalmente esprime la relazione fra gli allungamenti delle corde, e le forze, o pesi, che li producono.

VI. Si

VI. Si metterà in maggior lume la verità della noſtra formula, avvertendo dedurſi da eſſa il noto canone, che ſe a due corde della ſteſſa materia, pari in lunghezza, differenti di baſe, e teſe da peſi alle baſi proporzionali, genereranno queſti diſtenſioni minime eguali.

Sia L la lunghezza della corda corriſpondente al peſo tendente P, ed aggiunto il peſo minimo dp, ſi avrà l'eſpreſſione. $bdl = \frac{Ldp}{b+P}$. Per le coſe dette nel canone ſettimo la rigidità b di corde della ſteſſa materia, ma di baſe differente è proporzionale alla baſe: ma anche il peſo P ſi vuole proporzionale alla baſe; dunque la ſomma $b+P$ ſta come la baſe, e ſupponendoſi pure come la baſe il peſo aggiunto dp, e coſtante la lunghezza L; ne ſegue, che relativamente alla corde, di cui parliamo, ſi troverà coſtante il prodotto $\frac{Ldp}{b+P}$, e conſeguentemente l'allungamento minimo dl ad eſſo prodotto proporzionale; il che ec.

Egli è da notarſi per altro, che non tutte le materie, che collo ſteſſo nome ſi chiamano, ſono del pari rigide. Tutti gli ottoni per eſempio non ſaranno dotati della ſteſſa rigidità, ed oltre a ciò rendendoſi una corda vie più ſottile, col ſeguitar a paſſare per trafila, la quale ſempre più la coſtipa; paragonate aſſieme due corde della ſteſſa materia una ſottile, e l'altra groſſa, ſi troverà la prima alquanto più rigida di quello porti la proporzione della baſe, ciò che è ſtato da noi confermato colla eſperienza. Nella addotta dimoſtrazione ſi preſcinde da sì fatti elementi.

VII. Col mezzo della formola $bdl = \frac{Ldp}{b+P}$ ſi troverà il tempo, in cui una corda AB ſi vibra per lungo. Si tolga al peſo tendente P una minima porzione f, acciocchè rotto l'equilibrio, la corda ſi metta in oſcillazione. E quì ci dichiariamo di ſupporre, che nello ſteſſo ſtante ſi comincino ad accorciare le fibre tutte componenti la corda, e le più vicine, e le più rimote dal peſo P; il che ſi verificherà almeno ſificamente, trattandoſi di corde, la cui lunghezza ſia moderata. Sia $BF = f$ (Fig. 86.) la forza minima iniziale, che ſollecita al moto il punto eſtremo B della corda AB, e Bb ſia lo ſpazio in fine del quale la forza ſollecitante è nulla. Eguagliandoſi il detto ſpazio alla ſomma degli accorciamenti delle fibre tutte, onde è formata la corda AB; egli è facile da capire, che l'area triangolare bBF pareggia l'intera azione delle forze ſollecitanti. Ora a queſta azione s'eguaglia l'aggregato delle forze vive acquiſtate e dal peſo ſtirante P, e da tutte le menome particole, che compongono la corda, per ritrovare il quale ci ſerviamo del ſeguente artificio. La lunghezza AB (Fig. 87.) della corda rappreſenti la ſua maſſa m, ed iſtituita l'analogia m: P:: AB: BH,

una

una tal linea rappreſenterà la maſſa del peſo P tendente la corda. Le due linee bD, bG normali tra loro, e con l'Ab s'eguaglino alla velocità maſſima u del punto B nel ſito b, e del peſo tendente P, onde ſia $DG = u^2$, ed agevolmente ſi ſcoprirà, che la forza viva del peſo P giunto in b è proporzionale al parallelepipedo $BK = Pu^2$. In riguardo alla forza viva acquiſtata dalla corda AB, ſi compia la piramide ABE, e fatta la rifleſſione, che le velocità maſſime di due particole bB, cC ſtanno fra loro come gli ſpazj traſcorſi nello ſteſſo tempicello, i quali ſerbano la ragione delle diſtanze AB, AC dal punto fiſſo A; deducaſi, che ſe bG eſprime la maſſima velocità della particola bB, la linea cI dinoterà la velocità maſſima della particola cC, ed il quadrato NI, il quadrato d'eſſa velocità. Quindi i due ſolidi bE, cO eſpongono le forze vive delle due fibre bB, cC. Ma da tutti i ſolidi bE, cO cc. dinotanti le forze vive delle corriſpondenti particelle viene formata la piramide $ABE = \frac{mu^2}{3}$; dunque la ſteſſa è proporzionale alla ſomma delle forze vive di tutte le fibre componenti la corda AB.

VIII. Ciò dimoſtrato rifletaſi, che ſe ſi daſſe una corda matematica AB (Fig. 86.) ſollecitata dalla ſcala di forze bBF, teſa dallo ſteſſo peſo P, e in queſto ſolo differente dalla corda fiſica AB, che la ſua maſſa $\frac{m}{3}$ foſſe tutta unita nel punto B, acquiſterebbe eſſa la medeſima forza viva. Eſſendo perciò nell'uno, e nell'altro caſo il punto eſtremo B delle due corde fiſica, e matematica dotato in ſiti analoghi della ſteſſa velocità, e ſcorrendoſi lo ſteſſo ſpazio $B\,b$; egli è evidente, che la corda matematica ſarebbe iſocrona alla fiſica. Trovato per tanto il numero di vibrazioni, che farebbe la corda matematica in un minuto ſecondo, ſi caverà la conſeguenza, che un pari numero di oſcillazioni fa nello ſteſſo tempo la corda fiſica.

IX. Rivolgendoſi alla corda matematica AB, la cui maſſa eguale alla terza parte di quella, onde è fornita la corda fiſica di pari lunghezza L, ſtia tutta concentrata nel punto B; ſupponiamo, che il detto punto ſeguitando dal peſo P ſia giunto nel ſito C, e che indi muova un menomiſſimo paſſo Cc. Si tiri l'ordinata $CD = p$, e denominata $bC = l$, ſarà la infinitesima $Cc = -dl$, e per le note formole ſi avrà

$-pdl = \frac{m}{3} + P \cdot udu$. Ma conforme s'è determinato ſuperiormente,

$bdl = \frac{L\,dp}{b+P}$; dunque fatta la ſoſtituzione,

$\frac{L}{\sqrt{b.h+P}} : -pdp = \frac{\sqrt{m+P}}{3}.udu$; ed integrando;

$f^2-p^2 = \frac{b.\sqrt{h+P}.\sqrt{m+P}.u^2}{3L}$. S' aggiunge la costante f^2; perchè nel

principio del moto, quando la velocità $u=0$, la forza sollecitante s' eguaglia ad f peso minimo detratto dal finito P. E fatta l'estrazione della

radice $\sqrt{f^2-p^2} = \sqrt{\frac{b.\sqrt{h+P}.\sqrt{m+P}}{3}}.u$. Ma $u = -\frac{dl}{dt}$, e

$dl = \frac{Ldp}{b.\sqrt{h+P}}$; dunque $u = \frac{-Ldp}{b.\sqrt{h+P}.dt}$; e per conseguenza eseguita la sostituzione, dopo le debite operazioni,

$$dt = \frac{\sqrt{\frac{L.\sqrt{m+P}}{3}}}{\sqrt{b.\sqrt{h+P}}} \cdot \frac{-dp}{\sqrt{f^2-p^2}};$$

L'integrale di $\frac{-dp}{\sqrt{f^2-p^2}}$; quando il punto B, compiuta una semivibrazione, sia giunto in b; s' eguaglia al quadrante diviso per il raggio, o sia proffimamente alla frazione $\frac{355}{226}$, e perciò integrando,

$t = \frac{\sqrt{\frac{L.\sqrt{m+P}}{3}}}{\sqrt{b.\sqrt{h+B}}} \cdot \frac{355}{226}$, ed il tempo d' una intera vibrazione del

XIII. Torniamo a prender per mano l'equazione differenziale del numero V., cioè $bdl = \frac{\overline{L+l}\,.\,dp}{\frac{bL}{L+l}+P+p}$, da cui generalmente s' esprime la relazione fra gli allungamenti delle corde, e le forze, o pesi, che li producono. Si moltiplichi per $\frac{bL}{L+l}+P+p$, e trasportato un termine da una parte all'altra, mutato il segno, troveremo

$\frac{bbLdl}{L+l} = \overline{L+l}\,.\,dp - P - .\,bdl$. Dividansi tutti i termini per

$\overline{L+l}^{b+1}$, ed avremo $\frac{bbLdl}{\overline{L+l}^{b+2}} = \frac{\overline{L+l}\,.\,dp}{\overline{L+l}^{b+2}} - \frac{\overline{P-p}\,.\,bdl}{\overline{L+l}^{b+2}}$, ed integrando, non omessa l'aggiunta della costante,

$c - \frac{bbL}{\overline{b+1}\,.\,\overline{L+l}^{b+1}} = \frac{P+p}{\overline{L+l}^{b}}$. Si determina il valore della costante c ponendo il peso aggiunto $p=o$, nel qual caso è parimente $l=o$, onde abbiasi $c = \frac{bb}{\overline{b+1}.\,L^b} + \frac{P}{L^b}$. Si sostituisca un tal valore, e si troverà

$\frac{bb}{\overline{b+1}.L^b} + \frac{P}{L^b} - \frac{bbL}{\overline{b+1}\,.\,\overline{L+l}^{b+1}} = \frac{P+p}{\overline{L+l}^{b}}$, o sia moltiplicando per

$\overline{L+l}^{b}$, $\frac{\overline{bb+P}}{\overline{b+1}} . \frac{\overline{L+l}^{b}}{L^b} - \frac{bb}{\overline{b+1}} . \frac{L}{\overline{L+l}} = P+p$; equazione finita esprimente la relazione fra le distensioni l, ed i pesi, o forze p, dai quali vengono cagionate.

XIV.

XIV. Abbiamo promeſſo di provare eſſere il coefficiente $b = 1$. Otterremo ciò, conſiderando le compreſſioni dell'aria, la quale ha la proprietà, che le ſue denſità ſono proporzionali ai peſi comprimenti. Oſſerviamo nell'ultima premeſſa formola, che poſta la rigidità $b = o$, ne riſulta P. $\frac{\overline{L+l}^{b}}{L^{b}} = P+p$, eſpreſſione, da cui ſi deduce, che al peſo tendente $P+p = o$ corriſponderebbe la lunghezza $L+l = o$ della corda, che non foſſe dotata di veruna naturale rigidità.

Paſſando dalle corde, che ſi rendono elaſtiche per via di ſtiramento, a quelle, che divengono elaſtiche per via di compreſſione, ſi cavi la conſeguenza, che levato qualſiſia peſo comprimente ad una corda, o elaſtro, la cui rigidità naturale ſia nulla, ſi dilaterà eſſo infinitamente. Ora ella è tale la proprietà dell'aria, la quale minorandoſi ſempre più il peſo comprimente, è capace d'una indefinita rarefazione. Relativamente dunque all'aria la ſpezie b s'eguaglia a nulla almeno ſiſicamente.

Sia un tubo cilindrico AF (Fig. 88.) ripieno d'aria compreſſa dal peſo P, e ſia la lunghezza AB d'eſſo tubo uguale ad L. Al peſo P aggiungaſi il peſo p, che generi la compreſſione $AC = l$, onde la noſtra corda ſi ſcorti, e ſi riduca alla lunghezza $BC = L-l$. Il peſo comprimente $P+p$ accreſcaſi di nuovo per una fluſſione infinitesima dp, a cui corriſponda la minima compreſſione $Ce = dl$, e fatto uſo degli ſteſſi canoni come nelle corde ſolide, che ſi ſtirano, col ſolo divario, che ſia $b = o$, ſcopriremo $bdl = \frac{\overline{L-l}\,.\,dp}{P+p}$, equazione differenziale eſprimente la relazione fra le compreſſioni dell'aria, ed i peſi, che le producono.

Dividanſi ambi i membri dell'equazione per $L-l$, ed avremo $\frac{bdl}{\overline{L-l}} = \frac{dp}{\overline{P+p}}$, o pure $o = \frac{dp}{\overline{P+p}} - \frac{bdl}{\overline{L-l}}$, ed integrando, preſi i logaritmi nella Logiſtica della ſottotangente 1, log. c = log. $\overline{P+p}^{b}$, log. $\overline{L-l}$, e paſſando dai logaritmi alle quantità ordinarie, $c = \overline{P+p}\,.\,\overline{L-l}^{b}$.

Si ſtabiliſce il valore della coſtante c ponendo $p = o$, nel qual incontro è pure $l = o$, e per conſeguenza $c = P.L^{b}$. Adempiuta la ſoſti-

ſtituzione nell'ultima ſovrappoſta formola, troveremo $P . L^b = \overline{P+p . \overline{L-l}^b}$.

Ora eſſendo, conforme vuol l'eſperienza, le denſità d, D dell'aria come i peſi comprimenti P, $P+p$, e deducendoſi dalla ritrovata equazione l'analogia $P : P+p :: \frac{1}{L^b} : \frac{1}{\overline{L-l}^b}$, avremo $d : D :: \frac{1}{L^b} : \frac{1}{\overline{L-l}^b}$: Ma le denſità, che generalmente ſerbano la ragione compoſta, diretta delle maſſe, ed inverſa dei volumi, nel noſtro caſo, in cui la maſſa è ſempre coſtante, ſono inverſamente come i volumi, ed i volumi dei cilindri FA, FC, che anno comune la baſe, ſono come le lunghezze $BA = L$, $BC = L - l$; dunque $d : D :: \frac{1}{L} : \frac{1}{L-l}$.

Ma abbiamo pure ſcoperto eſſere $d : D :: \frac{1}{L^b} : \frac{1}{\overline{L-l}^b}$; dunque $\frac{1}{L} : \frac{1}{L-l} :: \frac{1}{L^b} : \frac{1}{\overline{L-l}^b}$; e perciò $\overline{L-l}^{b-1} = L^{b-1}$; il che non può mai verificarſi, ſe non poſto $b = 1$.

Se $b = 1$ nelle compreſſioni, deve avere lo ſteſſo valore anche negli ſtiramenti, ſervendo all'une, ed agli altri la ſteſſa formola differenziale $bdl = \frac{\overline{L \mp l} . dp}{\overline{bL + P + p}}$, ed eſſendo la Natura coſtante nelle ſue leggi.

Ciò, come vedremo, viene eſattiſſimamente confermato dalla eſperienza:

XV.

XV. La formula adunque del numero XIII., cioè

$\overline{\frac{bb+P}{b+1}}.\overline{\frac{L+l}{L}}^{b} - \frac{bb}{b+1}.\frac{L}{L+l} = P+p$, ſoſtituita in cambio di b l'u-

nità, ci ſi preſenta ſotto la forma ſeguente

$\overline{\frac{1}{2}b+P}.\overline{\frac{L+l}{L}} - \frac{1}{2}b.\frac{L}{L+l} = P+p$. Nell'aſſe AD (Fig. 89.) ſe-

gniſi $AB = L$, ed indi a ſquadra conducanſi AK, e $BF = P + \frac{1}{2}b$:

Congiunti con una linea, che ſi proroghi indefinitamente, i punti A, F, ſi ſegni B $H = P$, onde reſti $HF = \frac{1}{2}b$, e fra gli aſſintoti AK, AG deſcrivaſi l'iperbola comune *i*CHI, la quale paſſi per il punto H; affermiamo, che poſta l'aſſiſſa $AD = L+l$, ſarà l'ordinata $DI = P+p$, peſo tendente, atto a ridurre la corda alla lunghezza AD.

Per la natura dell' iperbola *i*CHI abbiamo $\frac{FH.AF}{AG} = GI$. Ma ſtante la ſimilitudine dei triangoli ABF, ADG, $\frac{AF}{AG} = \frac{AB}{AD}$; dunque

$\frac{FH.AB}{AD} = GI$, o ſia analiticamente $\frac{\frac{1}{2}bL}{L+l} = GI$, linea eſprimente la

metà della rigidità naturale della corda, mentre il peſo tendente l' ha ridotta alla lunghezza $AD = L+l$. Ad AD infinita corriſponderebbe GI infiniteſima, e minima conſeguentemente ſarebbe in tal incontro la rigidità naturale della corda divenuta infinitamente ſottile. I mentovati triangoli ABF, ADG ci ſuggeriſcono l'analogia.

$$AB : BF :: AD : DG$$

$$L : P+\frac{1}{2}b :: L+l : \overline{\frac{P+\frac{1}{2}b.\overline{L+l}}{L}}$$

da

da cui si deduce il valore di DG. Essendo pertanto

$DG = \frac{\overline{P + \frac{1}{2}b} \cdot \overline{L + l}}{L}$, $GI = \frac{\frac{1}{2}bL}{\overline{L + l}}$, ne risulta

$DI = DG - GI = \frac{\overline{P + \frac{1}{2}b} \cdot \overline{L + l}}{L} - \frac{\frac{1}{2}bL}{\overline{L + l}}$. Ma per la nostra equazione $\frac{\overline{P + \frac{1}{2}b} \cdot \overline{L + l}}{L} - \frac{\frac{1}{2}bL}{\overline{L + l}} = P + p$; dunque presa $AD = L + l$, sarà la corrispondente ordinata $DI = P + p$; il che ec.

XVI. Alla lunghezza della corda $AB = L$ corrisponde per la costruzione il peso dato $BH = P$, e perciò condotta per il punto H la linea mHM parallela ad AD, si scoprirà $MI = p$, peso aggiunto, da cui è stata prodotta la distensione BD.

Nel punto C, in cui si tagliano la linea AD, e l'iperbola iCHI, il peso tendente s'eguaglia a nulla, e per conseguenza AC si è la lunghezza naturale della corda non istirata da peso alcuno. Il doppio della linea CE dinota la rigidità naturale della corda, mentre è nullo il peso tendente. Per ritrovare il valore di $AC = L + l$, si ponga nella nostra formola $P + p = 0$, e fatti i dovuti computi, scopriremo la lunghezza naturale della corda $AC = L + l = L \cdot \sqrt{\frac{b}{b + 2P}}$. In questa circostanza $l = BC$ è quantità negativa $= L \cdot \sqrt{\frac{b}{b + 2P}} - L$, la quale ci manifesta, che levato il peso tendente $BH = P$, la corda si scorta per la porzione BC. La linea CB adunque eguale ad $L - L\sqrt{\frac{b}{b + 2P}}$ misura l'allungamento cagionato dal peso $BH = P$. Si troverà il valore di $CE = \frac{\frac{1}{2}bL}{\overline{L + l}}$, surrogando in vece di $L + l$ la rinvenuta pari grandezza

L

$L\sqrt{\frac{b}{b+2P}}$, onde abbiasi, adempiuti i calcoli neceſſarj

$CE=\frac{\sqrt{b^2+2bP}}{4}$; e conſeguentemente $2CE=\sqrt{b^2+2bP}$, rigidità naturale della corda non iſtirata da peſo alcuno.

Poſta la lunghezza AD infinita, ſarà parimente infinito il peſo tendente DI uguale adequatamente a DG ordinata al triangolo ADG; giacchè in tale ipoteſi è infinitamente picciola l'ordinata GI all'iperbola. Per allungare adunque immenſamente una corda, non ci vuol meno d'un peſo infinito. In fatto però queſto allungamento infinito non ſegue. La tenacità, che connette l'una con l'altra le particole componenti la corda, è finita, e quindi accreſciuto il peſo tendente ſino ad una data miſura, la tenacità reſta ſuperata dalla forza del peſo, e la corda ſi ſpezza. Ha ſperimentato M. Saureur, che una corda d'acciajo ſi rompe, quando è tirata da un peſo, che ſia all'in circa 12000. volte maggiore del peſo di 40. oncie del piede di Parigi di detta corda: che per iſpezzare una corda d'ottone, ci vuol un peſo 9000. volte più grande del peſo di 40. oncie d'eſſa corda: e per rompere una corda di rame, un peſo 5000. volte maggiore del nominato peſo di oncie 40.

XVII. Eſaminata quanto baſta la premeſſa coſtruzione relativamente agli allungamenti della corda AC, reſta che ſi dicano alquante parole di quella porzione di curva da C verſo A, in cui divenendo negativo il peſo tendente, cioè a dire cangiandoſi di ſtirante in premente, ci ſi preſenta agli occhi una legge matematica, ma non fiſica di compreſſioni della corda AC. Per vedere come nelle compreſſioni ſi modifichi la formola del numero XV, il peſo premente $mi=p$ abbia cagionato nella corda $AB=L$ teſa dal peſo $P=dm$ l'accorciamento $Bd=l$, onde alla corda reſti la lunghezza $Ad=L-l$, ed avremo per l'equazione al triangolo ADG $dg=\frac{1}{2}\overline{b+P}\cdot\frac{\overline{L-l}}{L}$, e per l'equazione all'iperbola, $gi=\frac{1}{2}bL$, e conſeguentemente, giacchè $di=mi-md=p-P$, $gi=\frac{\frac{1}{2}bL}{L-l}$

$dg=di=p-P=\frac{\frac{1}{2}bL}{L-l}-\frac{1}{2}\overline{b-P}\cdot\frac{\overline{L-l}}{L}$. Queſta formola tira l'origine

dalla espressione differenziale $dl = \frac{\overline{L-l} \cdot dp}{\frac{hL}{L-l} + P - p}$, la quale suppone, che

la minima compressione dl sia in ragione composta, diretta della forza inassegnabile dp, che la produce, e della lunghezza $L-l$ della corda, ed inversa della differenza $\frac{hL}{L-l} + P - p$ fra la rigidità naturale della corda

$\frac{hL}{L-l}$, ed il peso $p + P = di$, che nella corda AC non istirata da forza alcuna ha cagionata la compressione Cd.

Ora essendo il resto pari, le minime compressioni fisiche stanno in proporzione reciproca della somma, e non della differenza della rigidità, e del peso premente, riuscendo tanto più picciole, quanto è maggiore l'aggregato della rigidità, e del peso, che preme.

Se L sarà la lunghezza d'un cilindro, ed h la rigidità naturale corrispondente a un dato peso premente P, e che inoltre sia $L-l$ la lunghezza, a cui si riduce il cilindro presso dal peso $P+p$, nel quale stato la rigidità naturale s'esprime per $\frac{hL}{L-l}$; si verificherà la seguente formola

differenziale $dl = \frac{\overline{L-l} \cdot dp}{\frac{hL}{L-l} + P + p}$, la quale essendo un dato corpo privo

di qualunque rigidità naturale, si riduce alla qui sottoscritta

$dl = \frac{\overline{L-l} \cdot dp}{P+p}$, ch' è quella stessa da noi ritrovata (numero XIV) relativamente all' aria. La nostra costruzione pertanto non dà la norma alle compressioni fisiche dei corpi.

XVIII. Resta, che la legge delle distensioni delle corde contrassegnata dalla equazione $\frac{1}{2} h + P \cdot \frac{L+l}{L} - \frac{1}{2} hL = P + p$ si confermi

colla esperienza. Dalla premessa formola si deduce essere

$h =$

$$h = \frac{\sqrt{2pL - 2Pl} \cdot \sqrt{L + l}}{\sqrt{2L + l} \cdot l} \qquad (1)$$

$$L + l = \frac{L}{h + 2P} \cdot P + p + \sqrt{P + p^2 + h^2 + 2hP} \qquad (2)$$

Amendue queſte eſpreſſioni verranno a ſeſta per confrontare colla teorica alcuni eſperimenti, che ſiamo per riferire. Furono queſti fatti con ſomma diligenza molti anni fa nella occaſione di eſaminare una legge, che appunto eſſi eſperimenti fecero riconoſcer per falſa. Raccomandata una corda d'ottone al chiodo A (Fig. 90.), il quale era diſtante dallo ſcannello NO oncie $32\frac{1}{2}$ del piede di Parigi, equivalenti a linee 390, s'attaccò primieramente ad eſſa corda il peſo P di libre 2, e ſegnoſſi con inchioſtro il punto B, in cui la corda toccava lo ſcannello NO. S'applicò poſcia alla corda il peſo $P+p$ eguale a libre $2+4=6$, ed oſſervoſſi, che il punto B era diſceſo ſotto dello ſcannello NO linee $1\frac{7}{8}$.

Aggiunto poi al peſo $P=2$ il peſo $p=8$, onde il peſo totale $P+p$ foſſe di libre 10, cagionò eſſo peſo aggiunto 8 la diſtenſione di linee $2\frac{3}{4}$, la quale era doppia di quella prodotta dal peſo aggiunto 4. Nell'equazione ſegnata (1) ſi faccia $L=390$, $P=2$, $l=1\frac{3}{8}$, $p=4$, dati ſomminiſtratici dalla prima eſperienza, e troveremo il valore della rigidità della corda teſa dal peſo $P=2$, cioè a dire $h=1134+\frac{37022}{68761}=1134+\frac{7}{13}$. Dopo ciò nella equazione ſegnata (2) ſi ponga in cambio di h il ritrovato valore $L=390$, $P=2$, $p=8$ peſo aggiunto adoprato nella ſeconda eſperienza, e ſi ſcoprirà l'allungamento generato dal peſo $p=8$, vale a dire $l=2+\frac{3}{4}+\frac{1}{207}$. Avendo coll'eſperienza rinvenuto $l=2+\frac{3}{4}$, giudichi il Lettore, ſe ſi può ſperare maggiore accordo fra il noſtro canone, e l'eſperimento, conſiſtendo tutto il divario in $\frac{1}{207}$ di linea, minuzia totalmente inoſſervabile.

XIX. Merita rifleſſione la rigidità grande delle corde di metallo La rigidità della noſtra corda d'ottone equivale a libre $1134 + \frac{7}{13}$.

La maniera, con cui ſi lavorano le corde ſonore, aumenta moltiſſimo la loro rigidità. Diventano eſſe così ſottili, paſſando innumerabili volte per trafila, che ſempre più le coſtipa, ed irrigidiſce.

L'eſſere la rigidita h aſſai grande in relazione ai peſi adoprati nelle due eſperienze, ſi è il motivo, per cui le diſtenſioni $1 + \frac{3}{8}$, $2 + \frac{2}{4} + \frac{1}{207}$

ſono adequatamente come i peſi aggiunti 4., 8. Fingaſi h infinita, nel qual caſo ſarà infiniteſimo l'allungamento l prodotto dal peſo aggiunto p, che ſi ſuppone finito. Nell' equazione (1) ſi cancellino tutti i termini relativamente nulli, e reſterà $h = \frac{pL}{l}$, e conſeguentemente $l = \frac{Lp}{Lh}$, da cui ſi deduce, che eſſendo $\frac{L}{h}$ quantità coſtante, le diſtenſioni

l ſtanno ſempre come i peſi aggiunti p. Or ecco la ragione, per cui eſſendo la rigidità h aſſai grande in riguardo ai peſi uſati nelle eſperienze, ſi ſieno trovati gli allungamenti nella ſteſſa adequata proporzione dei peſi aggiunti.

SCHEDIASMA XXIV. (*)

Sopra alcune proprietà delle corde elaſtiche.

IN certa opera, che manoſcritta va per le mani degl' Intendenti, un Dotto Matematico, il quale non ſtima per anco bene di eſporſi in pubblico, impugna una mia Propoſizione, che ſi legge nella Diſſertazione intorno la vera miſura delle forze elaſtiche inſerita negli Atti dell' Accademia di Bologna. Ho detto nel Corollario primo del Lemma quarto, che date due funicelle elaſtiche in tutto pari, fuorchè nella lunghezza, per iſtenderle proporzionalmente, di modo che ſoffrano gli ſtiramenti in ragione delle lunghezze, ci vogliono forze tali, che ſerbino fra loro la medeſima proporzione.

Mi

(*) *Queſto Schediaſma, e il ſeguente furono compoſti nell' anno 1734., conforme ſi ricava da una lettera del Co. Giovanni Rizzetti 20. Marzo 1734., dalla riſpoſta del C. J., e da una Scrittura dello ſteſſo Conte Rizzetti.*

Mi ſono ingegnato di addurre nel Lemma ſuddetto una chiara dimoſtrazione: ſebbene queſta verità può prenderſi per un aſſioma. In fatti ſe i due nervi ſi ſuppongono della ſteſſa materia, e della ſteſſa groſſezza, i numeri delle fibre, che li compongono, ſaranno come le lunghezze: ma per iſtendere ugualmente due minime fibre uguali, ſi richiedono forze pari; non eſſendoci ragione, per cui abbia ad impiegarſi maggior forza piuttoſto contro l'una, che contro l'altra; dunque per allungare due aggregati pari di fibre, ci vorranno due aggregati pari di forze: e ſe ſaranno ineguali, come nella noſtra ipoteſi, i numeri delle fibrille, biſognerà moltiplicare le due minime forze uguali, che ſtendono ugualmente due fibre uguali per i predetti numeri, altrimente la forza medeſima, che ſi ſpende contro una ſola fibra, ſarà ſufficiente, reſtando avvalorata non ſi ſa come, a ſtenderne infinite. Perciò le forze totali conſumate contro le due funi ſaranno come le loro lunghezze, o come le loro diſtenſioni.

A queſta maniera di dimoſtrare non ſaprei qual eccezione aveſſe ad opporſi, ſenza diſtruggere da capo a fondo i principj dell' umano diſcorſo. S'io mi ſo a provare, che le forze vive di due corpi moventeſi con pari velocità ſono proporzionali alle maſſe, d'altro raziocinio non poſſo valermi, che d'un ſimiliſſimo al già propoſto, dividendo cioè colla mente ambo i corpi in minimi elementi eguali, ed aſſumendo, che ſia pari la forza viva di due particelle eguali di maſſa, e che camminano con eguale velocità, indi paſſando a concchiudere, che a proporzione della quantità delle parti elementari ſi moltiplica nell'uno, e nell'altro corpo la forza viva. E ſe in queſto caſo l'argomento ſì è bello, e buono, ne c'è chi contraddica; io dimando per qual cagione lo ſteſſo giro di diſcorſo applicato alle noſtre funi prenda faccia di paralogiſmo.

Il mentovato Geometra ſi fa forte ſulla ſperienza, che ci fa vedere, qualmente appeſi due gravi eguali alli punti B, *b* (Fig. 91.) delle due funicelle AB, *ab* pari in tutto il rimanente, ſalvo che nelle lunghezze, dopo eſſere queſti diſceſi, e fatte alquante reciprocazioni di calare abbaſſo, e di ſalire in alto, finalmente ſi fermano nei punti C, *c*, ed in eſſi s' equilibrano colle tenacità delle corde. Quindi ſi è dato a credere, che le diſtenſioni BC, *bc* quantunque ineguali, e proporzionali alle lunghezze AB, *ab* poſſano eſſere prodotte da forze pari vale a dire dall' innata gravità, che riſiede nei due peſi eguali applicati alle due corde. Se la conſeguenza regga, lo vedremo a ſuo luogo e tempo, e frattanto in grazia dell' Oppoſitore daremo di penna a quel celebre aſſioma, che gli effetti prodotti ſono in qualunque incontro proporzionali alle loro cagioni, mentre eſſe in generarli intieramente ſi conſumano; atteſo che ſolamente nel caſo noſtro particolare abbiamo due cauſe uguali, cioè i momenti di due peſi uguali, da cui vengono prodotti effetti ineguali, ed in qualunque ragione, ſiccome certamente lo ſono i due diverſi ſtiramenti BC, *bc*.

Ma non tanto per risponderé alle difficoltà mosse dal mio erudito Avversario, quanto per dilucidare la presente materia, mi metto ad investigare alquante prime originali proprietà delle funi elastiche.

Sia la corda AB nel suo stato naturale, a cui si attacchi nel punto infimo B un dato peso, la massa, e la gravità del quale si esprima per la retta BE: allungherà questo la fune, discendendo per la verticale BCD, prima con moto accelerato da B fino in C, indi per vigore dell'impeto concepito con moto ritardato da C fino in D, dove si ridurrà alla quiete. Prevalendo allora l'energia della corda, che tenta di rimettersi alla sua primitiva dimensione, sarà obbligato il corpo D ad ascendere tirato all'insù contro la sua naturale inclinazione, accelerando il suo moto fra li due termini già segnati D, C, e ritardandolo fra gli altri due C, B. Così continuerebbe a reciprocare all'infinito a guisa d'un pendolo, senza mai fermarsi, se il nervo AB fosse perfettamente elastico, e se il giuoco si facesse in uno spazio vano. Ma perchè la prima condizione non si verifica, e la resistenza dell'aere debilita a poco a poco, e finalmente estingue affatto l'impeto impresso; interverrà, che dopo parecchie oscillazioni si fermi il peso immoto nel punto C, e mantenga stirata la fune per tutto il tratto BC.

Ciò dall'esperienza ci vieno messo sotto gli occhi, ma non è così facile a scoprirsi, come in tale incontro operi la Natura. Fingasi, che il grave D, senza essere sospeso dalla corda, percorra liberamente lo spazio BD sollecitato dalla gravità costante BE: egli è certo per le cose dimostrate dal Galileo, che la scala delle velocità crescenti riferite agli spazj passati sarà la parabola BKL. Ognuno s'accorge, ch'io non metto in conto il contrasto dell'aria, che nel caso nostro appena è assegnabile, e può trascurarsi.

Supponiamo in oltre, che la curva BFH colle sue applicate ci rappresenti le tenacità crescenti della funicella AB. Non occorre presentemente investigar l'indole di questa curva, e ci basti il sapere, che nel vertice B non avendo per anco la corda sofferto stiramento di sorta alcuna, essendo la sua resistenza inassegnabile, la curva nell'apice B con l'asse si congiunge: ma perchè quanto il nervo è più stirato, tanto più le ordinate esprimenti le tenacità vanno aumentandosi; ne siegue, che la curva si discosterebbe all'infinito dall'asse, se le fibre, le quali non anno fra loro una infinita connessione, finalmente non si staccassero, e la corda non si rompesse.

Egli è per tanto manifesto, che crescendo sempre più la lunghezza della fune, mentre non resti spezzata dal peso, può giungere la sua tenacità a pareggiare il momento BE del grave, come accade per cagion d'esempio nel punto C, ed anche a superarlo, come in tutti i punti inferiori.

Posto il peso nel sito B, la sua gravità BE opera senz'alcuna diminuzione, e s'impiega tutta a produrre nella massa D il primo grado di moto: ma giunto che sia al punto O, dall'azione costante della gravi-

vità MO fa di meſtieri ſottrarre la reazione NO dell'elaſtro; così che la forza della gravità in due ſi divide: una parte NO ſe ne ſpende contro la tenacità della fune, e l'altra ſovrabbondante MN in accelerare il moto del corpo D, che diſcende.

Pervenuto il peſo al punto C, eſſendo ivi pari l'azione della gravità, e la reazione della corda, eſpreſſe entrambe dall' ordinata FC, la celerità d' eſſo mobile nè accreſciuta nè diminuita lo fa traſcorrere uno ſpazio infinitesimo con moto equabile. Nei punti poſcia più baſſi, come nel ſito R, la tenacità PR dell'elaſtro ſupera la gravità coſtante QR, e ſuccede, ch'eſſendo maggiore la reſiſtenza ritardante della forza accelerante, una porzione, vale a dire PQ, ſe ne ſpende a diſtruggere l'impeto impreſſo, che il grave diſcendendo s' aveva acquiſtato, ſinattantochè viene totalmente eſtinto nel punto D dalle innumerabili reſiſtenze creſcenti, delle quali è ſcala il trilineo FHG.

Non è difficile a concepirſi, qualmente dopo la diſceſa ſegua l'aſcendimento della palla D; concioſſiachè coſtituita queſta in ripoſo nel ſuogo D, viene ſpinta abbaſſo dalla forza più debole DG, e tirata all'insù dalla più gagliarda DH, con cui la corda procura di reſtituirſi. La porzione dunque HG purgata da ogni contraſto di reazione contraria è quella, che principia a comunicare il moto alla ſfera verſo B, il quale viene accelerato per tutto il tratto DC dalle ſollecitazioni eſpoſte dalle ordinate PQ ec. che tutte inſieme formano l'area FHG. Ma l'impeto acquiſtato viene poi eſtenuato dalle iterate azioni della gravità, che fra li punti C, B è ſempre maggiore della forza, per cui la fune ſi accorcia; di modo che preſcindendo dall' imperfezione dell'elaſtro, e dalla reſiſtenza dell'aria, rimonterebbe il globo ſino al punto B, ed ivi ſi troverebbe di bel nuovo poſto in quiete, per tornar a diſcendere, e continuare all'infinito le reciprocazioni.

Io giudico, che la materia, ſu cui verſiamo, ſia oltre ogni credere delicata, e perpleſſa; laonde chi non iſta bene attento cade facilmente in qualche equivocazione. Andrò dimoſtrando alcuni Teoremi, che ſerviranno a liberarci dai pregiudizj.

TEOREMA I.

Pervenuto che ſia il peſo B al ſito D, dove ceſſata la diſceſa comincia eſſo a diſporſi alla ſalita; io dico, che il rettangolo BEGD è preciſamente uguale all'area BFHD.

La gravità coſtante BE con impreſſioni uniformi accompagna il globo B per tutto lo ſpazio BD, e perciò la ſomma di tutte queſte ſollecitazioni ci viene rappreſentata dal predetto rettangolo BG: ma nella maſſa B ridotta allo ſtato di quiete nel punto D non ſi ravviſa alcun effetto cagionato dal cumolo delle mentovate impreſſioni; dunque egli è d'uopo che ſieno ſtate diſtrutte dalle replicate reſiſtenze, con cui vi ſi ha oppoſto la tenacità della fune. Frattanto le reſiſtenze creſcenti ci vengono eſpoſte dalle ordinate della curva BFH, e la loro

ſom-

ſomma dall' area della curva medeſima; per la qual coſa eſſendo l'aggregato delle azioni eguale, e contrario all'aggregato delle reazioni, ſi raccoglie, che il rettangolo BEGD è uguale all'area BFHD. lo che ec.

Facendo uſo del computo per confermare l'addotta verità, pongaſi la gravità coſtante BE $= g$, la tenacità variabile della corda $= t$, gli ſpazj creſcenti BO, BD $= s$, le loro fluſſioni $= ds$, le velocità del globo per eſempio in O, ed R $= u$, e le loro differenze du. Per i noti canoni delle forze continuamente applicate avremo $gds - tds = mudu$, e ſommando $gs - \int tds = \frac{mu^2}{2}$: ma nel punto D per l'ipoteſi è la velocità $u = o$; dunque $gs = \int tds$. In queſto mentre eſſendo nel caſo noſtro $s =$ BD, col prodotto gs ſi eſprime il rettangolo BG; e coll' integrale $\int tds$ la intiera area BFHD; per ciò ſono fra loro eguali le due menzionate ſuperfizie.

COROLLARIO I.

Saranno ſimilmente uguali i due trilinei BEF, FHG; laonde rappreſentandoci il primo la ſcala di tutte quelle forze derivate dalla gravità coſtante, che libere dalle reſiſtenze accelerano il globo B per lo ſpazio BC, ed il ſecondo la ſcala delle ſollecitazioni negative, ch'eſtinguono l'impeto concepito, s'inferiſca, che l'aggregato delle impreſſioni, per cui ſi comunica ad un mobile una data celerità, come CI, è uguale alla ſomma di tutti gl'impulſi contrarj, da'quali eſſa velocità reſta diſtrutta.

COROLLARIO II.

Fingaſi, che il grave ſia diſceſo per lo ſpazio BO, in tal caſo dal rettangolo BM ſi rappreſenta la ſomma di tutte le impreſſioni uniformi partecipate dalla gravità, dalle quali ſottratte le reſiſtenze, che ſono tutte contenute nel trilineo BNO, reſta il trapezio miſto BEMN; che ci dinota l'aggregato di tutte quelle ſollecitazioni, dalle quali viene accelerato il globo B per il tratto BO; così che il quadrato della velocità OS acquiſtata nel punto O, ſi trova eſſere in data ragione all'area BEMN.

Similmente il quadrato della celerità, da cui reſta affetto il mobile nel punto R fra li due termini C, e D, è in data proporzione alla differenza, che paſſa fra i due trilinei BEF, FPQ, cioè a dire all'area del miſtilineo QPHG.

CO-

COROLLARIO III.

Le forze morte ſollecitanti il peſo B per l'abſciſſa BC purgate dalle reſiſtenze ſono contenute nel trilineo BEF, ed operano in maniera tale, come ſe la ſuddetta maſſa B piombando liberamente nel vano, veniſſe ſucceſſivamente accelerata dalla ſteſſa ſcala d'impreſſioni, mentre nell'uno, e nell'altro caſo, dopo traſcorſi eguali ſpazj ſi troverebbe aſſetta dalla medeſima velocità.

COROLLARIO IV.

La curva, che colle ſue applicate ci mette ſotto gli occhi le velocità del grave B, il quale cala abbaſſo per lo ſpazio FD, è una ſpezie d'elliſſoide BID. La celerità, che nel punto B è nulla, vaſſi aumentando ſino al punto C, a cui corriſponde la maſſima CI. Quindi di mano in mano ſi fa minore, ſino a ridurſi a nulla nel punto D. E ſi noti, che la medeſima curva, la quale ſerve per la diſceſa, preſe le abſciſſe al roveſcio principiando dal punto D, ci rappreſenta altresì le velocità acquiſtate nella ſalita.

TEOREMA II.

Prendaſi per mano un'altra ſimicella più corta *ab*, che dalla prima AB non ſia differente in conto alcuno, ſalvo che nella diverſa lunghezza; io dico, che per iſtirare ambe eſſe corde proporzionatamente, così che ſieno le diſtenſioni BC, *bc* in ragione delle lunghezze AB, *ab*, ci vogliono ſomme tali di forze morte, che ſerbino fra loro la medeſima proporzione.

Col premeſſo giro di diſcorſo proverò, che la diſtenſione *bc* equivale a tutti gl'impulſi della gravità contenuti nel trilineo *bnfe*: ma queſto all'altro BNFE ſta come *bc*: BC, o come *ab*: AB, conforme ho dimoſtrato altrove; dunque per avere gli ſtiramenti *bc*, BC proporzionali alle lunghezze delle corde, ſi richiedono aggregati tali di forze ſollecitanti, che ſieno nella ſteſſa ragione: il che ec.

COROLLARIO I.

La diſtenſione BC non dipende dalla velocità CI, da cui ſi trova animato il grave B nel punto C; ma bensì da quella forza, che avrebbe aggiunta al mobile B la celerità IK, quand'eſſo foſſe liberamente diſceſo, e ch'è ſtata conſumata contro la tenacità della ſune, appunto per ciò, che allo ſteſſo grave non è ſtata comunicata. La coſa mi ſembra evidente; imperciocchè ſe la gravità coſtante BE non foſſe ſtata impedita, accelerando il globo B per lo ſpazio verticale BC, avrebbe

in esso certamente impressa la celerità CK, il cui quadrato si trova proporzionale al rettangolo BEFC: ma realmente nel punto C il peso non cammina, salvo che colla velocità CI, il cui quadrato sta in data ragione al trilineo BNFE; dunque la restante azione della gravità esposta dall'area BNFC, o dalla differenza fra i due quadrati CI, CK s'è consumata nello stiramento della corda elastica.

COROLLARIO II.

Stando il grave immoto sospeso nel punto C, allora si fa l'equilibrio tra la tenacità della corda, ed il peso B, venendo ambe queste forze morte esposte per la medesima ordinata CF. Ogni qual volta la fune liberata dal grave B principia a restituirsi, altra forza nel primo istante non può impiegarsi, fuorchè la morta CF: ma con eguale forza morta il corpo B viene stimolato alla discesa; dunque niuna di queste potenze prevalerà; non essendoci motivo, per cui prevaglia piuttosto l'una che l'altra. Il lodato Signore tira una precipitosa conseguenza, ed è, che alla forza morta del peso B non avvalorata in conto alcuno dal moto debba attribuirsi il totale effetto dello stiramento BC; quasi che la gravità non abbia operato in tutti i punti di mezzo per esempio in O, in cui ci ha spesa una parte del suo vigore espresso per ON.

COROLLARIO III.

S'aggiunge inconveniente ad inconveniente; atteschè malamente dal mio riverito Avversario si confondono le forze vive, e le morte, e l'energia della percossa coll'azione semplice della gravità. E' manifesto, che senza moto non può mai allungarsi la corda AB; dunque per far l'effetto ci vuole una forza viva, o sia una morta nel caso nostro variabile infinite volte replicata: e se così è, come mai può paragonarsi questa forza con una sola sollecitazione del grave B, la quale si sà essere infinitamente più picciola, esprimendosi la prima per l'area BNFC, e la seconda per un elemento infinitesimo dell'area stessa?

SCOLIO.

Per maggiormente dilucidare la materia, e toglier di mezzo ogni ambiguità, dispongo le predette funi AB, *ab* (Fig. 92.) in sito parallelo all'Orizzonte, colla condizione, che i punti A, *a* sieno fermamente raccomandati a due chiodi, e gli altri B, *b* siano liberi. Alla estremità *b* della più corta *ab* attacco il corpo (*m*) animato dalla velocità (*a*), il quale camminando per un piano orizzontale perfettamente liscio, impieghi tutta la sua forza impressa in distendere la corda fino al punto *c*, ove pervenuto si ritrovi in quiete.

E' cosa manifesta, che giunta a tal termine la massa (*m*), quella forza viva, che in essa risiedeva, s'è intieramente consumata nello stiramento; e perciò se l'azione è uguale alla reazione, e la causa producente all'effetto prodotto; deesi conchiudere, che tutte le resistenze della funicella sieno equivalenti all'energia del corpo (*m*), la quale da esse viene successivamente per così dire assorbita.

Ed in fatti la corda *ab* col rimettersi in virtù della sua molla, restituisce alla palla (*m*) ritornata in *b* la sua primiera velocità, di maniera che nel primo caso la massa in moto fa la figura di cagione agente, e la tenacità di effetto resistente; e nel secondo l'azione sta dalla parte della fune elastica, e la reazione dalla parte della massa (*m*), che cangiando stato passa dalla quiete al moto.

Ora se per allungare proporzionatamente amendue i nervi, anno ad impiegarsi forze uguali, conforme l'opinione, che da me si combatte, basterà applicare al punto estremo B della corda più lunga AB la stessa massa (*m*) fornita della medesima velocità (*a*), onde per questo mezzo s'ottenga la distensione BC proporzionale alla maggiore lunghezza AB. Che ciò possa mai succedere, io per me nol credo, nè mi persuado, che il mio dotto Avversario sel creda.

Descritte le due scale delle tenacità crescenti *bnf*, BNF anno esse la proprietà, che partite l'absciisse *bc*, BC in data ragione nei punti analoghi *o*, O, sieno eguali le ordinate *on*, ON, le quali ci rappresentano tanto le tenacità delle corde nei siti *o*, O, quanto i pesi, che ci vogliono per mantenerle stirate, e far sì, che non comincino a ricuperare le loro primiere dimensioni.

Ricorriamo in questo mentre alle comuni formole da tutti i Geometri ricevute, ed avremo per una parte $-rds = mudu$, e per l'altra $-RdS = MVDV$, e sommando, non ommessa l'aggiunta della costante, $c - \int rds = \frac{mu^2}{2}$, $C - \int RDS = \frac{MV^2}{2}$: ma nei punti *b*, B le due quantità integrali $\int rds$, $\int RdS$ si trovano $= o$, e di più $u = a$ ed $V = A$; dunque le costanti, che nella doppia integrazione debbono aggiungersi, sono $c = \frac{ma^2}{2}$, e $C = \frac{MA^2}{2}$. All'incontro essendo per l'ipotesi ambe le velocità *u*, V affatto estinte nei punti *c*, C ci si presenteranno due altre equazioni $ma^2 = 2\int rds$; $MA^2 = 2\int RdS$: e giacchè $r = R$, e come *bc*: BC, o come *ab*: AB, così *ds*: *dS*; avrà luogo anche il seguente analogismo *ab*: AB:: ma^2: MA^2.

Quindi per fare, che le funi *ab*, AB ſoffrano le diſtenſioni *bc*, BC proporzionali alle loro lunghezze, preſe ad arbitrio le maſſe (*m*), (M), debbono ad eſſe comunicarſi velocità tali (*a*), (A), che i prodotti (ma^2) (MA^2) ſieno fra loro in ragione delle lunghezze medeſime. Ciò ſuppoſto, chi mi contende, che per avere i diviſati effetti non poſſa io mettere in opera due maſſe, le quali ſi riſpondano in proporzione di *ab*: AB? ed in tal caſo farà di meſtieri, che le menzionate maſſe vengano animate da pari celerità, onde ſia $a = A$. Appreſſo è coſa manifeſta, che le forze vive di due corpi, i quali camminano con eguali velocità, ſono proporzionali alle maſſe; dunque reſta evidentemente conchiuſo, che per allungare proporzionatamente le noſtre due corde, ſi richiedono due forze vive, che fra loro ſi corriſpondano in ragione delle lunghezze.

Aſſunte poi eguali le maſſe (*m*) (M), egli è d'uopo per le premeſſe formule, che ſi rinvengano in proporzione delle lunghezze *ab*, AB, non già le velocità ſemplici (*a*), (A), ma bensì i loro quadrati (a^2) (A^2). Frattanto le forze vive, che debbono adattarſi alle corde, ſi ſono già dimoſtrate almeno in un caſo particolare proporzionali alle predette lunghezze; dunque generalmente, ed in tutti gl'incontri eſſe forze vive ſi trovano eſſere in ragione compoſta ſempliee delle maſſe, e duplicata delle velocità, o come i quadrati delle celerità, ſe ſono uguali le maſſe.

Sarebbe una ſpezie di paradoſſo, che per ottenere i medeſimi effetti, aveſſero ad applicarſi forze tali, che ſerbaſſero ora una proporzione, ed ora un altra; quaſi che la reazione d'un nervo elaſtico, che ſempre perſevera la ſteſſa, doveſſe ſtare in guardia, e diſcernere da qual ſorta di forza ad un pari ſtiramento viene ridotta, per opporſi ſecondo le regole dei Carteſiani una volta con maggiore, e l'altra con minore contraſto.

SCHEDIASMA XXV.

Confutazione dell' ipoteſi, che due corpi dotati di eguali quantità di moto urtando in due corde del tutto eguali le ripieghino per eguali ſaette.

Sieno due funi elaſtiche *fg*, FG (Fig. 93.) della ſteſſa materia di pari lunghezza, e groſſezza, ed ugualmente ſtirate, ſopra le quali cadano le palle *a*, A da ſublimità tali *ab*, AB, che giunte in *b*, B abbiano acquiſtata una pari quantità di moto; onde le maſſe *a*, A ſi riſpondano in proporzione inverſa delle velocità in *b*, B, ch'io chiamerò *u*, U. Fingaſi, che dall'azione d'eſſe sfere ſi pieghino le corde ugualmente, e dopo eſtinto da una parte, e dall'altra tutto il moto, ſi riducano alle poſiture ſimili, ed uguali *fdg*, FDG: ſi proponga d'inveſtigare, quali concluſioni naſcano dalla premeſſa ipoteſi.

I.

1. Siano pervenuti i due globi alli punti c, C; così che si dia uguaglianza fra le saette bc, BC: parmi cosa chiara, ch'essi avranno perdute quantità di moto, per produrre i restanti effetti uguali, e far passare le corde delle distensioni uguali fcg, FCG alle maggiori, ma uguali fdg, FDC. In fatti se le predette funicelle fossero disposte in sito orizzontale, e ridotte alle lunghezze pari fcg, FCG, per incurvarle quanto portano le saette uguali cd, CD, farebbe d'uopo giusta la nostra ipotesi, che fossero investite dalle palle a, A, in cui risiedessero quantità di moto minori bensì delle prime, ma però eguali.

2. Quindi ne siegue, che chiamate nu, mU le velocità residue in c, C, avremo $anu = AmU$: ma $au = AU$; dunque $n = m$, e conseguentemente le velocità costanti nu, nU come le primitive u, U.

3. Seguitino ad operare i nostri globi per gli spazj uguali, ed infinitesimi ce, CE, ed essendo le velocità restanti ne' punti e, E (n°. 2°.) in proporzione costante, cioè $nu - ndu : nU - ndU :: u : U$; dunque posti eguali, ed ugualmente distanti dalli punti b, B gli elementi ce, CE delle absciſſe, avremo le fluſſioni negative delle ordinate alle curve delle velocità decrescenti in data ragione di $u : U$.

4. I tempi impiegati dalle sfere a, A in istendere ugualmente le due funi sono direttamente come le masse a, A. Nel camminare che fanno le palle per gli spazj uguali, ed elementari ce, CE ci spendano i tempi minimi dt, dT, i quali sono in ragione composta, diretta degli spazj ce, CE, ed inversa delle velocità nu, nU, da cui restano affette le masse ne' punti c, C: ma le masse, che sono per l'ipotesi in proporzione reciproca delle celerità primitive u, U, si trovano essere altresì nella medesima ragione (n°. 2°.) colle residue nu, nU; dunque $a : A :: dt : dT :: Ndt : NdT$: la qual analogia verificandosi sempre, sia N numero finito, o infinito (perchè un pari numero d'elementi uguali ce, CE si contiene tanto in bd, quanto in BD) ne siegue, che siccome $a : A :: t : T$.

5. In questo mentre le resistenze r, R; che si oppongono al moto dei globi nei punti e, C moltiplicate respettivamente ne' tempi elementari mentovati dt, dT, che si spendono in percorrere gli spazj minimi, ed uguali ce, CE, sono per i principj del Galileo eguali alle fluſſioni delle quantità del moto, che per una parte, e per l'altra si perdono dalle due sfere, nel ridurre le corde dagli stiramenti uguali fcg, FCG agli altri eguali feg, FEG; dunque $rdt = -andu$, ed $RdT = -AndU$, cioè $rdt : RT :: andu : AndU$: ma $dt : dT :: a : A$ (n. 4), ed $ndu : ndU :: u : U :: \frac{1}{a} : \frac{1}{A}$ (n. 3.); dunque $ra : RA :: au : AU :: 1 : 1$, ed in conseguenza $r : R :: u : U :: \frac{1}{a} : \frac{1}{A}$.

6. Nella ipotesi pertanto, che da me si va esaminando, non solamente le resistenze delle due corde ridotte alle distensioni pari fcg, FCG

FCG non ſarebbono uguali, ſiccome vuole la ragione; non ſapendoſi aſſegnare il perchè l'una ſia dell'altra maggiore; ma quello ch'è peggio, ſi potrebbono fiſſare in qualunque ragione, che più ci piaceſſe d'eleggere. In fatto potendo io aſſumere le maſſe in qualſivoglia proporzione ad arbitrio, e non oſtante ciò laſciarle cadere da tali altezze, che comincino ad agire contro ambo le corde con una quantità di moto coſtante, ed $= au$, o ſia AU; accaderà, che in differenti ſuppoſizioni le reſiſtenze r, R ſi riſponderanno con relazioni affatto diverſe; tutto che le diſtenſioni ſieno pari: non già perchè ſi mutino le forze, alle quali le noſtre funi fanno contraſto, ma perchè ſtando ferme le medeſime forze, ſi vanno cangiando le maſſe, e le velocità.

7. E ſe così è, le quantità del moto eguali au, AU non producono effetti pari conſumandoſi intieramente. Sarebbono queſti uguali, ogni qual volta l'aggregato di tutte le reſiſtenze della corda fg foſſe uguale all'aggregato di tutte le reſiſtenze dell'altra corda FG: ma preſi ad arbitrio i due punti c, C corriſpondenti alle ſaette uguali bc, BC, e lo ſteſſo dicaſi di tutti gli altri, la reſiſtenza della prima in c a quella della ſeconda in C ſta come $\frac{1}{a} : \frac{1}{A}$ (n. 5.); dunque tutte le reſiſtenze della prima a tutte della ſeconda ſono nella ſteſſa ragione di $\frac{1}{a} : \frac{1}{A}$;

ed eſſendo per la ſuppoſizione a minore di A; il cumulo delle reſiſtenze della ſune fg è maggiore del cumulo delle reſiſtenze della ſune FG; dunque la forza della palla a, che ſupera un maggior contraſto, è più grande di quella dell'altra palla A, con che ſi diſtrugge totalmente l'ipoteſi.

8. Ma quando s'abbia l'egualità $au^a = AU^a$ giuſta il canone Leibniziano, non s'incontrano aſſurdi. In queſta ſentenza le velocità reſtanti in c, C ſono in ragion inverſa dimidiata delle maſſe, cioè $nu : nU :: ndu : ndU :: \frac{1}{\sqrt{a}} : \frac{1}{\sqrt{A}}$, i tempi del moto per eguali ſpazj ce, CE in ragione ſubduplicata delle maſſe medeſime $dt : dT :: t : T :: \sqrt{a} : \sqrt{A}$, e finalmente nell'equazioni $rdt = -andu$, $RdT = -AndU$, o ſia nell'analogiſmo $rdt : RdT :: adu : AdU$, ſurrogati i valori già trovati, $r\sqrt{a} : R\sqrt{A} :: \frac{a}{\sqrt{a}} : \frac{A}{\sqrt{A}}$, cioè $r : R :: \frac{a}{a} : \frac{A}{A}$. In ordine a ciò ſi ſcoprono uguali le reſiſtenze r, R, come eſſer debbono.

9. In poche parole dimoſtro per altra ſtrada il principio Leibniziano. Giacchè le due reſiſtenze uguali in c, C moltiplicate nelle differenze uguali degli ſpazj ce, CE ſono per il canone noto uguali ai momenti delle velocità, ch'io chiamerò x, y, dalle quali reſtano affette

le

le palle *a*, A ne' punti *c*, C; moltiplicati essi momenti per le masse corrispondenti, avremo $rdS = -axdx$, ed $RdS = -Aydy$, ed integrando non ommessa l'aggiunta delle necessarie costanti, $\int rds = p - \frac{axx}{2}$;

$\int RdS = P - \frac{Ayy}{2}$: ma nei punti *b*, B, mentre le saette *s* sono $= o$, le velocità residue x, y non sono diverse dalle primitive *u*, U; Regolate pertanto le due formule, sarà $\int rds = \frac{au^2}{2} - \frac{ax^2}{2}$,

$\int Rds = \frac{AUU}{2} - \frac{Ayy}{2}$: ma nel fine del moto, vale a dire ne' punti *d*, D, sono le velocità variabili x, ed y ambe $= o$; dunque in tale circostanza, dappoichè s'è consumata nel produrre l'effetto tutta l'energia di ciascuna palla, avrassi $\int rds = \frac{auu}{2}$, $\int Rds = \frac{AUU}{2}$: ma

$\int rds = \int Rds$ per l'uguaglianza, che passa fra gli aggregati delle resistenze *r*, R; dunque $auu = AUU$, conforme richiede la regola del Leibnizio.

SCHEDIASMA XXVI. (*)

Della proporzione, che passa fra le affezioni sensibili, e la forza degli obbietti esterni, da cui vengono prodotte.

CHi si sarebbe mai dato a credere poter le scienze Matematiche poggiar tant'alto, che giungano fino a misurare le interne sensazioni della nostr'Anima? Ma se si rifletterà trovarsi in queste il più, ed il meno, e restar conseguentemente abbracciate dall'idea generale della quantità; si scoprirà, che con profitto può la Geomtria applicarci le sue figure, e l'Analisi i suoi canoni.

Pri-

(*) *Questo Schediasma assieme coll'Annotazione del Sig. Ab. Co. Girolamo Lioni uscì alle stampe l'anno 1722. nel primo Tomo de' Supplementi al Giornale de' Letterati d'Italia.*

Prima di tutto mi pongo a conſiderare una delle noſtre fibre deſtinate dalla Natura a ricevere le impreſſioni delle coſe eſterne; e perchè è ſtata diſpoſta, e collocata in maniera, che di traverſo, ed in tutti i punti di ſua lunghezza viene preſſa, e ſollecitata da forze aſſolute uguali, dovrà inarcarſi, e piegarſi in una curva del genere dell'elaſtiche. Il dottiſſimo Ingleſe Taylor parlando delle corde ſonore, che percoſſe tremano, ed oſcillano, è preſo il penſiero d'inveſtigare l'indole, e le proprietà: ſupponendoſi però, che ſia inaſſegnabile il maſſimo allontanamento della corda dall'aſſe del moto, di modo che non ſi muti la forza della tenſione con accreſcere la lunghezza del nervo teſo, rieſce la ſua ſoluzione talmente limitata, e riſtretta, che mal può adattarſi al noſtro diſegno.

Nella materia, ſu cui pretendo di verſare, ſono, s'io non m'inganno, ſuperflue queſte analitiche ſottigliezze, mentre per una parte ci fanno entrare in un laberinto di computi, e per l'altra la curva cercata, ſenza l'ajuto di qualche arbitraria limitazione, è difficiliſſima a determinarſi. Siami dunque conceſſo il battere la ſtrada più piana, e procedere con una Geometrica ſemplicità. In fatti le fibre de' noſtri organi non ſono elleno fiſicamente minime? e quando ſono obbligate dall'azione degli obbietti eſterni a cangiarſi di rette in curve, non è forſe ugualmente impercettibile la differenza, che paſſa tra l'arco della curva, e le due toccanti, che lo ſtringono, e con ſecò ſi confondono? Ora ſe la piccola fibra AB (Fig. 94.) ricevendo in ogni ſuo punto le impreſſioni della forza agente, viene aſtretta a prendere proſſimamente la figura infleſſa ADB; lo ſteſſo effetto potrebbe produrſi da un impulſo determinato, che tutto raccolto nel mezzo, contro il ſolo punto C eſercitaſſe la ſua azione.

S'eſprima queſta forza per la retta DH, e prolungata la metà della fibra BD verſo I, ſi tiri la retta HI parallela all'altra metà DA; onde ſi formi il triangolo iſoſcele DIH, dal cui vertice I ſi laſci cadere ſopra la DH la perpendicolare IG. Quindi dal centro B all'intervallo BC ſi deſcriva l'arco di cerchio CE, il di cui ſeno retto ſia CF normale alla ſecante BD.

Fatta queſta preparazione, egli è certo, che la forza rappreſentata per la retta DH ſi riſolve nelle due forze collaterali DI, IH, la prima delle quali tirando la metà BE della fibra con la direzione BDI cagiona la diſtenſione ED, e la ſeconda, eſſendo parallela all'altra metà AL, produce con pari forza la diſtrazione uguale LD. Ora per abbracciare ſotto una ſola formula tutti i caſi, è noto in primo luogo, che teſe due fibre in tutto eguali, fuorchè nella lunghezza, da potenze uguali, le diſtenſioni ſaranno come le lunghezze. 2. Che ſtirate ugualmente due fibre pari in lunghezza, ma di diverſo diametro, le forze applicate ſaranno in ragion duplicata de' diametri ſteſſi. 3. Che teſe due fibre perfettamente uguali ſecondo la direzione delle fibre medeſime da due potenze differenti, non c'è noto con qual legge riſpondano le forze alle diſtenſioni; onde ſi dovrebbe ſupporre con una ge-

ne-

nerale espressione la distensione data per una funzione indeterminata della potenza. Ma perchè in qualunque modo l'accennata relazione si esprima, cioè per le absciſſe, e per le ordinate di qualsivoglia curva, almeno, quando le distensioni saranno minime, la proporzione nascente della curva locale non sarà sensibilmente diversa dalla sua tangente; ne segue, che per le conseguenze fisiche da dedursi in progresso, cioè per il prossimo, se non per l'esatto, potremo valerci dell' ipotesi semplicissima, che le distensioni serbino sempre la ragione delle potenze.

Se ne può addurre in prova l'esperienza delle corde sonore, le quali battute o leggiermente, o con violenza, appena mutano tuono: segno manifesto, che tutte le loro oscillazioni si fanno in tempo eguale; essendo proposizione notissima, e già dimostrata, che l'isocronismo intanto può aver luogo, in quanto si verifica il canone, che le forze tendenti sieno proporzionali alle distensioni. Se dunque negli stromenti da suono s'ammette la legge come vera, ed un orecchio musico fra le massime, e minime vibrazioni di una stessa corda a gran pena può discernere la differenza d'un coma; non so vedere, perchè abbia a rigettarsi, quando si tratta delle sensazioni dipendenti dalle distrazioni delle nostre fibre, che quanto sono più piccole, tanto meno dall'addotta legge si discostano.

Premesso ciò, combinando insieme le mentovate proporzioni nelle fibre della stessa materia, le distensioni saranno in ragion composta, diretta delle potenze tendenti, e delle lunghezze, e reciproca delle grossezze. Nel caso dunque nostro la distrazione DE sarà come il prodotto ID. CB diviso per la grossezza della fibra, che io chiamerò g: ed essendo che l'angolo CBD si suppone minimo, l'intercetta DE si trova uguale al seno verso EF, com'è facile a dimostrarsi; dunque DE, o pure DF doppia di DE sarà come la quantità $\frac{ID \cdot BC}{g}$: ma stante la similitudine de' triangoli IDG, CDF, avremo ID : DG :: CD : DF, la qual' analogia ci darà l' equazione $\frac{ID \cdot DF}{CD} = DG$, o surrogata in cambio della ID la grandezza equivalente $\frac{g \cdot DF}{BC}$, sarà DG come $\frac{g\,DF^2}{CD \cdot BC}$ ma il rettangolo BDF è sempre uguale al quadrato della saetta DC, cosichè BD. DF, o per essere DE minima, CB. DF $=$ CD^2; dunque sostituiti opportunamente i valori, $\frac{gDC^3}{CB^3}$ come DG, o pure DH: ed

in conſeguenza la potenza ID, o la diſtenſione DE come la quantità

$\frac{DH^{\frac{2}{3}} \cdot CB}{\frac{2}{83}}$, il che ec.

Limitando l'eſpreſſione alla ſola corda, o fibra AB infleſſa dalla potenza DH ſuppoſta variabile, troveremo eſſere la faetta CD, come la radice quadrata della forza relativa ID, o della diſtenſione DE, o pure come la radice cubica della forza aſſoluta DH, e conſeguentemente il quadrato DH come il cubo ID, o ſia DE. Se ci foſſe frattanto chi bramaſſe una formula più rigoroſa, e preciſa, ſebbene meno elegante, per le diſtenſioni della ſteſſa fibra; proceda col ſeguente metodo, che agevolmente può eſtenderſi a tutti i caſi, e renderſi univerſale. Ponga DI $= x$, IG $= z$, DG $= y$, e CB $= a$ unità, e ſtabilita la diſtenſione DE $= u$ data in qualſivoglia modo per la forza DI. o ſia x applicata direttamente, oſſervi, che per la ſimilitudine de' due triangoli DIG, DBC ſi verificherà la ſeguente analogia DI, x. IG, z:: DB, $a + u$: BC, a; dunque $\frac{ax}{a+u} = z$, ovvero $\frac{xx}{\frac{}{a+u}^2} = zz = xx - yy$, e conſeguentemente $yy = xx - \frac{xx}{\frac{}{a+u}^2} = \frac{2uxx + uuxx}{a + 2u + uu}$, il che ec.

Si noti, che ſupponendoſi minima la u = DE, ſvaniranno nell'omogeneo di comparazione della noſtra equazione i ſeguenti termini, cioè nel numeratore il termine $uuxx$, ch'è infinitamente minore dell'altro $2ux^2$, e nel denominatore i due membri $2u$, uu, che comparati colla quantità coſtante a ſono inaſſegnabili. Reſterà pertanto yy ad uxx in data proporzione, e adottando l'ipoteſi, che le diſtenſioni u ſieno come le forze x, avremo y^2; ax^3 in ragione coſtante, come nella prima formula.

L'eſperienza s'accorda proſſimamente, e quanto baſta col noſtro canone; imperocchè avendo io teſa con forza orizzontalmente una breve corda di metallo, e legatala ſtrettamente a due punti immobili, adattai al punto di mezzo un grave pendente da un ſottiliſſimo filo, che piegaſſe la corda, e formaſſe la faetta non maggiore d'un dito; per ottenere una faetta doppia, era d'uopo, che ci applicaſſi un peſo otto volte più grande.

Dalla formula ritrovata, quantunque ſempliciſſima, m'ingegnerò di dedurre alcune verità importanti per la Fiſica, che riuſciranno forſe nuove, ed inaſpettate. Primo bramerei pure d'introdurre nella ſcienza

delle

coſe naturali un gran principio; che mi verrà facilmente ammeſſo da quelli, che ſi ſono preſi il penſiero d'unir la Fiſica alla Geometria; e conſiſte in ciò, che la Natura, o per dir meglio, il ſuo ſapientiſſimo Autore fa ſempre tutto ciò, che ſta ben fatto, e che atteſe le circoſtanze, far meglio non ſi potrebbe: dal qual aſſioma, che ſi vede meſſo in pratica in quel poco, che con l'ajuto delle Matematiche potiamo capire intorno il mirabile meccaniſmo delle coſe naturali, e che ſi dee giudicare aver luogo anche in quel molto, per non dirlo infinito, che ſupera la noſtra capacità; io tiro una evidente dimoſtrazione dell'eſiſtenza d'una mente infinita, che tutto opera, e tutto diſpone, contro la greggia de' ſeguaci d'Epicuro, e di Stratone.

Applicando al noſtro caſo il principio, era di neceſſità, che l'Anima unita al corpo, e col ſuo mezzo a tutto il mondo materiale, veniſſe ammonita di tutto ciò, che ſi fa al di fuori, e formaſſe almeno un giudizio confuſo delle impreſſioni più fiacche, e più robuſte, che paſſano a lei per lo canale de' ſenſi. Il criterio non poteva eſſere eſquiſitamente diſtinto, perchè non c'è vera proporzione fra l'eſterne operazioni degli obbietti, e gl'interni ſentimenti della mente. Negli obbietti non c'è, che materia, forza, e moto; negli organi, che tenſione, e reſiſtenza; nell'anima poi tutto è affezione, tutto ſenſo, tutto coſcienza, che ſi chiama, ſecondo la varietà de' membri del noſtro corpo, che ne ricevono l'impreſſione, o luce, o ſuono, o dolore, o che ſo io, come prima d'ognuno, ed anche dello ſteſſo Carteſio, ha notato nel ſuo Saggiatore l'incomparabile Galileo. Non oſtante ciò le noſtre ſenſazioni, quantunque d'una ſfera ſuperiore ai ſintomi della materia, doveano da queſti prender norma, e creſcere, o ſminuirſi a miſura non già della maggiore, o minore attività degli oggetti, ma bensì dell'impreſſione più debole, o più forte, che ſi riceve negli organi. Queſto canone debbe ammetterſi per incontraſtabile in ogni ſiſtema, tanto nell'antico, e comune, quanto ne' moderni delle cagioni occaſionali, o dell'armonia preſtabilita; mentre quand'aveſſe luogo una diverſa proporzione, la legge, con cui ſi lega l'anima al corpo, ſarebbe affatto arbitraria, e nulla avrebbe che fare il ſenſo col ſenſorio.

Ed in vero eſſendo le fibre de' noſtri ſenſi un non ſo che di mezzo fra gl'impulſi eſterni, e le interne affezioni, ed eſſendo ugualmente eſpoſte all'azione degli obbietti fiacchi, e vigoroſi, ſe veniſſero o compreſſe, o ſtirate direttamente, di modo che le ſenſazioni corriſpondeſſero in proporzione all'energia degli agenti eſtrinſeci; accaderebbe, che la Natura o le avrebbe formate molli, delicate, e capaci di riſentirſi ad ogni debole impreſſione, ed in tal caſo non avrebbero potuto reggere agli urti gagliardi; o pure lavorandole robuſte, e forti ſarebbono ſtate inſenſibili a' tocchi più languidi.

Venendo poi deſtinate all'uno, ed all'altro uffizio, come richiedevaſi alla noſtra conſervazione, ed alla noſtra maggior perfezione, era neceſſario, che la Natura le diſponeſſe in maniera, che riceveſſero non direttamente, ma di traverſo gl'impulſi degli oggetti; onde ſtabilì

prima un giuſto equilibrio tra l'impeto eſterno, e la reſiſtenza interna del ſenſorio, in virtù del canone generaliſſimo delle forze compoſte, quanto più foſſe vigoroſo l'agente, altrettanto nell' applicare obbliquamente la ſua azione perdeſſe di vigore, e quanto foſſe più fiacco, altrettanto a proporzione della propria forza operaſſe con maggiore energia.

E quì ſi noti per togliere di mezzo ogni ambiguità, che mentre non ſi adatti la forza eſterna a ſtirare direttamente le fibre, come talvolta può ſuccedere, la ſua virtù dall'applicazione obbliqua viene ſempre avvalorata; eſſendo in ogni incontro le due forze laterali DI, IH maggiori della Diagonale DH, a cui ſi vanno ſempre più accoſtando, quanto eſſa va più creſcendo, ſenza però mai poterſi pervenire ad una perfetta egualità, ſe non in caſo, che la forza DH diventaſſe infinita, e la fibra foſſe per impoſſibile capace d' una infinita diſtrazione. La maggior parte dunque degli obbietti farebbono poca impreſſione ne' noſtri ſenſi, ſe non veniſſe accreſciuta la loro azione, con le leggi però, e dentro i limiti, che ſi anderanno ſpiegando.

Per mettere in tutto il ſuo lume la verità, ſi replichi la fibra AB in *ab* (Fig. 94., 95.), e fingaſi, che dalla forza *db* minore di DH, venga piegata fino in *d*; onde abbiaſi la nuova ſaetta *cd*, e la diſtenſione *de*. Fatta la preparazione come ſopra, dalla reſoluzione della forza *db* riſulterà la forza *id*, che tirando direttamente la ſemifibra *be*, cagionerà la diſtenſione *ed*. Quindi eſſendo la tangente *cd* minore di CD, ſarà l'angolo *cdl*, o l'oppoſto al vertice *idg*, maggiore del corriſpondente CDB, o pure IDG. Facciaſi l'angolo *kdg* uguale all'altro IDG, e per la ſimilitudine de' due triangoli rettangoli IDG *kdg* avraſſi l'analogia *kd* : *dg* :: ID : DG, ed in conſeguenza DG: *dg*, o ſia DH: *dh* avrà maggior proporzione di ID: *id*, oppure di De : *de*. La forza pertanto minore *dh*, che ſi riſolve nelle due laterali *id*, *ih*, operando con la forza *id*, cagiona a proporzione maggior diſtrazione nella mezza fibra *be*, di quello faccia la forza più grande DH, che agiſce con la forza ID contro la metà della fibra uguale BE.

Preſa di bel nuovo per mano la noſtra generale eſpreſſione, ſia DH : *dh* :: 8: 1, e ſarà ID: *id* :: DE: *de* :: 4: 1, di modo che fiſſate le forze degli oggetti in proporzione ottupla, le ſenſazioni ſi corriſpondranno in ragione quadrupla, e chi voleſſe una ſenſazione ottupla dell'altra biſognerebbe, che la virtù dell' oggetto più forte foſſe ventidue volte maggiore di quella del più debole.

2. Con un ſolo artificio però non ottiene la Natura un ſol fine; ma molti, ed ugualmente mirabili. Avendo ella eſpoſte obbliquamente le noſtre fibre all' azione degli oggetti, che ſono fuori di noi, ottiene, che non ſolamente raffrena la gagliardìa de' più robuſti, ma acuiſce la debolezza de' più fiacchi, e fa che ſi ſenta, per dir così, l' inſenſibile.

Si danno alcuni ſuoni, o per favellare eſattamente, certi tremori dell'aere così languidi, che nelle noſtre orecchie non producono ſuono. Si danno certe preſſioni dell' etere, o certi tocchi di luce tanto delicati, che nel fondo de' noſtri occhi non formano ſenſo di luce; e la ragione sì è, perchè la ſollecitazone delle fibre è sì fattamente minima, che rieſce totalmente impercettibile. La Natura però ha corretto il diſordine, ſe non quanto vorrebbe la noſtra curioſità, almeno quanto richiede la noſtra conſervazione; e ſe certi impulſi deboli non ſi diſtinguono, ſegno è, che non ponno recare a noi nè profitto, nè nocumento. Frattanto i noſtri ſenſi ricevono perfezione da ciò, che le loro fibrille vengono di traverſo ſpinte, e percoſſe. Supponiamo, che la diſtenſione d'una fibra non ſi renda ſenſibile, ſe non allora quando arriva ad eſſere, per eſempio, una parte determinata di tutta la ſua lunghezza, e collocata la fibra *ab* nel ſito verticale VX. (fig. 95., 96.), la diſtenſione XY, che ſi finge la più picciola fra le ſenſibili, ſia effetto della potenza YZ, che tira direttamente. Egli è certo per l' ipoteſi, che ſminuita la forza YZ, ſuccederebbe bensì qualche diſtrazione, ma della linea delle impercettibili: ſicchè dunque tutti gli agenti men vigoroſi non ſarebbero ſoggetti alla giuriſdizione del noſtro ſenſorio. Che ſe la fibra ſi trova orizzontalmente diſpoſta in *ab*, o in qualſivoglia altra poſitura, di modo che ſia voltata verſo l'oggetto, viene in tal caſo a dilatarſi la sfera del ſenſibile, ed una impreſſione molto più debole della già determinata YZ, acquiſtando forza, giugne a farſi ſentire. Si applichi alla ſuddetta fibra *ab* la potenza *dh*, che formi la diſtenſione *de* uguale alla metà di XY, ed avremo *id* uguale a YZ, e per la ſimilitudine de' due triangoli *idg*, *bdc*, come *bd*: *dc* così *id* : *dg*, o pure *id* = YZ *dh*:: *bd* : 2*dc*; così che ſuppoſte le due fibre *ab*, UX ugualmente ſtirate, ſaranno le potenze YZ, *dh* in ragione della ſecante *bd* alla doppia tangente *dc*.

S'intenda *ab*, o UX diviſa in parti 200., e ſia XY = *ed* + *dl* = 2 (ipoteſi, in cui s'aſſume farſi allora la minima delle ſenſazioni, quando la fibra creſce per la centeſima parte della ſua lunghezza) la tangente *dc* ſarà proſſimamente diece; dunque YZ : *dh* : : 100. : 20 : dal che ſi deduce, che ſe per fare una impreſſione ſenſibile nella fibra verticale VX vi ſi richiede la forza YZ, baſterà una ſola quinta parte di eſſa nell'eſempio addotto per diſtendere ugualmente una fibra ſituata di traverſo, e per produrre una ſenſazione.

3. Non debbo tralaſciare un'altra curioſa oſſervazione. Supponiamo, che la minima diſtrazione d'una fibrella, di cui potiamo eſſere conſapevoli, di modo che ſarebbe a noi totalmente inſenſibile, ſe foſſe più picciola, s'eſprima con l'unità; e ſupponiamo in oltre, che ad una diſtenſione centupla non poſſa la fibra ſenza ſuo nocumento reſiſtere: egli è chiaro, che fra la minima, e la maſſima ſenſazione della medeſima ſpezie paſſerà la proporzione come cento ad uno. Se le ſenſazioni riſpondeſſero eſattamente alla forza degli obbietti, ne ſeguirebbe, che nell'addotta ipoteſi tutto il ſenſibile reſterebbe riſtretto fra

que-

queſti due limiti cento, ed unità. La Natura però non rinchiude fra così anguſti termini la ſfera delle coſe ſenſibili; imperocchè eſſendo le diſtrazioni delle fibre, e conſeguentemente le ſenſazioni come le radici cubiche de' quadrati delle forze eſtrinſeche, accaderà, che limitate le ſenſazioni, per eſempio come uno a cento, s'amplierà la linea del ſenſibile come uno a mille. Quindi eſperimentiamo, che il noſtro udito ſi riſente ad un leggier ſibilo, e tollera i rimbombi de' tuoni, e delle bombarde; e la noſtra viſta ſenſibile ad un barlume rifleſſo, ſopporta ſenza ſuo danno la luce d'un grand' incendio, nè ſi dà per vinta, ſe non allo sfrenato ſplendore del Sole.

4. Io non voglio internarmi a quiſtionare coſa ſia quella moleſta ſenſazione, che dolore s'appella, e che fu definita ottimamente dal grande Sant'Agoſtino *compaſſio mentis ex corpore, & in corpore*. Conſiſta pure o nella ſoluzione del continuo, o nel moto diſordinato degli ſpiriti animali, o nel violento ſtiramento delle fibre; egli è manifeſto, che quando gli organi dalla forza d'un'agente troppo gagliardo mal ſi difendono, e teſi oltre il dovere o ſi rompono, o corrono riſchio di romperſi, ſi ſente certamente il dolore. E' manifeſto altresì, ſecondo l'opinione dell'ingegnoſiſſimo Borelli, che i ſughi ſpiritoſi dimoranti nel midollo de' nervi ponno facilmente eſſere irritati, in quanto agitati da un moto perturbato, ed irregolare ſi portano a ſcuotere con diſordine le fibre delicatiſſime del cervello, onde naſce la paſſione convulſiva, cui diamo nome di dolore. Comunque vada la faccenda, io dico, che la Natura ha procurato di riſparmiarci al poſſibile un ſentimento, quanto neceſſario alla noſtra conſervazione, perchè ci ammoniſce di ciò, che ſuggir ſi debbe; altrettanto moleſto, perchè non potiamo ſottrarci ad un male, ſenza ſperimentarne un'altro. Ha fatto ciò col metter freno agli oggetti oltre modo robuſti, e col diminuire la loro energia, alle noſtre fibre obbliquamente applicandoli.

Ripigliando l'ipoteſi altre volte fatta, il vigore eſterno può creſcere dall'unità ſino al mille ſenza nocumento dell'organo, in cui le diſtenſioni creſcono con altra legge dall'unità ſino al cento, e quando queſte creſceſſero a proporzione degli agenti eſterni, una forza poco più maggiore della centupla ſarebbe ſufficiente a guaſtare, ed a rendere inutile il ſenſorio.

5. Con le dottrine premeſſe rendo facilmente ragione d'alcuni fenomeni naturali. Uſciti noi di notte tempo da una camera ben illuminata all'aria poco meno che oſcura, e tenebroſa, reſtiamo per qualche ſpazio privi dell'uſo della viſta, finattanto che l'occhio aſſuefatto a quel debole barlume ritorna a far'il ſuo uffizio, ed a diſtinguer gli obbietti. Dagli Ottici ſe ne aſcrive comunemente la cauſa alla variazione del diametro della pupilla, che in paſſando dalla luce più forte ad una più debole, vaſſi a poco a poco dilatando. La ragione è buona, ma non la giudico ſufficiente. Direi di vantaggio, che durando l'impulſo del lume maggiore, di cui s'era imbevuto l'occhio, e per cui nelle fibre della retina s'era fatta una certa diſtenſione; prima che

que-

queſta ſi reſtituiſca interamente, il barlume languido della notte non fa impreſſione ſenſibile. Si può confermare il detto con una ſperienza rapportata dal Signor della Hire il Giovine, ed accennata in ſimil propoſito anche dal Sig. Abate Girolamo Lioni nella vita di Monſignor del Torre pag. 65. 66. Introdotto queſti di giorno in una camera oſcura, in cui conſervava un barometro luminoſo, nello ſcuoterlo, ch'egli fece, non vide lume di ſorta alcuna, e ſoſpettò, che l'effetto aveſſe ſolamente a ſuccedere di notte; ma ſermatoſi per qualche ſpazio di tempo nella camera, e ſollecitato di bel nuovo lo ſtromento, vide a comparire il conſueto chiarore, e conchiuſe, che l'impreſſione della luce diurna, che rimoſſo l'oggetto ſi mantiene nell'organo, era ſtata la cagione, per cui non avea da principio potuto diſtinguere la luce languidiſſima, che ſi genera da bilanciamenti dell'argento vivo, e forma un delicatiſſimo Foſforo.

Sieno per eſempio due luci in ragione come uno ad otto: quando agiſcano ſeparatamente, le ſenſazioni, che per la noſtra regola ſaranno come uno a quattro, corriſponderanno fra loro con una proporzione ſenſibile. Uniſcanſi le predette due luci, e ſi faccia un lume come nove, la ſenſazione, che ne riſulterà, ſarà ella maggiore delle due come tredici a dodeci proſſimamente, ed appena l'una dall'altra potrà diſtinguerſi.

Per lo motivo addotto ſuccede, che ſvaniſca agli occhi noſtri il lume d'una face alla preſenza del Sole; che ingombrata l'orecchia da un grave rimbombo non s'odano i ſuoni fievoli; che reſo ſtupido un membro, ſenta meno il dolore. Accade all'oppoſto, che la mano troppo riſcaldata giudica fredde le coſe tepide, ed intirizzata dal freddo ſente con rincreſcimento un calor blando; a' quali fenomeni altri ſe ne potrebbono aggiugnere, che col mezzo degli accennati principj felicemente ſi ſpiegano.

6. Ne' Fanciulli le fibre ſono più picciole, e più molli. Per quello riguarda la grandezza, ſe foſſero proporzionali alla mole del corpo, ed in conſeguenza ſimili a quelle degli uomini, richiamata a memoria la noſtra formula $\frac{g\,DC^3}{CB^3} : DH$ (Fig. 94.) ſarebbe g come CB^3 cioè la groſſezza come il quadrato della lunghezza: e perchè la forza DH ſta come la ſezione delle fibre medeſime, o come il rettangolo della lunghezza nel diametro della fibra; ſtante che a miſura di queſte due dimenſioni ricevono l'impreſſione dagli oggetti eſterni, avremo ſempre $DC^3 : CB . DH :: DC^3 . CB^3$, o pure $DC^2 : CB^2$ in ragione coſtante: ma $DC^2 = BC . DF$; dunque coſtante altresì ſarà la proporzione di DF, o DE a BC; laonde le diſtenſioni ſaranno come le lunghezze. Per queſto capo dunque le ſenſazioni d'un Fanciullo non ſaranno differenti da quelle d'un uomo: ma fatta la rifleſſione eſſere le fibre d'un Fanciullo più delicate, e più capaci di diſtenſione, ed oltre di ciò, che il capo con tutti i ſuoi organi, a proporzione dell'altre membra, è più grande ne' giovanetti che negli adulti; ſi conchiuderà, che

ſe

le ſenſazioni de' fanciulli ſono più vive di quelle degli uomini: anzi negli uomini ſteſſi in quella guiſa, che di rado ſi trovano due volti affatto ſimili, ſi dee credere, che per lo più le loro fibre ſieno di differente ſtruttura, e che ognuno abbia, al pari della Fiſonomia, le ſue particolari ſenſazioni. Io ne ho in me medeſimo la prova, mentre la Natura mi ha poſto in fronte due occhi diſſimili, come altre volte ha fatto col celebre Pietro Gaſſendo; il deſtro de' quali è ben conformato, e perfetto, ed il ſiniſtro vizioſo, e presbita. Con queſto vedo gli oggetti non ſolo più rimoti, più piccioli, e manco diſtinti, ma di più la luce ſteſſa, il che fa a noſtro propoſito, mi compariſce alquanto più ſmorta, ed i colori più languidi, e più diluti. Correggo ad arbitrio il difetto della grandezza, e della confuſione con l'uſo d'una lente conveſſa; ma per queſto nè la luce ſi fa più viva, nè il colore più florido, indizio manifeſto eſſerci fra le fibre dell'uno, e dell'altro occhio una diverſità organica.

7. In paſſando dalla gioventù alla vecchiaja, le fibre non ſi mutano di grandezza, acquiſtano però una certa rigidezza, che le rende meno atte alla diſtenſione. La rigidità di due fibre per altro eguali in mole, ed in gravità ſpecifica, o la loro reſiſtenza ad eſſer diſtratte, altronde non può miſurarſi, che dalla forza, cui ſi richiede per produrre in eſſa una pari diſtrazione.

Sia per tanto AB (Fig. 94., 97.) la fibra d'un uomo giovane, e quella d'un vecchio egualmente lunga, groſſa, e peſante, ma più indurata, e meno fleſſibile. S'adatti ad ambe la ſteſſa potenza DH, e ſi pieghi la prima ſino in D, e la ſeconda ſino in Q; onde ſia la ſaetta CD maggiore della ſaetta OQ, e la diſtenſione DE maggiore della diſtenſione QP. Vada creſcendo la forza DH applicata alla fibra MN ſino a diventare RT; di modo che ſi facciano eguali le ſaette RO, DC, e le diſtrazioni RS, DE. Suppoſta la ſolita preparazione, eſſendo ſimili due triangoli iſoſceli DIH, RUT, avremo l'analogia TR: HD:: VR: ID, vale a dire come le forze aſſolute, così le collaterali direttamente applicate a ſtendere ambedue le fibre; dunque come le potenze TR, HD, così la rigidezza delle fibre medeſime: ma come il quadrato della potenza TR al quadrato della potenza HD, così il cubo della diſtenſione RS = DE al cubo della diſtenſione QP; dunque ſupponendo, che gli oggetti eſterni agiſcano contro le fibre AB, MN con egual forza, come la rigidità della fibra MN a quella della fibra AB, così reciprocamente DE. $\sqrt{DE}$: QP. $\sqrt{QP}$, cioè i quadrati della rigidità faranno in proporzione inverſa de' cubi delle diſtenſioni.

Le durezze pertanto delle fibre, o la loro reſiſtenza alla diſtrazione ricreſcono con una legge, e le diſtenſioni e le ſenſazioni decreſcono con un' altra; così che più aumentano le rigidità di quello calano le ſenſazioni, e con un mirabile artifizio della Natura meno ſi perde nel ſenſo, che nel ſenſorio. Il ſenſo de' vecchi ſi fa di giorno in giorno più ottuſo, ma non quanto richiederebbe la rigidezza delle lor fibre, che ſebbene s'indurano, non laſciano però d' eſſere più ſenſibili di quello ſi converrebbe

be alla lor durezza. Se faremo poi oſſervazione, per quello particolarmente riguarda il ſenſo della viſta, che gli occhi de' vecchi diventan presbiti, onde gli oggetti appariſcono minori in vecchiezza, che in gioventù, e che parimente le impreſſioni della luce, e de' colori, a cauſa dell'induramento delle fibre, ſi fan più languide; termineremo queſta Fiſico-Matematica ricerca con una rifleſſione morale, ed è, che invecchiando noi, il mondo ſenſibile ſi va per noi ſucceſſivamente, ed inſenſibilmente perdendo.

ANNOTAZIONE

Del Sig. Abate Conte

GIROLAMO LIONI.

IL Sig. Conte Jacopo Riccati nella ſua diſſertazione della proporzione, che paſſa fra le affezioni ſenſibili, e la forza degli obbietti, accennò aver notato l'incomparabile Galileo nel ſuo Saggiatore avanti il Carteſio, che negli obbietti v'è ſolo materia, forza, e moto, e che le affezioni ſenſibili riſeggono nell'anima con vario nome di luce, di ſuono, ec., ſecondo la varietà de' membri del noſtro corpo, che ne ricevono l'impreſſione. In prova dunque d'una tale verità, ed acciocchè alcuno non creda doverſi al Carteſio, come pur troppo è invalſo, la lode di aver tirata la prima linea in una tale ſpeculazione, più preciſamente diciamo averci chiaramente il detto Galileo nel Libro di ſopra riferito inſegnato, che i Sapori, Odori, Colori ec. per la parte del ſoggetto, nel quale par, che riſeggano, non ſono altro, che puri nomi, ma tengono lor reſidenza ſolamente nel corpo ſenſitivo; ſicchè rimoſſo l'animale, ſieno levate, ed annichilate tutte queſte qualità. E' così mirabile in via di metodo la ſpiegazione, che fa l'Autore del ſuo concetto, che ſi poſſono riſcaldare (come ſi ſuol dire) queſte vivande, e ſperare, che riſcaldate conferiſcano più che mai allo ſtomaco de' Filoſofi.

Comincia egli da un'affezione, la quale per eſſere la più materiale, ſi può dire, che ſi tocca con le mani. Muove la ſua deſtra ora ſopra una ſtatua di marmo, ora ſopra un uomo vivo: dipoi oſſerva, che eſſendo l'azione riſpetto alla mano la medeſima ſopra l'uno, e ſopra l'altro ſoggetto, ſe l'affezione foſſe della mano, eſſa ſarebbe all'uno e all'altro comune. Ma perchè vede ſtar ferma la ſtatua, e riſentirſi a quel toccamento l'uomo, conchiude eſſere l'affezione tutta dell'uomo, e niente della mano.

Da queſta ſenſazione più materiale paſſa ad un'altra un poco più delicata. Con la mano va leggermente toccando un uomo vivo ora in una parte del corpo, ora in un'altra. Oſſervando, poi che l'uomo toc-

co in alcune parti del corpo ſente ſolo il comun toccamento, e tocco in alcune altre, per eſempio ſotto le aſcelle, ſente un' altra affezione chiamata ſolletico, la diſcorre così. Se oltre il moto aveſſe la mano in ſe un'altra facoltà, cioè il ſolleticare, ſi ſentirebbe queſta affezione in qualunque parte del corpo ſi moveſſe la mano. Ma perchè ſi ſente il ſolletico in una parte, e non ſi ſente nell'altra, ne ricava la medeſima conchiuſione di prima.

Seguitando poi ſempre a paſſare dal più materiale al più delicato, una penna, dic' egli, leggermente fregata ſopra il noſtro corpo, fa quanto a ſe da per tutto la medeſima operazione; e pure in noi toccando ſotto le narici eccita una titillazione quaſi intollerabile, ed in altra parte appena ſi fa ſentire. Onde rinnovato l'argomento, conchiude eſſere quella titillazione tutta di noi, e non della penna.

Dall'eſempio del noſtro Autore potiamo dunque imparare il vero metodo di filoſofare. Ci fa egli prima toccar con le mani, che è tutta ne' corpi animati l'affezione chiamata tatto, indi paſſando ſempre dal più ſemplice al più compoſto, s'avvicina a poco a poco, e quaſi per gradi a' ſenſi più delicati. Il tatto (ſeguita egli) fatto dalla ſolidità della materia, par, che abbia riguardo all' elemento della Terra. E perchè alcuni corpi di queſta ſi vanno continuamente riſolvendo in particelle minime, delle quali altre, come più gravi dell'aria, ſcendono al baſſo, ed altre più leggeri ſalgono all'alto, di quì naſcono due altri ſenſi; mentre quelle vanno a ferire due parti del corpo aſſai più ſenſitive della pelle, che non ſente l'incurſioni di materie così ſottili. Que' minimi dunque, che ſcendono, ricevuti ſopra la parte ſuperiore della lingua arrecano i ſapori, gli altri, che aſcendono, entrando per le narici vanno a ferire certe mammillule, che fanno ſentire gli odori. E ben ſi veggono providamente diſpoſti, quanto al ſito, la lingua, ed i canali del naſo; quella diſteſa di ſotto per ricevere l'incurſioni, che ſcendono; e queſti accomodati per quelle, che ſalgono. Da queſti ſenſi, che riguardano l'elemento della terra, paſſa col metodo di ſopra indicato al ſenſo de' ſuoni, che pare di maggiore delicatezza, giacchè riguarda l' elemento dell' aria, quando da frequente tremore in minutiſſime onde increſpata muove certa cartilagine del timpano, che è nell' orecchio.

Quindi conclude, che ne' corpi eſterni per eccitare in noi i ſapori, gli odori, e i ſuoni, ſi richieggano bensì grandezze, figure, moltitudini, e movimenti, ma tolti via gli orecchi, le lingue, e i naſi, reſtino le figure, i numeri, e i moti, non gli odori, nè i ſapori, ne i ſuoni; i quali perciò fuori dell'animale vivente non ſono altro, che nomi; come pure altro, che nome, non è il ſolletico, e la titillazione, rimoſſe le aſcelle, e la pelle del naſo.

Finalmente viene alla Viſta, ſenſo il più delicato degli altri, e mediante il ſuo metodo arriva a capire in un certo modo gli effetti, e le cauſe, non oſtante che ſe ne intenda poco de' mezzi. In fatti della ſenſazione della viſta, e delle coſe attenenti ad eſſa, confeſſa d' in-

ten-

tenderſene poco; ma ad ogni modo capiſce, che nell' occhio la luce fa con la debita proporzione come nella lingua, e nel naſo que' minimi, i quali eccitano i ſapori, e gli odori, e come nell'orecchio l' aria ondeggiante, la quale eccita i ſuoni. Capito queſto, il reſto pone in ſilenzio, moſtrando in queſta parte il noſtro Autore un carattere molto diverſo da quello del Carteſio, mentre in vece d'ingombrare i libri con ipoteſi dubbie, c'inſegna più toſto a tacere. Di ciò, che tace il Galileo, ſi credeva, che aveſſe abbaſtanza parlato il Signor Nevvton nel ſuo famoſo libro della Generazion dei Colori, ma giacchè dalla Lettera Diottrica del Signor Giovanni Rizzetto quì dietro ſtampata, vengono a queſt' Autore chiuſe le parole in bocca, noi ne reſtiamo ancora a digiuno. Solamente ci va luſingando la notizia, che in detta Lettera abbiamo, d'eſſerſi fatta la ſcoperta della generazione de'Colori apparenti; onde ſperiamo di veder in breve rivelata la generazione anche degli altri colori, che ſi chiamano permanenti. Intanto ritornando al noſtro primo propoſito, avremo con queſt'Annotazione evidentemente dimoſtrato, che la ſentenza tanto decantata, e comunemente attribuita al Carteſio intorno alle affezioni ſenſibili, che riſeggono nella noſtr'anima, è nata prima in Italia, ed è ſtata pubblicata dal Galileo nel ſuo Saggiatore.

ANNOTAZIONE DELL' EDITORE.

I. SI riſtringe l' Autore a vane ipoteſi nel premeſſo Schediaſma, e primieramente ſuppone, che la forza DH $= f$ (Fig. 94.) dell' obbietto eſterno agiſca tutta raccolta nel punto medio C della fibra AB $= 2L$, di modo che eſſa fibra in virtù dell' azione della forza DH prenda la figura triangolare ADB. Suppone in ſecondo luogo, che eſſendo nulla la forza P tendente la fibra nella ſua naturale poſitura ACB, la diſtenſione ED $= l$ ſia prodotta dalla forza DI naſcente dalla nota riſoluzione della forza DH. Suppone finalmente, che gli allungamenti ED $= l$ ſerbino ſempre la ragione delle potenze DI. Ora giacchè ci è riuſcito nell' Annotazione allo Schediaſma XXIII. di ſcoprire le vere relazioni fra le diſtenſioni ED $= l$, e le forze, che direttamente le generano; abbiamo preſa riſoluzione di maneggiare la coſa con maggior generalità, non ritenendo, ſalvo che la prima fra le tre ſuppoſizioni del Conte Jacopo.

Trovare la proporzione fra le ſaette, e le forze applicate a ſquadra alla metà delle corde appoggiate a due ſcannelli, e raccomandate a due chiodi immobili.

II. Al punto di mezzo C della corda AB = 2L raccomandata a due chiodi immobili A, B, e teſa da una forza equivalente al peſo dato P s'applichi con direzione normale ad AB la forza DH = f la quale produca la ſaetta CD = s; ſi cerca la relazione fra la forza f, e la ſaetta s.

Tolta in preſtanza la preparazione dal noſtro Autore, riflettiamo, che la ſemicorda BD = BE + ED = L + l è teſa nella poſitura ADB da una forza, o peſo DI = P + p maggiore di quello eguale a P, che la ſtirava nella ſituazione ACB, per la quantità accreſciuta p, da cui, conforme a ciò che abbiamo ſpiegato nella citata Annotazione, è ſtato prodotto l'allungamento ED. Chiamiſi b la rigidità naturale della corda nel ſito ACB, e la mentovata Annotazione c'inſegna eſſere $\frac{1}{2} b+P \cdot \frac{L+l}{L} - \frac{1}{2} bL = P+p$ (1). La ſimilitudine dei triangoli BDC, IDG ſuggeriſce l'analogia DG : DI :: DC : BD ;

$$\frac{1}{2} f : P+p :: s : L+l$$

da cui deduceſi l'equazione $\frac{P+p \cdot s}{L+l} = \frac{1}{2} f$. (2). Finalmente il triangolo rettangolo BCD ci ſomminiſtra la formola

$$BD = \sqrt{BC^2 + CD^2}$$

$$L+l = \sqrt{L^2 + S^2} \quad (3)$$

Nella equazione (2) in cambio di P + p ſi ſoſtituiſca il ſuo valore preſo dalla equazione (1), e ſi avrà, adempiuti i neceſſarj calcoli,

$\frac{b+2P \cdot S}{L} - \frac{bLS}{(L+l)^2} = f$. In vece di L + l pongaſi il ſuo valore contenuto nella equazione (3), e ſi ſcoprirà

b +

$\frac{b+2}{L}$ P. S $-$ $\frac{bLS}{L^2+S^2}$ $=$ $\frac{2PS}{L}$ $+$ $\frac{bS^3}{L^3+LS^2}$ $=$ f (4), formola, che esprime

la relazione cercata fra le saette S, e le forze f, che le producono.

III. Per maggiormente confermare la verità della nostra formola poniamola al cimento dell'esperienza. Da essa formola si deduce quest' altra $b = \frac{L^3f + LfS^2 - 2PL^2S - 2PS^3}{S^3}$ (5); Ora perchè qualunque

benchè menomo sbaglio, che si commetta nel misurare la saetta S, porta grandissimo divario nel valore della naturale rigidità b della corda ACB tesa dalla forza equivalente al peso P; fa d'uopo rettificare il valore della saetta S prodotta dalla forza f, paragonando assieme i suoni delle due semicorde CB, DB. Il suono, o numero n di vibrazioni, che fa la corda CB per esempio in un secondo, s'eguaglia all'unità divisa per il tempo t, durata d'una d'esse vibrazioni espressa in parti di secondo, onde abbiasi l'equazione $n = \frac{1}{t}$. Ma nelle cor-

de fisiche di massa m, che si vibrano di traverso,

$f = \frac{\sqrt{Lm}}{\sqrt{\text{P. } 36\frac{17}{24}}} \cdot \frac{113}{355}$, dinotando le quantità $36\frac{17}{24}$ la lunghezza

d'un pendolo a secondi, e $\frac{113}{355}$ la proporzione del diametro al circolo,

dunque $n = \frac{\sqrt{\text{P. } 36\frac{17}{24}}}{\sqrt{Lm}} \cdot \frac{355}{113}$. Ed essendo che relativamente a qua-

lunque corda le grandezze $36\frac{17}{24}$, $\frac{355}{113}$ sono sempre costanti; ne se-

gue che generalmente il suono n come $\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{Lm}}$. Se il peso, o forza tendente P si mantiene costante, e la massa m della corda sta come la lun-

ghez-

ghezza L, ciò che interviene in corde, che non differiſcono, ſalvo che nella lunghezza, allora ſi trova n come $\frac{1}{L}$, o ſia il ſuono in ragione inverſa della lunghezza della corda. Se la maſſa m non ſi diverſifica, ciò che ſuccede nelle ſemicorde CB, DB, in tal caſo ſi ſcopre n come $\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{L}}$, cioè in ragione compoſta, diretta dimezzata della forza tendente P, ed inverſa parimente dimezzata della lunghezza L. Abbiamo notate queſte due circoſtanze; perchè verranno a ſeſta nelle noſtre eſperienze.

IV. Si determinerà la proporzione fra i ſuoni n, N delle corde CB, BD col ſeguente metodo. Si prenda una corda *acb* (Fig. 98.) uniſona alla ACB, ſi ſottoponga ad eſſa uno ſcannello *d* in ſito tale, che le corde *db*, DB ſi corriſpondano all'uniſono, e ne ſeguirà, che i ſuoni n, N ſtaranno fra loro in ragione inverſa di *cbadb*, onde ſi verifichi l'analogia $n : N :: db : cb$.

La dimoſtrazione è ſempliciſſima. I ſuoni delle due corde *cb*, *db* teſe dallo ſteſſo peſo, e che non differiſcono, ſalvo che in lunghezza, ſerbano la ragione inverſa delle lunghezze *cb*, *db*, ch'è quanto dire ſi corriſpondono nella proporzione *db* : *cb*: ma le corde *cb*, *db* ſono uniſone alle corriſpondenti CB, DB; dunque i ſuoni n, N di queſte ultime ſtanno come *db*: *cb*; il che ec.

V. Inſegnata la maniera di ſcoprire la proporzione fra i ſuoni n, N, c'innoltriamo ad indagare, come per le ſpezie n, N, e per le altre quantità date ſi poſſa eſprimere il valore della faetta CD $= s$. Eſſendo pari la maſſa delle corde CB, BD, le lunghezze come $L : L+l$, i peſi tendenti come $P : P+p$, avremo per le coſe dette nel numero III $n : N :: \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{L}} : \frac{\sqrt{P+p}}{\sqrt{L+l}}$, o ſia $n^2 : N^2 :: \frac{P}{L} : \frac{P+p}{L+l}$: ma conforme ſi è fatto vedere ſuperiormente (num. II.), $\frac{P+p}{L+l} = \frac{1}{\frac{2}{S}} f$; dunque ſoſtituito queſto valore in cambio di $\frac{P+p}{L+l}$ nella ſovrappoſta analogia, ſi

avrà

avrà $n^2 : N^2 :: \frac{P}{L} : \frac{\frac{1}{2}f}{S}$, e conseguentemente l'equazione $\frac{n^2}{N^2} \cdot \frac{fL}{2P} = S$ (6)

VI. Al punto medio C della corda d'ottone AB situata orizzontalmente, la cui semilunghezza CB = 30 mezz'oncie, e la forza tendente P equivalente ad oncie 140., atteccammo il peso, o forza DH $= f = 4$, la quale produsse la saetta CD $= s$, che con diligente misura trovammo eguale a $\frac{3}{7}$. I suoni n, N delle semicorde CB, DB, usato il metodo esposto al numero IV. li ritrovammo corrispondersi nella ragione 119. 120. Quindi si verificava essere $n^2 :: N^2 ::$ $\overline{119}^2 : \overline{120}^2$, o sia prossimamente 118 : 120:: 59 : 60., e passando all'equazione, $\frac{n^2}{N^2} = \frac{59}{60}$. Sostituiti nella formula del numero precedente $\frac{n^2}{N^2} \cdot \frac{fl}{2P} = S$ in vece di $\frac{n^2}{N^2}$, di f, di L, e di 2P i valori somministratici dalla esperienza, avremo $S = \frac{59}{60} \cdot \frac{4 \cdot 30}{2 \cdot 140} = \frac{59}{140} = \frac{3}{7} - \frac{1}{140}$: La frazione $\frac{1}{140}$, per cui la saetta rettificata differisce da quella, che s'è scoperta colla misura, sfugge la più scrupolosa diligenza da chi esperimenta, consistendo in $\frac{1}{24}$ di linea. Fatto uso del valore purificato della saetta CD $= S = \frac{59}{140}$ nella formola (5), si troverà dopo i necessarj computi $b =$ ad oncie 24054 = a libre $2004\frac{1}{2}$, valore della rigidità naturale della corda ACB corrispondente al peso, o forza tendente P = ad oncie 140.

VII. Applicammo al punto medio C della corda ACB la forza $f = 15\frac{3}{5} = \frac{78}{5}$, la quale cagionò la saetta CD = S, che

accu-

accuratamente misurata si trovò eguale a $\frac{7}{5}$: I suoni n ; N delle due

semicorde CB, DB serbavano la proporzione 11 : 12. Se per mezzo della relazione de' suoni cercheremo il valore della saetta, scopriremo $CD = S = \frac{1573}{1120} = \frac{7}{5} + \frac{1}{224}$ La differenza $\frac{1}{224}$ si sottragge alla at-

tenzione de' più circospetti osservatori. Sostituiscasi nella formola (5) in cambio di h il valore determinato nel numero superiore, ed in vece di L, f, P le grandezze 30, $\frac{78}{5}$, 140 a norma della presente espe-

rienza, e poste in opera le regole per sciogliere le equazioni cubiche, ei si presenterà $S = \frac{211}{150} = \frac{7}{5} + \frac{1}{150}$. La $\frac{1}{150^{ma}}$ parte di mezz'on-

cia consiste in $\frac{1}{26}$ di linea, divario totalmente inosservabile. Molto mi-

minore si è la differenza fra i due valori

$\frac{211}{150} = \frac{7}{5} + \frac{1}{150}$, $\frac{1573}{1120} = \frac{7}{5} + \frac{1}{124}$, il primo somministratoci dalla

nostra equazione, ed il secondo ricavato dalla proporzione fra i suoni delle due semicorde CB, DB. Chi volesse schivare l' imbroglio di di-ciferare la sovrapposta equazione (5) cubica, tenga un metodo inverso, e supposta $S = \frac{211}{150}$, cerchi il valore della rigidità h, che troverà e-

guale ad oncie 24013, e pochissimo differente dall' altro determinato nel numero precedente eguale ad oncie 24054. La cagione di questa diversità dipende da qualche piccola adequazione usata nello stabilire la grandezza della saetta $S = \frac{211}{150}$.

VIII. Quanto inosservabile è la differenza fra la saetta scoperta colla misura, e quella, che abbiamo ricavata dalla nostra equazione, altrettanto riesce menomissima l'alterazione, che la saetta $S = \frac{211}{150}$ in-

tro-

troducè nella proporzione dei ſuoni n: N, che s' è rinvenuta come 11. 12. Giacchè nel numero (V) abbiamo dimoſtrato eſſere $\frac{n^2}{N^2} \cdot \frac{fL}{2P} = S$, avremo per conſeguenza $\frac{n^2}{N^2} = \frac{2PS}{fL}$, e fatti $P = 140$, $S = \frac{211}{150}$, $f = \frac{78}{5}$, $L = 30$, ſi troverà $\frac{n^2}{N^2} = \frac{1477}{1755}$. La differenza fra le ragioni $\frac{1477}{1755}$, $\frac{121}{144}$ ſomminiſtrateci, quella dalla noſtra formola, e queſta dalla oſſervazione, conſiſte nella frazione $\frac{212688}{212355}$, che proſſimamente equivale alle ſeguente $\frac{639}{638}$. Se dunque fra le proporzioni dei quadrati dei ſuoni n^2, N^2 o ricavate dalla formola, o ſcoperte colla eſperienza c'è il divario $\frac{639}{638}$; fra le ragioni dei ſuoni n, N paſſerà la differenza $\frac{638\frac{1}{2}}{638} = \frac{1277}{1276}$, la quale, adempiuti i dovuti calcoli, ſi trova equivalere alla decimaſeſta parte d'un coma, minuzia, di cui l'orecchio non ſe ne accorge.

IX. Si conchiuda, che l'eſperienza conferma la verità della noſtra teorica, andando eſſe d'accordo con quella maggiore fiſica adequazione, che in così fatte indagazioni può mai ſperarſi. Notiamo per altro, che ſe alla metà della corda AB ſi applicaſſero forze notabilmente maggiori della adoperata nell'eſperimento ſecondo, ne riſulterebbero ſaette alquanto più piccole di quello richiede il noſtro canone, perchè in eſſo s' è traſcurata la reſiſtenza, che patiſce la corda ripiegandoſi nei ſiti A, D, B.

X. Affine d' internarci più a fondo nel magiſtero della Natura; la quale ha collocato le fibre in maniera, che ricevano di traverſo le impreſſioni degli obbietti eſterni, daremo prima la coſtruzione della formola (4) $\frac{2P+b}{L} \cdot S - \frac{bLS}{L^2+S^2} = \frac{2PS}{L} + \frac{bS^3}{L^3+LS^2} = f$, e fatte le do-

vute conſiderazioni ſopra la relazione fra le ſaette S, e le forze f, che le producono, indagheremo quali conſeguenze derivino dalla varia modificazione delle coſtanti P, b, L, che contraſſegnano la tenſione, la rigidità, e la lunghezza della fibra AB, mentre ſi trova in linea retta. C'inoltreremo poſcia ad eſaminare con ſimil metodo la proporzione fra le forze f, e le aumentazioni di tenſione p da eſſe cagionate nella fibra AB.

XI. Segnate a ſquadra (Fig. 100.) le linee CF = L, FK = 2P + b, per i punti C, K ſi tiri la linea CK, che ſi continui indefinitamente, ed a queſta facciaſi perpendicolare KT, che taglia la linea CF prodotta nel punto T. Col vertice C, parametro CT, e colla condizione che le coordinate formino l'angolo CKF, deſcrivaſi la parabola Apolloniana CQV. Si ſegni arbitrariamente l'aſſiſſa CG, e condotta l'ordinata GQ, che ſi continui in D, ſi delinei CB = L parallela a DG, e congiunganſi con una linea i due punti B, Q. Si tagli PA = 2P, onde reſti AK = b, e ſi tiri AX normale KT. Determinata CR = KX, e deſcritta RZ parallela a BQ, facciaſi HG = CZ, ed il punto H apparterrà alla curva CHE, che ſi vuol deſcrivere, le cui aſſiſſe CD = S, e le ordinate DH = f. Per il punto B ſi meni BP parallela a CK, e ſi continui DG fino in P.

Per la proprietà della parabola CQU ſi verifica l'equazione $\frac{\overline{CG}^2}{CT}$ = GQ. La ſomiglianza dei triangoli CDG, CFK, CKT ci ſomminiſtra le analogie CD : CF : : CG : CK, CD : CK : : CG : CT. Dalla prima ricaviamo eſſere CD : CK : : CD^2 ; CF . CG, e quindi la ſeconda prende il ſeguente aſpetto $\overline{CD}^2$: CF . CG : : CG : CT, e ci dà l'equazione $\frac{\overline{CD}^2}{CF} = \frac{\overline{CD}^2}{CT}$. Avremo dunque GQ = $\frac{CD^2}{CF} = \frac{S^2}{L}$

Aggiunta GP = L, ſi forma PQ = L + $\frac{S^2}{L} = \frac{L^2 + S^2}{L}$. I triangoli ſimili QPB, RCZ ſuggeriſcono l'analogiſmo PQ : PB = GG : : RC = KX : CZ, da cui deduceſi l'equazione CZ = $\frac{CG \cdot KX}{PQ}$. Ma ſtante la ſimilitudine dei triangoli CDG, KXA, abbiamo CD : CG : : KX : AK, e conſeguentemente CG . KX = CD . AK; dunque CZ = HG = $\frac{CD \cdot AK}{PQ}$, o ſia analiticamente CZ =

HG

$HG = \frac{bLS}{L^2+S^2}$. Finalmente l'analogia, che ci viene additata dai triangoli simili CDG, CFK, cioè a dire CF : FK :: CD : DG,

$$L : 2P+b : : S : \frac{2P+b \cdot S}{L}$$

determina il valore di $DG = \frac{2P+b \cdot S}{L}$. Avremo pertanto $DH =$

$DG - HG = \frac{2P+b \cdot S}{L} - \frac{bLS}{L^2+S^2}$: ma $\frac{2P+b \cdot S}{L} - \frac{bLS}{L^2+S^2} =$

f; dunque posta $CD = S$, sarà la corrispondente ordinata $DH = f$; il che ec.

XII. La nostra curva è fornita d'un altro ramo simile al CHE, nel quale tanto le saette S, quanto le forze f sono negative. Questo ramo serve per le saette Cd (Fig. 94) della corda AB. La linea $HG = \frac{bLS}{L^2+S^2}$ (Fig. 100.) ha un massimo valore $KE = \frac{1}{2} b$ corrispondente a $CD = S = CF = L$. In tale incontro la linea BQ tocca la parabola CQU nel punto U, e l'angolo CBQ, come altresì l'eguale CRZ ascende al massimo, e massima conseguentemente diviene la grandezza di $CZ = HG$.

Conciossiachè $DH = f = \frac{2P+b \cdot S}{L} - \frac{bLS}{L^2+S^2} = \frac{2PS}{L} + \frac{bS^3}{L^3+LS^2}$

e $DY = \frac{2PS}{L}$, formola nascente dall'analogia CF : CD : : FA : DY,

$$L : S : : 2P : \frac{2PS}{L}$$

ne risulta $YH = \frac{bS^3}{L^3+LS^2}$, valore della intercetta fra l'inclinata CA, e la curva CHE.

Quando le saette S sono minime, l'intercetta $YH = \frac{bS^3}{L^3+S^2}$ sco-

presi infinitesima del terzo grado, ed incomparabile con $DY = \frac{2PS}{L}$

infinitesima del primo grado. Cancellato adunque il termine relativamente nullo, ci si presenta $DH = DY = f = \frac{2PS}{L}$, ed in questo caso le saette sono come le forze, verificandosi la proporzione $L : 2P :: S : f$. Non trascuriamo di avvertire, che la linea CA tocca la curva CHE nel punto C.

Se le saette diveniſſero infinite, ipoteſi per altro, che non è fiſica, trascurato il termine infinitamente picciolo $\frac{bLS}{L^2+S^2} = HG$, si troverebbe $DH = DG = \frac{2P + b.\ S}{L} = f$; espressione, da cui dedurrebbesi l'analogia $L : 2P + b :: S : f$, la quale c' insegnerebbe, che anche in tal circostanza le saette serberebbero la ragione delle forze. Egli è facile da scoprire, che la linea CK serve di assintoto alla curva CHEb, la quale giace tutta dentro l'angolo KCA.

XIII. Nei casi intermezzi, mentre cioè le saette sono finite, meno crescono, o scemano le saette di quello crescano, o scemino le forze, che le producono, dovendosi per gradi passare dalla ragione $L : 2P$ alla più rimota $L : 2P + b$.

Per ciò dimostrare rigorosamente, sia $CD = S$, e conseguentemente $DH = f = \frac{2PS}{L} + \frac{bS^3}{L^3+LS^2}$, Si segni $Cd = nS$, vale a dire in qualunque proporzione con CD, e si avrà $dh = F = \frac{2PnS}{L} + \frac{bn^3S^3}{L^3+Ln^2S^2}$. Se le forze serbassero la ragione delle saette dovrebbe essere $nf = \frac{2PnS}{L} + \frac{bnS^3}{L^3+LS^2} = F = \frac{2PnS}{L} + \frac{bn^3S^3}{L^3+Ln^2S^2}$. Ora diciamo, che posto $n > 1$, e per conseguenza $nS > S$, è parimente $F > nf$, e posto $nS < S$, è parimente $F < nf$, laonde meno crescono, o scemano le saette di quello crescano, o scemino le forze, che le producono. Cominciamo dal provare, che ad $n > 1$ corrisponde $F = \frac{2PnS}{L} + \frac{bn^3S^3}{L^3+Ln^2S^2} > nf = \frac{2PnS}{L} + \frac{bnS^3}{L^3+LS^2}$. Se così è, tolto di

mez-

mezzo il termine comune $\frac{2PnS}{L}$, resterà $\frac{bn^2S^2}{L^2+Ln^2S^2} > \frac{bnS^2}{L^2+LS^2}$, e divi-

dendo per $\frac{bnS^2}{L}$, $\frac{n^2}{L^2+n^2S^2} > \frac{1}{L^2+S^2}$. Moltiplichiamo ambi i membri

per $L^2+n^2S^2$. L^2+S^2, e ci si presenta $n^2L^2+n^2S^2 > L^2+n^2S^2$; e sottratta la quantità comune n^2S^2, $n^2L^2 > L^2$, o $n > 1$, conseguenza vera, e conforme all' ipotesi stabilita. Se si supporrà $n < 1$, ne seguirà essere $n^2L^2 < L^2$, ed indi tornando indietro per la strada or ora calcata, si scoprirà $F = \frac{2PnS}{L} + \frac{bn^2S^2}{L^2+Ln^2S^2} < nf = \frac{2PnS}{L} + \frac{bnS^2}{L^2+LS^2}$

XIV. Egli è per tanto manifesto, che stando dentro i limiti delle quantità finite, meno crescono, o scemano le saette, di quello crescano, o scemino le forze, che le producono: verità, che ottimamente si accorda colla esperienza. In fatti c' insegna l'esperimento sopra riferito al numero VI, che applicata al punto medio d'una corda, la cui semilunghezza $L = 30$, la forza $f = 4$, produsse questa una saetta, che con diligente misura si trovò eguale a $\frac{3}{7}$. Col mezzo della proporzione fra

i suoni della corda, mentre dimora in linea retta, e mentre sta in equilibrio colla forza f, la stessa saetta si scoprì eguale a

$\frac{59}{140} = \frac{3}{7} - \frac{1}{140}$, e questo valore s' è stabilito fisicamente giusto. Se

le saette crescessero in proporzione delle forze, si determinerebbe la saetta S generata dalla forza $F = \frac{78}{5}$ colla seguente analogia

$4 : \frac{59}{140} :: \frac{78}{5} : S = \frac{2301}{1400} = 8 + \frac{61}{280}$. Ricorrendo all' esperimento

descritto al numero VII. osserviamo, che la forza $\frac{78}{5}$ cagionò una saetta, che o sia eguale a $\frac{7}{5}$, come si rinvenne colla misura, o a

$\frac{7}{5} + \frac{1}{224}$, come si trovò col mezzo della proporzione dei suoni, è sempre notabilmente minore di $8 + \frac{61}{\frac{28c}{5}}$. Con ragione adunque abbiamo poco fa asserito uniformarsi colla esperienza la legge, che non oltre passando i termini delle grandezze finite, meno crescono, o scemano le saette di quello crescano, o scemino le forze, onde vengono generate.

XV. Innoltriamoci alle conseguenze fisiche, e notiamo, che mentre le forze sono minime anche fisicamente, producono saette a se stesse proporzionali, e mantenendosi, come in progresso vedremo, adequatamente costante la naturale tensione della fibra, fa questa le sue vibrazioni più, e meno estese nel tempo stesso, le quali risvegliano nell'anima sensazioni più, o meno forti, ma tutte aggradevoli. Che se la forza si aumenta soverchiamente, allora la fibra troppo si tira, e corre rischio di patir danno. Ad un tale inconveniente mette in parte riparo la legge, che mentre le forze non sono minime, più crescano le forze delle saette. La forza f generi la saetta S. Sia 2. S quella saetta, che comincia a danneggiare l'organo, e conforme che ci vuole una forza maggiore di $2f$ per produrre la saetta 2 S, ne segue, che la forza xf si dee contare nel numero di quelle, che non molestano la fibra.

XVI. Consideriamo presentemente le alterazioni, che cagiona nelle saette S la varia grandezza della rigidità h. Presa nuovamente per mano la formola $\frac{2PS}{L} + \frac{hS^3}{L^3+LS^2} = f$, riflettasi, che posta la saetta S infinitesima, e stando la rigidità h dentro i termini del finito, la linea $YH = \frac{hS^3}{L^3+LS^2}$ è incomparabile colla linea $DY = \frac{2PS}{L}$. Quindi in tale ipotesi, qualunque sia il valore finito della rigidità h, la forza $f = DH = DY$ produrrà sempre la saetta costante $S = CD$.

Si fingano infinite le saette S, e allora si troverà $DH = DG = f = \frac{2P+h}{L} . S$: formola, da cui si ricava, che nella detta circostanza più cresce, o cala la rigidità h, di quello che all'incontro calino, o crescano le saette S generate dalla forza invariabile f. Ciò tanto maggiormente si verifica, mentre si tratti di saette finite.

Che

Che ſe queſte ſi aſſumano minime fiſicamente, quali ſono, relativamente alla lunghezza delle fibre, le ſaette in eſſe operate dalle forze non nocive degli oggetti eſterni; ſi cavi la conſeguenza, che per diverſificare notabilmente le ſaette prodotte da una forza data, biſogna, che le rigidità ſtieno fra loro in una proporzione molto lontana. L'eſperienza c'inſegna, che le ſenſazioni d'un uomo adulto ſono più vive di quelle d'un vecchio, e meno vive di quelle d'un giovane. S'inferiſca adunque, che gran diverſità ci ha da eſſere fra le rigidità delle fibre d'un adulto, d'un vecchio, e di un giovane, e ſi ammiri l'artificio dell'Autore della Natura, che ciò non oſtante le ſenſazioni per una parte non iſvaniſcano, e per l'altra non divengano moleſte. Merita d'eſſere diſtintamente avvertita la belliſſima proprietà, che i diſcapiti dell'organo ſuperano di gran lunga quei delle ſenſazioni.

XVII. Sia S la minima ſaetta, ſino a cui faccia d'uopo incurvare una fibra di data maſſa, tenſione, e lunghezza, perchè vibrandoſi riſvegli nell'anima una diſtinta ſenſazione. La forza *f* operi queſta ſaetta nella fibra d'un uomo adulto, la cui rigidità *h*. Per produrre la ſteſſa ſaetta nella fibra d'un uomo vecchio fornita di maggiore rigidità H, ci vorrà una forza più grande F. Quindi la forza primiera *f* genererà nella fibra del vecchio una ſaetta minore di S, a cui non corriſponderà ſenſazione diſtinta. In fatti oſſerviamo, che per farci intender dai vecchi biſogna alzare la voce, e che a quel lume fiacco, a cui legge un adulto, non legge un vecchio. Per la ſteſſa ragione un lume ancora più tenue baſterà a un giovane, e non ad un'uomo adulto.

Ma queſto vantaggio, che le fibre d'un giovane ſieno più pieghevoli di quelle d'un adulto, viene compenſato dal maggior pericolo, che dalla troppa azione delle forze eſterne reſtino danneggiate. Suppongaſi S la maſſima ſaetta, che non porta pregiudizio a una fibra. Venga queſta prodotta dalla forza *f* nella fibra d'un'adulto, la cui rigidità *h*. Egli è chiaro, che la ſteſſa forza, innocente in riguardo all'adulto, recherà nocumento alla fibra più molle dell'uomo giovane, cagionando in eſſa una ſaetta maggiore di S, che ſi ſuppone la maſſima fra quelle, che all'organo non ſon nocive. Anno ſperimentato in Bologna, che l'empito della materia elettrica, che per lo più non apporta danno agli uomini di età conſiſtente, rieſce ai giovanetti ſommamente pregiudiziale.

Le fibre degli uomini ſani, ed adulti ſono nell'ottimo ſtato di perfezione. Le ha il Sapientiſſimo Iddio dotate di quella rigidità conveniente, onde faccia in loro una impreſſione ſenſibile, ma non nociva, la forza ordinaria di quegli oggetti eſterni, con cui ſiamo in commercio, e dei quali importa alla noſtra conſervazione, ed al noſtro ben eſſere, che ci accorgiamo. Prima di giugnere alla virilità, le fibre non ſono ancora quanto baſta robuſte, per reſiſtere a certe forze più vigoroſe. Quando poi c'incamminiamo dalla virilità alla vecchiaja, il mondo ſenſibile (per valerci d'una eſpreſſione, con cui da fine il noſtro

Au-

Autore alla ſua diſſertazione) ſi va per noi ſucceſſivamente, ed inſenſibilmente perdendo.

XVIII. Agli ammalati danno faſtidio quegli oggetti, che in tempo di ſanità riuſcivano loro gratiſſimi. Nelle ſtanze degl' infermi biſogna chiudere le fineſtre, parlar ſottovoce, perchè la forza anche moderata della luce, e del ſuono gli offende. Queſti effetti crediamo, che poco, o nulla dipendendo dalla rigidità, che nelle fibre degli uomini infermi ſi ſcemi, traggano principalmente l'origine dal minoramento della forza de' muſcoli, che pongono in tenſione le fibre, la quale forza da noi s' eſprime per la lettera P. Diſponiamoci adunque a far vedere a chi legge, quanto influiſca nelle ſenſazioni l'alterazione di un sì fatto elemento.

XIX. Suppoſta nulla la forza P, che ſtira la fibra, mentre ſi trova in linea retta, ſvaniſce nella Fig. 100. la linea FA = 2P, e la linea CA cade ſopra la CF. Perciò in tale ipoteſi avremo $YH = f = \frac{bS^3}{L^3 + LS^2}$,

e mentre S ſia minima relativamente ad L, $YH = f = \frac{bS^3}{L^3}$, conforme ha trovato il Conte Jacopo nel ſuo Schediaſma.

Più conſeguenze ſi poſſon dedurre dalla premeſſa formola, e primieramente per cagionare eguali ſaette in fibre di pari lunghezza, ci vorrebbero forze proporzionali alle rigidità. Che ſe la forza eſteriore foſſe coſtante, le ſaette ſtarebbero inverſamente come le radici cubiche delle rigidità. Quindi ſi ſcopre, quanto giovi alla buona economia delle ſenſazioni, che le fibre ſien poſte in tenſione, avendo non ha molto oſſervato, che la diverſa miſura della rigidità altera pochiſſimo le picciole ſaette, che dalle fibre teſe nell'oſcillare ſi ſcorrono.

Serbando le forze la ragione dei cubi delle ſaette, non ſi compierebbero in pari tempo le vibrazioni più, o meno dilatate della ſteſſa fibra; imperciocchè richiede neceſſariamente l'iſocroniſmo, che le forze ſtieno come le ſaette, o come gli ſpazj da paſſarſi.

Finalmente le fibre non iſtirate riuſcirebbero inettiſſime per oſcillare, perche in una vibrazione c' impiegherebbero un tempo infinito. Fingaſi tutta raccolta nel punto D la maſſa della corda ADB (fig. 99.) ciò che non turba l'eſſenziale delle deduzioni. La ſcala delle forze ſollecitanti riferite alle ſaette, o ſia agli ſpazj da percorrerſi ſarebbe la parabola cubica CnN corriſpondente all'equazione $\frac{L^3}{b} \cdot f = S^3$, le cui ordinate DN, *dn* eſprimono le forze, e le aſſiſſe DC, *dc* le ſaette. Sanno i Geometri, che la forza viva acquiſtata dalla corda AB, quando è ritornata nella poſitura ACB s'eguaglia all'area CDNnC, la quale è

le è proporzionale a $\overline{DC}^4$, ch' è quanto a dire ad una fluſſione infiniteſima del quarto grado. Eſſendo finita la maſſa della corda concentrata in D, ne ſegue, che il quadrato della velocità nel ſito C deve aſcriverſi al quarto ordine delle quantità minime, e che per conſeguenza la detta velocità ſpetta al ſecondo grado degli infinitamente piccioli. Ora con una velocità, che al più giunge ad eſſere infiniteſima dell' ordine ſecondo, non ſi può paſſare lo ſpazio DC minimo del primo grado, ſalvo che in tempo infinito. Se alle ſaette infiniteſime ſi ſoſtituiranno le fiſicamente minime, agevolmente ci accorgeremo, che rimoſſa dalla linea retta ACB una fibra priva di tenſione, ſi fermerebbe ſenza reſtituirſi nella ſituazione ADB.

XX. Abbandonata un'ipoteſi non accettata dalla Natura, conſideriamo variabile sì, ma ſempre finita la forza tendente P. Mentre le ſaette ſien minime, la formola $\frac{2PS}{L} = f$ m'inſegna, che preſe come coſtanti la forza eſtrinſeca f, e la lunghezza L della fibra, le ſaette S ſtanno reciprocamente come le forze tendenti P.

Supponendo infinite le ſaette, ſi verifica l'equazione $\frac{\overline{2P+h}\,.\,S}{L} = f$, da cui poſſiam ricavare, che eſſendo date le quantità h, f, L; le ſaette S abbracciano la ragione inverſa della ſomma della doppia forza tendente P, e della rigidità h. In tale circoſtanza meno creſcono, o calano le ſaette, di quello che all'incontro calino, o creſcano le forze tendenti. Le ſaette frattanto, per cui ſi ripiegano le fibre, s'accoſtano molto più al minimo, che all'infinito, e perciò quaſi colla ſteſſa proporzione, onde ſi minorano, o s'aumentano le tenſioni, tutto al roveſcio s'aumentano, o ſi minorano le ſaette. Quindi ſondatamente abbiamo aſſerito al numero XVIII., che quel faſtidio, che recano agli ammalati certi oggetti loro aggradevoli in tempo di ſanità, dipende principalmente dal decreſcimento della forza tendente.

Se la tenſione s'ingrandiſce ſmoderatamente (meſſo da parte il danno, che potrebbe patir la fibra) l'impreſſione della forza f ſcemerebbe talmente, che o fievoliſſime, o nulle ſi riſveglierebbero le ſenſazioni nell'anima.

Non tralaſciamo d'avvertire, che ſe alquanto meno creſcono, o calano le ſaette, di quello che al contrario calano, o creſcono le tenſioni, egli è tutto frutto della rigidità delle fibre, tolta di mezzo la quale, ſvanirebbe nell'equazione $\frac{2PS}{L} + \frac{hS^3}{L^3+kS^2} = f$ il termine $\frac{hS^3}{L^3+LS^2}$,

e le ſaette ſeguiterebbero eſattamente la proporzione reciproca delle forze tendenti.

XXI. I tempi delle vibrazioni di due corde egualmente lunghe, e di pari maſſa ſtanno inverſamente come le radici delle forze tendenti. A norma di ciò ſe decreſcerà notabilmente la tenſione delle fibre, oſcilleranno queſte più lentamente. Da un tale principio penſiamo, che proceda quella languidezza, che ſi oſſerva negli occhi de' moribondi.

XXII. Se le fibre ſien ſimili, teſe da forze proporzionali alle loro baſi, compoſte di materia egualmente rigida, e fornite di maſſa proporzionale a quella degli organi, a cui devono partecipare il moto; l'elemento della varia lunghezza nulla influiſce nella vivacità delle ſenſazioni. Le maſſe delle noſtre fibre ſi corriſpondono nella proporzione dei quadrati. Ed eſſendo che le tenſioni P, e le rigidità b ſtanno come le baſi; ne ſegue, che da loro la ragione dei quadrati L^2 delle lunghezze viene abbracciata. Nella ſteſſa proporzione ſi riferiſcono pure le forze eſterne; ſtante che a miſura delle ſuperficie ricevono le fibre l'impreſſione degli oggetti, conforme al numero VI. riflette ottimamente l'Autore.

Ciò premeſſo diciamo, che le ſaette ſerbano la ragione delle lunghezze. In grazia della ſemplicità ci ſerviamo d'una dimoſtrazione indiretta. Sia adunque $S = n\,L$, cioè le ſaette come le lunghezze, e ſoſtituito queſto valore nella formola $\frac{2PS}{L} + \frac{bS^3}{L^3+LS^2} = f$, troveremo $2n - P + \frac{n^3}{1+n^2} \cdot b = f$. Ma i coefficienti $2n$, $\frac{n^3}{1+n^2}$ ſono quantità coſtanti, e tanto le tenſioni P, quanto le rigidità b ſtanno come L^2; dunque f come L^2: conſeguenza, che va d'accordo col vero.

Si potrebbe agevolmente provare, che i tempi delle vibrazioni delle noſtre fibre, anche per ſaette, che non ſien minime, accettano la ragione delle lunghezze d'eſſe fibre, e ſi caverebbe poſcia la conſeguenza, ch'eſſendo i tempi proporzionali agli ſpazj, che ſi ſcorrono, e creſcendo, o calando le velocità con pari legge, ſi trovano queſte eguali in ſiti analoghi, di modo che le forze vive acquiſtate dalle fibre ſeguitano la proporzione delle loro maſſe. Ora dovendoſi comunicare il moto ad organi, la cui maſſa è proporzionale a quella delle fibre, acquiſteranno eſſi pari velocità, alle quali corriſponderanno ſenſazioni egualmente ſpiritoſe.

XXIII. Se le ſtabilite miſure delle forze ſtiranti, e della rigidità ſi ſuppongono variate, vagliono le ſteſſe conſeguenze per noi dedotte, mentre abbiamo trattato delle fibre di eguale maſſa, e lunghezza, ma diverſamente rigide, e diverſamente teſe. Fatta la riflеſſione, che la materia componente le fibre dei fanciulli è più molle di quella, onde conſta-

ſtano le fibre degli adulti, ſi conchiuderà, che le ſenſazioni dei primi ſono più vive di quelle dei ſecondi.

XXIV. Ne riſulterebbero ſenſazioni diverſamente vivaci, quando le maſſe delle fibre ſimili, rigide, e teſe proporzionatamente, non ſi corriſpondeſſero come le maſſe degli organi, a cui deve paſſare il tremito. Le fibre di maggiore, o di minor maſſa relativa ſveglierebbero più, o meno brillanti le ſenſazioni.

XXV. Reſta, che ſi dica qualche coſa delle fibre diſſimili. Conſiſtendo la diſſomiglianza nelle baſi o troppo grandi, o troppo picciole, le quali anno parte nella determinazione della rigidità, egli è facile lo ſtabilire la proporzione delle forze eſtrinſeche, e delle ſaette. Biſognerebbe poſcia computare le forze vive guadagnate dalle fibre, e paragonarle colle maſſe degli organi, ai quali devono partecipare il moto, per dedurre la relazione fra l'energia delle ſenſazioni. Frattanto ci contenteremo di notare col Conte Jacopo, che in quella guiſa, che negli uomini di rado ſi trovano due volti affatto ſimili, ſi dee credere, che per lo più le loro fibre ſieno di differente ſtruttura, e che ognuno abbia al pari della fiſonomia le ſue particolari ſenſazioni.

XXVI. Eſaminata quanto baſta la proporzione fra le forze f, e le ſaette S, ci accingiamo a confrontare colle ſteſſe forze gli accreſcimenti di tenſione p, ch'eſſe producono nelle fibre. Giovera queſto paragone per indagare la fatica, che ſoffre l'organo, la quale ſta in ragione compoſta, diretta delle aumentazioni di tenſione p, ed inverſa della forza P dei muſcoli ſtiranti le fibre, cioè a dire come $\frac{p}{P}$.

Trovare la relazione tra le forze applicate a ſquadra al punto medio d'una fibra, e gli accreſcimenti di tenſione, ch'eſſe nella detta fibra cagionano.

Ripetuta la curva CHE*b* (Fig.101.), le cui aſſiſſe CD=S, e le ordinate DH=f, tiriamo a ſquadra *di* CD, e parallela a DH la linea CB=L. Condotta poſcia la diagonale BD, e ſegnata CN=$\frac{1}{2}$DH=$\frac{1}{2}f$, deſcriviamo NO parallela a DB. Nella HD prorogata tagliamo DI=NO, e per il punto I, e per altri ſimilmente determinati fatta paſſare la curva MI*i*, diciamo, che l'ordinata DI eſprime l'intera tenſione P+p, che patiſce la corda CB, dopo che la forza DH ha in eſſa operato la ſaetta CD; e che per conſeguenza, ſottratta DR=P, e deli-

neata MRr parallela a CD, il reſiduo RI s'eguaglia all'accreſcimento di tenſione p cauſato nella mentovata corda dalla forza DH.
Dai triangoli ſimili CDB, CNO ſi ricava l'analogia

$$CD : DB :: CN = \tfrac{1}{2}DH : NO = \frac{\tfrac{1}{2}f \cdot \overline{L+l}}{S} = DI$$

$$S : L+l :: \tfrac{1}{2}f$$

che ci addita il valore di $DI = \frac{\tfrac{1}{2}f \cdot \overline{L+l}}{S}$. Ma per l'equazione (2) contenuta nel numero II,

$$\frac{\overline{P+p} \cdot S}{L+l} = \tfrac{1}{2}f, \text{ o ſia } \frac{\tfrac{1}{2}f \cdot \overline{L+l}}{S} = P+p; \text{ dunque } DI = P+p,$$

il che ec.

XXVII. Egli è chiaro in primo luogo, che quando s'eguagliano a nulla la forza DH, e la ſaetta CD, è nullo parimente l'accreſcimento di tenſione RI, e perciò la noſtra curva paſſa per il punto M.

In grazia delle conſeguenze ſtimiamo opportuno di porre ſotto gli occhi di chi legge la formola, in cui non ſi contengono, ſalvo che le due incognite f, p. Nell'ultima equazione ſi collochi in cambio di S il ſuo valore $\sqrt{2Ll+l^2}$, onde s'abbia $\frac{\tfrac{1}{2}f \cdot \overline{L+l}}{\sqrt{2Ll+l^2}} = P+p$. Maneggiata queſta a dovere, ſi troverà

$$L+l = \frac{L \cdot \overline{P+p}}{\sqrt{\overline{P+p}^2 - \tfrac{1}{4}f^2}} \quad (7).$$

Una tale eſpreſſione di $L+l$ ſi ſoſtituiſca nella formola

(1) $\frac{\tfrac{1}{2}b+P}{L} \cdot \overline{L+l} - \frac{\tfrac{1}{2}bL}{\overline{L+l}} = P+p$, della quale abbiamo fatto uſo

nel

nel numero II, e ne risulterà $\frac{\frac{1}{2}b+P \cdot \overline{P+p}}{\sqrt{\overline{P+p}^2-\frac{1}{4}f^2}} - \frac{\frac{1}{2}b\sqrt{\overline{P+p}^2-\frac{1}{4}f^2}}{P+p}$,

$= P+p$, ed adempiuti i necessarj calcoli, $\frac{P+bf^2}{8\cdot\overline{P+p}^2} =$

$\sqrt{\overline{P+p}^2-\frac{1}{4}f^2} = CO$ (8)

A buon conto si noti, che restando esclusa dalla formola la specie L, la varia lunghezza della fibra non ha per se stessa luogo nel determinare l'accrescimento di tensione p, il quale, essendo il resto pari, si scoprirà sempre costante, qualunque sia la lunghezza della fibra. Abbiamo detto per se stessa; perchè, conforme si è veduto nel num. XXII, la lunghezza delle fibre c'entra nello stabilire la misura della forza esteriore f.

Quando è minima la forza f, si trova

$\sqrt{\overline{P+p}^2-\frac{1}{4}f^2} = P+p-\frac{\frac{1}{8}f^2}{\overline{P+p}}$. Avremo per tanto

$\frac{P+bf^2}{8\cdot\overline{P+p}^2} = P+p-\frac{f^2}{8\cdot\overline{P+p}}$, o sia $\frac{\overline{b+P+p}\cdot f^2}{8\cdot\overline{P+p}^2} = p$, e cancellate

e quantità relativamente nulle, $\frac{\overline{b+P}\cdot f^2}{8\cdot P^2} = p$. Supponendosi data la

grandezza $\frac{b+P}{8P^2}$, ne segue, che le aumentazioni di tensione p stanno

come i quadrati f^2 delle forze minime, onde vengono prodotte, e che conseguentemente appartengono al secondo ordine degli infinitamente piccoli.

Su-

Superiormente abbiamo avvertito essere la forza infinitesima $f = \frac{2PS}{L}$, e quindi dedurremo $\frac{h+P}{8P^2} \cdot f^2 = \frac{h+P}{2L} \cdot S^2 = p$. Imparia-

mo da questa formola, che a CD = S minima corrisponde RI = p infinitesima del secondo grado, che la linea MR tocca la curva M*i* nel punto m, e che la detta curva verrebbe combacciata nel nominato punto da una Parabola Apolloniana, il cui vertice m, ed il parametro $\frac{2L}{h+P}$,

Immaginiamoci infinita la forza f, e dalla sola considerazione della figura ricaveremo, che siccome in tal caso CD = S eguaglia adequatamente DB = L + l, non altrimenti CN = NO, overo analiticamente $\frac{1}{2}f = P + p$, e trascurata, se così piace, la quantità incomparabile P, $\frac{1}{2}f = p$, cioè a dire gli accrescimenti di tensione p come le forze infinite f, da cui sono cagionati. Il valore di $p = \frac{2}{2}f$ non resta in conto alcuno alterato, dalla diversa misura della rigidità h, e della forza tendente P.

Nella suppoſizione, che abbiam per le mani, è $CO = \frac{1}{2}h + P$.

E vaglia il vero, giacchè per l'equazione (8) $CO = P + \frac{hf^2}{8 \cdot \overline{P+p}^2} =$

$\sqrt{\overline{P+p}^2 - \frac{2}{4}f^2}$, ne risulta $\frac{1}{2}h + P = P + \frac{hf^2}{8 \cdot \overline{P+p}^2}$, e conseguentemente $\frac{1}{2}f = P + p$. pongasi in vece di $P + p$ il suo valore $\frac{2}{2}f$ nella formola $CO = P + \frac{hf^2}{8 \cdot \overline{P+p}^2}$, e ne proverrà $CO = P + \frac{1}{2}h$, conforme si dovea ritrovare.

L'a-

L' analogia $\begin{matrix} CB : \\ L : \end{matrix} \begin{matrix} CD : \\ S : \end{matrix} \begin{matrix} : CO \\ : P+\frac{1}{2}b \end{matrix} \begin{matrix} : CN \\ : \frac{1}{2}f \end{matrix}$ somministra l' equazione

superiormente scoperta nel numero XII. conveniente alle forze infinite $\frac{\overline{P+\frac{1}{2}b}.\ S}{L} = \frac{1}{2}f$. Sostituito in cambio di $\frac{1}{2}f$ il suo valore $P+p$, ci si presenta $\frac{\overline{P+\frac{1}{2}b}.\ S}{L} = P+p$: espressione, da cui si raccoglie, che segnata $FQ = \frac{FK}{2} = P+\frac{1}{2}b$, e congiunti i punti C, Q con una linea, che si continui all' infinito, servirà questa d' assintoto alla curva MI.

XXVIII. Avendo osservato, che posta f minima, la tensione aggiunta p è immensamente più picciola, e che dividendo f infinita, $p = \frac{1}{2}f$; ne dedurremo, che stando nei confini del finito, l' accrescimento di tensione p è sempre minore della metà della forza f. Questa riflessione ci addita il magistero ammirabile della Natura, la quale ha disposto, che le forze estrinseche agiscano traversalmente, e non direttamente nelle fibre degli organi. Se agissero direttamente, s' aumenterebbe la tensione per la intiera forza f. Operando le forze esteriori di traverso, s' accresce la tensione per la quantità p, che quando le fibre non restano molestate, è assaissimo minore di f, e che mentre f sia molto grande, non può mai giungere a pareggiarne la metà. Con sì stupendo artificio si mettono le fibre in una agitazione spiritosa, atta a risvegliare nell'anima le sensazioni con pochissima alterazione della loro consueta tensione.

XXIX. Conciossiachè in un caso estremo sta p come f^2, e nell'altro p come f, s' inferisca, che più crescono, o scemano le aumentazioni di tensione p, di quello che parimente crescano, o scemino le forze finite trasversali.

Più conseguenze fisiche possono ricavarsi. E primieramente aumentandosi la forza esteriore, cresce, e con maggior proporzione la fatica dell'organo; e perciò quando la mentovata forza è troppo grande, e continuata, l'organo facilmente si stanca. L' assidua contemplazione dei luminosi corpi celesti affatica talmente gli occhi degli Astronomi, che a più d'uno è accaduto di rimaner privo della vista in tempo della vecchiaja.

Age-

Agevolmente si passa dall'insensibile al sensibile, o al rovescio; dal piacevole al disgustoso, o al rovescio. All'accrescimento di tensione p non corrisponda sensazione. Se per eccitarla faccia bisogno l'ingrandimento di tensione $4p$; s'otterrà questo effetto con aumentare la forza trasversale f pochissimo più del doppio.

Nell'organo delicatissimo della vista, che ricoprendolo colle palpebre, o colle mani, o volgendo altrove la faccia si difende dall'empito d'una luce troppo violenta, la Natura si serve d'una bellissima industria, perchè non si passi con tanta facilità dal sensibile all' insensibile, dal grato all' ingrato. Consiste questa nel potersi allargare, o ristringere il diametro della pupilla. Le dilatazioni, e i restringimenti si osservano grandissimi in quegli animali, che sono destinati a vedere di giorno, e di notte. Se il lume infiacchisce, s'allarga assai la pupilla, con che molto lume debole fa la stessa impressione, come un lume mediocre e di forza, e di quantità. Accrescendosi il vigore della luce, si ristringe la pupilla, e la minore quantità compensa la forza maggiore. Anche gli altri organi avranno forse degli equivalenti artificj, che non ci sono per anco noti.

XXX. Facciamoci ora a ponderare qual parte possa avere la diversa rigidità b delle fibre nella fatica degli organi, la quale, supponendosi costante la forza tendente P, serba la ragione degli accrescimenti di stiramento p.

La formula propria delle forze minime $\frac{b+P \cdot f^2}{8P^2} = p$ ci manifesta, che assumendosi siccome dato il coefficiente $\frac{f^2}{8P^2}$, le aumentazioni di tensione p, mentre la forza f sia piccolissima, stanno come la somma $b+P$ della rigidità, e della forza stirante. In tale circostanza adunque la fatica dell'organo s' aumenta, o si minora proporzionatamente meno di quello cresca, o si diminuisca la rigidità.

S'è già avvertito al numero XXVII., che essendo infinita la forza f, la varia rigidità b delle fibre nulla influisce nella misura dell'aumento di tensione $p = \frac{1}{2} f$.

Quindi una forza finita cagionerà incrementi di tensione, che all' ingrandire, o all'impiccolire della rigidità si troveranno meno diversi di ciò, che richiede la legge delle forze minime.

Dalle premesse verità si desume la ragione, per cui un'adulto più d'un giovane, ed un vecchio più d'un adulto è soggetto a stancarsi. Un adulto per modo d'esempio non durerà tanto a leggere quanto un giovane, nè un vecchio quanto un adulto.

Per

Per risparmiare frattanto più che fosse possibile agli organi la fatica, ha il Sapientissimo Iddio providamente ordinato, che gli accrescimenti di questa riescano a proporzione minori di quelli della rigidità.

XXXI. Di maggiore rilievo sono le conseguenze, che derivano dall'alterazione della forza tendente P.

Impariamo dalla formola spettante alle forze infinitamente picciole $\frac{h+P}{8P^2} \cdot f^2 = p$, che le aumentazioni di tensione crescono, o calano con proporzione più rimota di quella, onde all'incontro calano, o crescono le forze tendenti P. In fatti se h variasse nella stessa ragione di P, si troverebbe $\frac{h+P}{8P^2}$ come $\frac{1}{P}$, e l'accrescimento di tensione p starebbe inversamente come la forza stirante P. Ma supponendosi la rigidità h costante, ne segue, che se cala la forza tendente P, la somma $h+P$ è proporzionatamente maggiore di P, e se la detta forza ingrandisce, la quantità $h+P$ è a proporzione minore di P. Perciò rettamente abbiamo asserito, che gli accrescimenti di tensione si corrispondono in una relazione più lontana della reciproca delle forze tendenti. E giacchè la fatica dell'organo sta come $\frac{p}{P}$, si conchiuda, che essendo minima la forza esteriore, più si aumenta, o si minora la fatica dell'organo di quello ricerca la ragione inversa duplicata delle forze tendenti.

Rivolgiamoci all'opposto limite della forza f infinita, e supponendosi, che questa non patisca alterazione, troviamo costante l'incremento di tensione $p = \frac{1}{2} f$. A norma di ciò la fatica dell'organo $\frac{p}{P}$ serberà la ragione reciproca delle forze tendenti P.

Quindi possiamo sicuramente affermare, che quando è finita la forza f, la fatica dell'organo prende regola da una proporzione più lontana della inversa delle forze stiranti.

Ora si capirà la ragione, per cui alle donne infievolite dal parto recente, nelle quali s'è scemata la tensione delle fibre, cagioni stanchezza, e fastidio la forza quantunque moderata del lume, del suono, e degli odori. Gioverà pure a coloro, che si fan cavar sangue, il riparare gli occhi dalla luce soverchia, potendo questa produrre nelle fibre meno tese dell'organo della vista una impressione troppo grande, e nociva.

XXXII. Conchiuderemo questa Annotazione coll' indagare, se la varia lunghezza delle fibre rechi modificazione veruna alla fatica degli organi. Mentre le fibre sieno simili di figura, stirate da forze propor-

zionali alle loro baſi, formate di materia egualmente rigida ; le forze tendenti P, le rigidità h, e le impreſſioni f delle forze eſtrinſeche ſtanno come L^2. Aggiungiamo, che ancora gli accreſcimenti di tenſione p abbracciano la medeſima ragione. Ci ſerviamo quì pure, come altrove abbiamo praticato, d'una dimoſtrazione indiretta. Suppoſti h, f, e $P+p$ come L^2, cerchiamo la proporzione di P, e trovandola anch' eſſa come L^2, inferiamo, che ſe P ſerberà la ragione di L^2, verrà pure queſta accettata da $P+p$, e conſeguentemente ancora da p. Preſa per mano la formula (8) $\frac{P+hf^2}{8.\overline{P+p}^2} = \sqrt{\overline{P+p}^2 - \frac{1}{4}f^2}$ oſſerviamo che nella addotta ſuppoſizione ciaſcuno dei due termini $\frac{hf^2}{8.\overline{P+p}^2}$, $\sqrt{\overline{P+p}^2 - \frac{1}{4}f^2}$ ſta come L^2, e perciò P, che s'eguaglia alla differenza dei termini ſteſſi, ſi ſcopre proporzionale ad L^2, il che ec.

Venendo la fatica dell'organo contraſſegnata dalla frazione $\frac{p}{P}$, ed eſſendo nel noſtro caſo tanto il numeratore, quanto il denominatore come L^2 ; ſi raccoglie, che gli organi e grandi, e piccioli forniti delle deſcritte proprietà ſoſterrebbero una pari fatica.

XXXIII. Che ſe le forze tendenti, e le rigidità non ſi corriſpondono nella ragione delle baſi delle fibre ſimili, ſi verificano le medeſime conſeguenze, che abbiamo ricavate trattando delle fibre egualmente lunghe, e groſſe, ma diverſamente rigide, e teſe. Eſſendo le fibre dei fanciulli proporzionatamente più molli di quelle degli uomini fatti, ſi capiſce il perchè l'organo per eſempio della viſta ſi ſtanchi più facilmente in queſti, che in quelli.

XXXIV. Relativamente a due fibre varie ſolo nella lunghezza, l'impreſſione f delle forze eſterne ſta come L. Le coſe dette nel numero XXIX. ci ammoniſcono, che gli accreſcimenti di tenſione p proporzionali alla fatica del ſenſorio $\frac{p}{P}$ nella preſente ſuppoſizione di P coſtante, abbracciano una ragione media tra f^2, ed f. Ma le forze f ſerbano la relazione della lunghezza L ; dunque la fatica dell'organo ſeguita una proporzione di mezzo fra L^2, ed L.

A norma di ciò paragonati aſſieme due ſenſorj compoſti di fibre del pari groſſe, rigide, e teſe, e diverſe ſolamente nella lunghezza ; quello ſoſterrà maggiore fatica, che ſarà fornito di fibre più lunghe. Finiamo colla rifleſſione, che dipendendo la fatica dell'organo dalla combinazione di più elementi, non ci dobbiamo maravigliare, ſe l'azione del

del medeſimo obbietto eſterno affatichi diverſamente gli organi d'uomini, quantunque ſani, e che nel fiore dell'età ſi ritrovano.

SCHEDIASMA XXVII. (*)

Delle Reſiſtenze.

LA materia, ſopra cui io mi ſono propoſto di ragionare, è circondata per tutti i verſi da un numero così grande di difficoltà, che non ſo, ſe mi verrà fatto di ſtabilire una teorica, la quale riſponda ſe non eſattamente, almeno proſſimamente ai fenomeni. Troveremo per iſtrada alcune verità, che almeno in apparenza vicendevolmente ſi diſtruggono, e vedremo talmente moltiplicarſi, e confonderſi i dati, e le circoſtanze, che faremo aſſai, ſe ci riuſciurà di fiſſare talora i limiti, da cui vengono circoſcritte le leggi della Natura, ed oltre i quali non può eſſa traſcorrere; quantunque dentro queſti confini la ſue operazioni, ſecondo i caſi, in maniere infinite vada variando.

Per coloro, che vogliono aſſumere il malagevole impaccio d'applicare alla Fiſica la Geometria, parmi s'io non prendo errore, che abbia a farſi gran conto del metodo dei limiti, concioſſiachè non può abbaſtanza metterſi in chiaro, quanto ſia differente la Geometria della Natura da quella degli Uomini. Eſſa, che iſtituiſce i ſuoi computi col fatto, non reſta punto imbarazzata nè dalla diverſità dei Canoni, nè dall'accoppiamento degli elementi: laddove l'intelletto umano nè per via di naturale diſcorſo, nè con l'ajuto de'metodi, che ſpeſſe fiate ci

(*) *Non è finito il preſente Schediaſma; imperciocchè promettendo l'Autore di parlare delle reſiſtenze, che dipendono dalla coſtipazione delle parti, dalla tenacità, dal fregamento, e dalla inerzia della materia; non ſi veggono trattati, ſalvo che i due primi punti. Quantunque il Conte Jacopo abbia maneggiata compiutamente queſta materia nel Saggio intorno il ſiſtema dell'univerſo, libro primo, capitolo ſeſto; ciò non oſtante s'è ſtimato bene di non omettere lo Schediaſma XXVII. contenendoſi in eſſo varie avvertenze, che meritano d'eſſer lette. Impariamo da una lettera dell'Autore al Sig. Abate Giuſeppe Suzzi ſcritta l'anno 1732., che gli era riuſcito di ſcoprire, che le reſiſtenze dipendenti dalla inerzia della materia ſtanno tra il quadrato, ed il cubo della velocità. Poco tempo dopo una tale invenzione ha il Conte Jacopo compoſto il preſente Schediaſma, e forſe lo ſcriveva nel Febbrajo del 1733., come ſi conghiettura da una lettera all'Autore del Sig. Conte Giovanni Rizzetti, il quale molto comenda la ſcoperta del metodo dei limiti, di cui nel principio dello Schediaſma moſtra il Conte Jacopo di compiacerſi.*

abbandonano, può reggere allo ſcioglimento di certe quiſtioni, nelle quali c'entrano parecchi dati sì fattamente miſti, e modificati, che in alcune congiunture o ſi rendono del tutto ignoti, o per lo meno difficiliſſimi a maneggiarſi.

In queſta poſitura di coſe io non ſo, e me ne rimetto all' altrui giudizio, ſe debba compiacermi meco medeſimo della maniera, con cui ſoglio farmi ſtrada a sì fatte ſpeculazioni. Il mio artifizio conſiſte in mettermi a conſiderare il lavoro della Natura, quand'eſſa in certi particolari incontri ſi trova, per così dire, obbligata ad operare colla maggiore ſemplicità, mentre facendoſi il tranſito a poco a poco da una legge all'altra, ſecondo che ſi vanno alterando le circoſtanze, regolarmente negli eſtremi ſi rinvengono i Canoni meno compoſti: ma nei caſi di mezzo, a cauſa della miſtione, e combinamento degli elementi, per lo più la coſa ſi riduce a tale, che bene ſpeſſo rieſce malagevole, e talvolta impoſſibile venirne a capo. Se ciò ſuccede, come ſuole frequentemente ſuccedere; egli è manifeſto, che altro partito non ci rimane a prendere, ſuorchè porſi ad inveſtigare le due leggi dei limiti, e con l'ajuto d'eſſe andare in traccia delle intermedie, le quali ſe ci verrà fatto di ſcoprire, avremo conſeguito l'intento; e quando no, ci ſarà almeno conceſſo di far uſo d'una diſcreta approſſimazione dentro a que' termini, ſuori de' quali ſiamo ſicuri, che la Natura operando non eſce; e ſi eſcluderanno altresì tutte quelle leggi, che per via d'una qualche arbitraria ipoteſi ad eſſa ſi ſogliono attribuire.

Ho dato un ſaggio di queſto metodo in parlando generalmente dei Canoni, per cui ſi regolano le comunicazioni dei moti, tanto fra i corpi molli, ed inerti, quanto fra quelli, che ſono dotati di un qualche grado di forza elaſtica; ed ora ne aggiungerò un altro eſempio tolto da quel genere di reſiſtenze, che dipendono dall'inerzia della materia, e nel tempo ſteſſo ſarò vedere, che dandoſi mano una verità con l'altra, dalla teorica della comunicazione dei moti ſi caveranno i canoni, ed i limiti delle mentovate reſiſtenze.

Prima però d' entrare in materia, piacemi d' eſporre brevemente tutto ciò, che in tal propoſito è ſtato pubblicato. Al Galileo ſi debbe la lode d'averci, per dir così, aperte le porte della Fiſica, col metterſi avanti d'ogni altro a riflettere ſeriamente ſulle leggi del moto: e quantunque egli non ignoraſſe, che le ſue regole venivano ſenſibilmente alterate dagli oſtacoli delle reſiſtenze; ad ogni modo non ſi preſe la cura di ridurli a computo, perchè la Geometria a' ſuoi tempi non aveva fatti tali progreſſi, che poteſſe a lui ſervire di ſcorta in ricerche tanto difficili, e delicate. Mancò dunque a queſto grand'uomo il metodo, e non l'ingegno: ed in fatti non molto dopo il celebre Ingleſe VVallis oſſervò, che col mezzo delle ſue ſerie interpolate, quando la reſiſtenza del mezzo fluido ſi ſtabiliſce in ogni punto dello ſpazio traſcorſo proporzionale alla velocità attuale del mobile, ſi poteva rinvenire di paſſo in paſſo la giuſta miſura della velocità decreſcente. Nè credo già, ch' egli ſi perſuadeſſe d'avere a pima viſta ſcoperta la vera legge della

Na-

Natura: ma facendo uſo delle ſue progreſſioni in quella arbitraria ſuppoſizione, a cui adattar ſi potevano, diede altrui motivo di pigliar per mano la materia, e di condurla a qualche maggior perfezione.

Alcune ſperienze fatte colla poſſibile accuratezza anno inſegnato al Sig. Mariotte, che il contraſto fatto da un fluido ad un corpo ſolido non ſeguita la ragione della velocità ſemplice, ma piuttoſto della duplicata, e pareva, che le oſſervazioni veniſſero confermate dal ſeguente raziocinio. Concioſſiachè quanto il mobile più velocemente cammina, altrettanto caccia dal ſuo luogo una maggior copia di fluido, e con maggiore celerità; dunque la reſiſtenza ſta in ragione compoſta della materia fluida meſſa in moto, e della velocità del ſolido, da cui reſta determinata quella del fluido: ma alla predetta celerità è ſempre proporzionale la quantità del liquido, che di paſſo in paſſo viene ſpinta fuori di luogo; dunque la reſiſtenza ſi trova eſſere in ragione duplicata, o come il quadrato di quella velocità, con cui il corpo duro attualmente ſi fa ſtrada a traverſo del mezzo reſiſtente.

Queſta determinazione avvalorata degli eſperimenti, e dalla ragione fu concordemente abbracciata dai Matematici, ſinattantochè l'incomparabile Cavalier Nevvton nelle prime edizioni de' ſuoi Principj s'ingegnò di conciliare inſieme le due differenti ſentenze. Si diede egli a credere, che ſe un ſolido procede a paſſo lento per un mezzo viſcido, e tegnente, la reſiſtenza ſia in ragione della velocità, e che s'alzi al quadrato della velocità ſteſſa, ogni qual volta le particelle componenti la maſſa liquida non ſono fra loro congiunte con ſenſibile adeſione. E perchè forſe non ſi da fluido, i di cui elementi non ſi trovino legati inſieme da qualche tenacità, onde per ſeparargli, e diſtinguerli ci voglia una forza ora minore, ed ora maggiore ſecondo le circoſtanze; ſi fece a conchiudere, che gl'impedimenti, da'quali il moto a poco a poco s'eſtingue, anno ad eſprimerſi per la velocità ſemplice con l'aggiunta del ſuo quadrato, di modo che ſia $R = au + bun$.

Nell'ultima riſtampa poi del citato libro, qualunque ſe ne foſſe la cagione, queſt' Uomo illuſtre cangiò ipoteſi; e fattoſi a conſiderare tre eſſere gl'intoppi, che ritardano il moto dei ſolidi, mentre oltre l'energia della materia fluida, ed oltre la viſcoſità, ponno le minime particole far contraſto colla loro aſprezza, ed opporſi con una ſpezie di fregamento, a tutti e tre queſti diverſi elementi aſſegnò le proprie leggi. Fece dunque coſtante l'oſtacolo, che procede dalla tenacità, e variabili gli altri due, vale a dire quello, che naſce dalla frizione proporzionale alla velocità, ed il principale cagionato dall'inerzia in ragione duplicata della velocità medeſima. Così avraſſi l'intiera reſiſtenza $R = c + au + bun$.

Delle affezioni del moto, e delle conſeguenze, che derivanſi da premeſſi canoni, parecchi valent'Uomini anno fatto parola, ed oltre il lodato Cavalier Nevvton, ci ſi ſono impiegati di propoſito li Signori Leibnizio, Varignone, ed Ermanno, i quali nulla anno traſcurato di ciò, che alla Geometria, ed all'Analiſi s'appartiene: ma quanto a me

deſi-

desidererei, che avessero data di tempo in tempo una qualche occhiata alla Fisica, e si fossero consigliati colla Natura, perhè il trattenersi su certe leggi non dimostrate, e scelte non per altra ragione, se non per essere le più semplici, serve bensì allo scioglimento d' alquante delle più ardue quistioni, ed all' ampliazione dei metodi: ma nulla giova alla spiegazione dei fenomeni, ed all' avanzamento della scienza naturale.

Ho pertanto meco stesso deliberato di non lasciarmi trasportare dalla corrente, ed aprirmi un nuovo sentiero, raccogliendo alcune fondamentali incontrastabili osservazioni, e mettendomi anzi gli occhi ora l'una, ed ora l'altra a suo luogo e tempo, per vedere quali necessarie illazioni abbiano immediatamente a dedursene. Procurerò poscia accoppiando insieme i fenomeni, e le conseguenze, di scoprire le vere leggi, o almeno di restringerle fra loro confini, e mostrare fin dove o per un verso, o per l'altro può giungere la Natura.

Parlerò in primo luogo delle resistenze di que' corpi, che stanno di mezzo tra i duri, e i fluidi, ed in un medesimo tratto anche dei solidi, facendomi a considerare la costipazione delle parti, le ammaccature, la tenacità, ed il fregamento. Quindi passerò ad investigare in qual maniera i due ultimi assegnari elementi possano operare nei mezzi fluidi, e finalmente mi fermerò a stabilire le regole di quella sorta d' ostacoli, che dipendono dalla semplice inerzia della materia.

Delle resistenze, che principalmente dipendono dalla costipazione delle parti.

ESPERIENZA.

Siamo debitori della seguente esperienza ammessa per bella, e per buona da tutti i Geometri alla sagacità del Sig. Marchese Giovanni Poleni pubblico Professore delle Scienze Matematiche nella Università di Padova. Fatta egli fare una cassetta colle sponde alte a misura del bisogno, la riempiè tutta di sevo gelato, e ne spianò accuratamente la superfizie; indi preparò due palle di pari diametro ben tornite, e ben liscíate, e dello stesso metallo per esempio di ottone, una piena, e l'altra vuota. Questa ultima divisa in due emisferi si apriva, e si chiudeva con una spira, per poterci introdurre nel corpo vano alcuni pezzetti di piombo secondo le occorrenze, ed in tal guisa ridurre il peso della prima a quello della seconda in data proporzione.

Poscia lasciata cadere da una determinata altezza la sfera solida sul piano orizzontale del sevo, penetrava essa fino ad un certo segno la materia molle, e cedente, formando la sua buca, di cui si misurava attentamente la profondità. Ma per ottenere, che il globo vuoto escavasse parimente la propria fossa di saetta eguale alla già escavata, si osservava es-

eſſere neceſſario il farlo diſcendere da ſublimità tale, che all'altra già fiſſata foſſe in ragione reciproca dei peſi delle due palle.

Replicata l'eſperienza in molte, e diverſe maniere, ora mutando l'altezza, da cui piombava la sfera ſolida, ed ora variando la gravità della vuota, il fatto ci fa vedere, che in qualunque incontro ha luogo il canone aſſegnato con tanta aggiuſtatezza, quanta mai ſe ne può ſperare dalle oſſervazioni. E giacchè le velocità acquiſtate dai gravi cadenti ſono in ragione dimidiata delle altezze verticali, da cui diſcendono, cioè come le predette altezze, così i quadrati delle velocità; ne ſiegue, che per avere due foſſe ugualmente profonde, fa di meſtieri, che le due palle, quando arrivano a toccare la ſuperfizie del ſevo, ſieno dotate di pari forza computata alla Leibniziana, vale a dire, che ſieno uguali i due prodotti delle maſſe, ovvero dei peſi moltiplicati nei quadrati delle reſpettive celerità.

Sembra, che poſſa aſſumerſi come un aſſioma, che due buche uguali eſcavate in una materia omogenea abbiano a prenderſi per due effetti uguali: ed eſſendo altresì un primo incontraſtabile principio, che due effetti eguali vengano generati da cauſe uguali, mentre ambedue nel produrli tutte s'impiegano, e ſi conſumano, conchiude il lodato Signor Poleni, che mal corriſpondendo gli effetti pari alla diſuguaglianza, che paſſa fra le forze vive, mentre queſte ſi miſurino dalla quantità del moto, debba riceverſi per vera la ſentenza dell'incomparabile Leibnizio, per cui le forze de' corpi in moto reſtano determinate dalle maſſe moltiplicate non già nella velocità ſemplice, ma nella duplicata.

Prima di paſſar oltre, e farmi ad eſaminare le riſpoſte, colle quali i Carteſiani anno tentato di deludere una ſperienza così palpabile; non farà fuori di propoſito, ch'io da eſſa ricavi alcune fondamentali conſeguenze.

PROPOSIZIONE PRIMA.

TEOREMA.

Premeſſo lo ſperimento del Signor Poleni, ſuppongo, che la palla A (Fig. 102.) cadente dall'altezza AC fatta abbia la minima foſſa in C tinta di nero; egli è certo, che nel correre lo ſpazio infinitesimo eguale alla faetta della foſſa medeſima, non perde eſſa palla, e non una parte inaſſegnabile di quella finita velocità, che nella diſceſa per AC ſi aveva acquiſtata; dunque camminerà per detto ſpazio con equabile velocità: ma il tempo, in cui ſi compie il cammino, ſta come lo ſpazio diviſo per la celerità; dunque $\frac{dS}{V} = dT$. Fatto un ſimile diſcorſo intorno la sfera B, che caduta dalla ſublimità BD eſcava in D la ſua picciola foſſa contraddiſtinta con l'inchioſtro eguale alla già eſcavata in

ta in C, avremo $\frac{ds}{u} = dt$: ma le ſaette eſpreſſe per dS, ds ſono eguali per l'ipoteſi, e le due velocità V, u ſono in proporzione dimidiata di AC: BD; le quali altezze ſono per le condizioni della ſperienza in ragione inverſa delle maſſe A; B; dunque $\sqrt{A} : dT :: \sqrt{B} : dt$, o ſia $\sqrt{A} : \sqrt{B} :: dT : dt$; e perciò le minime foſſe uguali in C, e D ſi fanno dalle palle A, B in tempi tali, che ſi trovano eſſere in ragione ſudduplicata delle maſſe A. B.

Ora è coſa facile a dimoſtrarſi, che le velocità perdute da ambe le palle nel formare le foſſette uguali ſono nella medeſima proporzione, in cui ſi rinvengono le celerità U, u; concioſſiachè eſſendo per i noti canoni delle forze continuamente applicate $rdT = -AdU$, ed $rdt = -Bdu$, e per le coſe dette di ſopra $dT : dt :: \sqrt{A} . \sqrt{B}$, ſarà altresì $\frac{1}{\sqrt{A}} : \frac{1}{\sqrt{B}} :: -dU : -du$: ma le radici delle maſſe ſono in ragione reciproca delle velocità in C, e D; dunque $U : u :: -dU : -du$ e conſeguentemente ſaranno nella medeſima proporzione le velocità reſtanti $U - dU$, $u - du$.

Proſeguiſcano i due globi A, B la loro operazione, penetrando per altri due ſpazj uguali contraſſegnati coi punti: e perchè i tempi s'eſprimono per le velocità applicate agli ſpazj traſcorſi, avraſſi $\frac{dS}{U-dU} : \frac{dS}{u-du} :: dT : dt$: ma gli ſpazj per la ipoteſi ſono eguali, e le velocità reſidue ſerbano la ragione reciproca dimidiata delle maſſe, come ſi è dimoſtrato; dunque $\sqrt{A} : \sqrt{B} :: dT : dt$. Quindi ſi proverà, che le celerità reſtanti dopo fatte le ſeconde foſſette, ſaranno in ragione delle primitive U, u; e così di mano in mano collo ſteſſo metodo ſi metterà in chiaro, che facendoſi le terze, e le quarte foſſe uguali, e procedendoſi in ſimil maniera all'infinito, gli elementi del tempo ſi troveranno ſempre come le radici delle maſſe; laonde i tempi intieri impiegati nello ſcavare le buche CE, DF ſaranno in proporzione ſudduplicata delle medeſime maſſe A, B, lo che dovea dimoſtrarſi.

CO-

COROLLARIO.

Dal progreſſo della noſtra dimoſtrazione ſi raccoglie, che preſi ad arbitrio i due punti G, H egualmente diſtanti dalla ſuperfizie del ſevo ſegnati nell'aſſe delle due foſſe, quando le sfere A, B ſaranno pervenute ai predetti punti, conſerveranno in ſe ſteſſe velocità tali, che ſaranno fra loro in ragione, come le velocità primitive U, *u*, o pure in proporzione inverſa ſudduplicata delle maſſe A, B; concioſſiachè i minimi ſtrati eguali in G, ed H oppongono alla diſceſa delle palle una pari reſiſtenza, eſſendo compoſti della ſteſſa materia, e nei predetti ſiti egualmente compreſſa, e coſtipata. Perciò le due ſcale, o curve delle celerità decreſcenti, che principiano nei punti C, D, e terminano coi loro vertici in E, ed F, avranno le ordinate, che corriſpondono a due abſciſſe uguali, in data ragione coſtante.

SCOLIO.

Se vero foſſe, che due piccioli ſtrati di ſevo egualmente groſſi (Fig. 193.) Gg, *Ii* preſi in diverſe diſtanze dalla ſuperfizie, aveſſero una pari denſità, e conſiſtenza; accaderebbe, ch'eſſendo in ogni punto dell'aſſe CE coſtante l'oppoſizione del corpo cedente, e viſcoſo, il quale va di paſſo in paſſo eſtinguendo l'impeto della palla; s'avrebbe per iſcala delle velocità decreſcenti la parabola Apolloniana ELK, e deſcritta come nella figura.

Ma perchè quanto più la sfera ſi profonda nel ſevo, tanto più lo va comprimendo; s'aumenta per queſto capo la reſiſtenza dei ſtrati inferiori più denſi, e più coſtipati relativamente ai ſuperiori. Biſognerebbe per tanto farſi a cercare la legge di queſto accreſcimento, per poter determinare la ſcala delle reſiſtenze, la quale in vece d'eſſere una linea retta parallela all'aſſe CE, degenererebbe in una curva, le di cui applicate principiando da una coſtante riſpondente al punto C, anderebbono ſempre creſcendo ſino alla maſſima, che al punto E apparterrebbe.

Io confeſſo di non avere ſufficienti dati per una tale inveſtigazione, e perciò altro non rimane, fuorchè appigliarſi o all'uno, o all'altro de' due partiti; cioè o prendere la coſa generalmente in qualſivoglia ipoteſi delle reſiſtenze variabili, ſalva però la condizione, e l'andamento della curva locale di ſopra avvertito, o pure ſcegliere la ſuppoſizione più ſemplice delle reſiſtenze coſtanti, traſcurando le picciole aumentazioni naſcenti dalla maggiore coſtipazione. Oltrechè le eſſervazioni ci moſtrano, che il canone dal fatto inſenſibilmente diſcorda; le verità, che ſi anderanno ſcoprendo, ci ſerviranno, per metterè in chiaro un'altro eſperimento da ſoggiungerſi in appreſſo, in cui il condenſamento colla tenacità non ſi accoppia.

PROPOSIZIONE SECONDA.

TEOREMA.

Nella posizione delle resistenze costanti (Fig. 102.) le due sfere A, B di ugual diametro cadenti dalle sublimità AC, BD sopra materie di differente consistenza escavino le buche CE, DF.

Dico in primo luogo, che le profondità di esse buche sono in proporzione diretta delle forze vive AV^2, BU^2, e reciproca delle resistenze R, r. Chiamati S, s gli spazj passati CG, DH, ed u, v le velocità restanti nei punti G, H, avremo per i canoni già dimostrati $-Rd\mathrm{S} = Audu$; $-rds = Bvdv$. Quindi integrando coll'aggiunta delle costanti, $g - \mathrm{RS} = \frac{Au^2}{2}$; $b - rs = \frac{Bv^2}{2}$; ma quando nel principio della immersione sono uguali a zero gli spazj S, s, scopresi $g = \frac{AV^2}{2}$, ed $b = \frac{BU^2}{2}$; dunque $\frac{AU^2}{2} - \mathrm{RS} = \frac{Au^2}{2}$, e $\frac{BU^2}{2} - rs = \frac{Bv^2}{2}$. Compiute poi che sieno le fosse CE, DF, diventano nulle le velocità costanti u, v; dunque $AV^2 = 2\mathrm{RS}$; $BU^2 = 2rs$, e conseguentemente

$\mathrm{S} : s :: \mathrm{CE} : \mathrm{DF} :: \frac{AU^2}{R} : \frac{BU^2}{r}$; il che doveva dimostrarsi.

Dico in secondo luogo essere i tempi T, t, in cui si formano le suddette fosse CE, DF, come le quantità del moto AU, BU divise per le respettive resistenze R, r. Già si sa, che $-RdT = Adu$, e $-rdt = Bdv$; dunque sommando, non ommesse le necessarie costanti, $AV - RT = Au$, e $BU - rt = Bv$: ma terminate le buche, le velocità u, v sono $= 0$; perciò $AV = RT$, e $BU = rt$; laonde

$T : t :: \frac{AV}{R} : \frac{BU}{r}$; il che ec.

CO-

COROLLARIO.

Se alle due proporzioni $T : t :: \frac{AV}{R} : \frac{BU}{r}$; $S : s :: \frac{AV^2}{R} : \frac{BU^2}{r}$ s'aggiungerà la terza $T^2 : t^2 :: \frac{AS}{R} : \frac{RS}{r}$, che dalle prime combinate insieme si deriva, e queste analogie si metteranno a confronto, facendo eguali ora i tempi, ora le resistenze, ora le profondità delle fosse, ora le quantità del moto, ed ora le forze misurate alla maniera del Leibnizio; si scopriranno parecchi Teoremi, che per brevità tralascio, riserbandomi di farne uso secondo le congiunture.

SCOLIO I.

Nello sperimento del Sig. Poleni, in cui s'è adoprato il sevo, e poteva sostituirsi con pari successo la creta molle, il mele, ed ogni altra materia cedente, e viscosa, nasce la resistenza da varj elementi, ed in particolare dall'inerzia del corpo semifluido cacciato di luogo, dalla costipazione delle parti, e dalla loro tenacità. Ma messa in cambio l'arena sottile, o qualche polvere ben macinata, come ha fatto il dottissimo Gravesande, non si diversificano le leggi della Natura; non ostante che tolta affatto di mezzo la tenacità, predomini la costipazione con l'aggiunta di qualche picciolo fregamento.

SCOLIO II.

Nei corpi duri dall'energia della percossa si produce la contusione, che negl'inerti si conserva, e si restituisce o in tutto, o in parte negli elastici: ed è cosa certa, che se la materia, la quale riceve in se stessa l'impeto, persisterà immobile; allora le ammaccature saranno pari, quando si troveranno eguali le forze delle percosse computate alla Leibniziana. Nè deesi avere alcun riguardo alla varia figura dei corpi agenti, da cui viene regolata quella delle contusioni; perchè non ostante qualunque vestigio, che resti nella materia paziente, essendo uguali i colpi, saranno altresì, se non eguali, almeno equivalenti le impressioni: dal qual principio ci si apre la strada di misurare le resistenze di varj corpi differenti fra loro, o per la materia, o per la figura.

Delle reſiſtenze procedenti dalla ſola tenacità.

ESPERIENZA.

Per camminare con paſſo fermo nella preſente ricerca, fa di meſtieri lo ſcegliere alcune ſperienze ſemplici, e per quanto ſi puo eſatte, nelle quali, eſcluſi gli altri elementi, c'entri la ſola tenacità. Abbiamo certi corpi pieghevoli, che ſtanno di mezzo fra i duri, e i molli, compoſti di fibre talmente intralciate, che agevolmente ſi divellono, fra quali il celebre Ingleſe Sig. Deſaguliers ha preſcelti alquanti fogli di carta diſpoſti orizzontalmente in picciole, ed uguali diſtanze, e quanto baſta egualmente ſtirati.

Sieno eſſi fogli collocati, come nella Fig. 104., e facciaſi, che la palla A cadente da varie ſublimità nel mezzo de' predetti ſtrati di carta orizzontali, ne rompa ora più, ed ora meno a miſura della propria forza: ha oſſervato l'Autore, che il numero dei fogli lacerati è proporzionale proſſimamente all'altezza della diſceſa. Per cagion d'eſempio il globo A piombando da uno ſpazio eſpreſſo per l'unità abbia vigore abbaſtanza di ſpezzare tre fogli, e ſul quarto ſi fermi; accaderà, che diſcendendo da una doppia altezza, ne rompa ſei, e da una tripla nove, e così di mano in mano.

Ben è vero, che lo ſperimento in tutti gl'incontri non riſponde preciſamente alla regola; e ciò, perchè nè i fogli ſono egualmente craſſi, nè ugualmente teſi, ed in oltre perchè la forza della palla negli intervalli fra ſtrato e ſtrato viene avvalorata dalla gravità, che non manca di eſercitare la ſua azione, la quale però ſi rende tanto più fievole, quanto i fogli ſono fra loro meno lontani.

Non oſtante ciò lo ſteſſo Sig. Deſaguliers ingenuamente confeſſa, che il ſucceſſo della oſſervazione è favorevole al Leibnizio; accoſtandoſi aſſai da preſſo i due numeri dei fogli ſpezzati a quella proporzione, che paſſa fra i quadrati delle velocità acquiſtate dalla palla A in diſcendendo da due diverſe ſublimità: laddove non anno che fare nè punto, nè poco colle due differenti quantità del moto, o ſia colle forze miſurate alla Carteſiana. In fatti poſte le altezze in ragione tripla, e poſto che la ſfera cadendo dalla ſimpla laceri tre fogli di carta, piombando eſſa dalla tripla, giuſto l'accennata comune opinione, non potrebbe rompere più di cinque fogli, e ſul feſto ſi fermerebbe; eſſendo come $1 : \sqrt{3} :: 3 : \sqrt{27} = \frac{5\ 1}{5}$ proſſimamente; e pure l'eſperienza ci fa vedere, che ordinariamente ne ſpezza nove, ed al decimo s'appoggia.

Lo Scrittore Ingleſe per tirarſi d'impaccio, e ſatisfare in qualche maniera alla difficoltà naſcente dal fatto ricorre opportunamente al tempo, rendendoci avvertiti, che quanto la palla cammina più celere; altrettanto nel farſi ſtrada a traverſo d'un foglio tempo minore ci ſpende. Di queſta eccezione, o piuttoſto pregiudizio ci occorrerà di ragionare a ſuo luogo: intanto io noto, che non tutta l'energia della ſfera A s'impiega a rompere i fogli, ma una porzione ſe ne dee ſpendere nello ſtirare quelle fibre, che lacerate non vengono, e che ſono tanto manco ſoggette all'azione, quanto più ſi diſcoſtano dal ſito di mezzo, in cui ſi fa la percoſſa. Da sì fatta diſtribuzione però non reſta punto turbata l'eſperienza; atteſochè ſebbene l'azione ſi divide in due parti, una delle quali ſi conſuma in rompere parecchie fibre, e l'altra in iſtendere il rimanente, ad ogni modo nell'uno, e nell'altro effetto s'impiegano forze tali, che ſerbano fra loro una ragione coſtante, ed è ſempre pari la reſiſtenza, per cui ognuno dei ſogli al vigore dell'azione fa contraſto.

PROPOSIZIONE TERZA.

PROBLEMA.

Trovare le velocità decreſcenti d'una palla, la quale diſcendendo da una determinata altezza rompa un dato numero di fogli.

La ſfera A cadente dalla ſublimità AE abbia tanto vigore, quanto baſti a rompere li quattro fogli di carta contraſſegnati nella Figura 105. colli numeri 1, 2, 3, 4, compiuto il qual'effetto, perda eſſa tutto il ſuo moto. Colla retta orizzontale A*a* ſi eſponga la velocità della palla nel punto E, in cui giunge a toccare il primo ſtrato, ſenza per anco aver eſercitata alcunà azione, e dividaſi in quattro parti eguali la verticale AE.

Perchè il globo A, dopo lacerato il primo foglio, conſerva una forza ſufficiente per romperne altri tre, agirà contro il ſecondo con tanta velocità, come ſe foſſe diſceſo dall'altezza BE. S'eſprima queſta velocità per la retta B*b*, ed eſſendo le predette celerità A*a*, B*b* in ragione ſuddupplicata degli ſpazj paſſati AE, BE, ne ſiegue, che il punto *b* ſarà ad una parabola, che abbia il ſuo vertice in E, e paſſi per il punto *a*.

Similmente dopo rotto il ſecondo foglio, mantiene in ſe la ſfera A il vigore di ſpezzarne altri due, e perciò eſerciterà la ſua azione contro il terzo, come ſe foſſe caduta dalla ſublimità CE, e conſeguentemente queſta celerità ci verrà rappreſentata dalla ordinata C*c* appartenente alla parabola già deſcritta. Camminando in tal guiſa la faccenda, avremo per iſcala delle velocità decreſcenti nel rompere, che fa la palla ſucceſſivamente alquanti fogli di carta, una curva parabolica Apolloniana, lo che ec.

CO-

COROLLARIO I.

Tirate le linee *bf*, *cg*, *db* parallele all'asse AE, determineremo la velocità *af* perduta dalla sfera nel rompere il primo foglio, la *bg* similmente perduta nel rompere il secondo, e così di mano in mano: ma per la natura della parabola si fa essere *af* minore di *bg*, e *bg* minore di *cb*; dunque quanto la palla cammina con maggiore celerità, tanto meno ne perde in lacerando i fogli disposti in serie, e producendo effetti pari. Tutto all'opposto interviene in quella sorta di resistenze, che dipendono dall'inerzia della materia, come a suo luogo dimostreremo.

COROLLARIO II.

Perciò la forza viva della sfera A computata alla Leibniziana, la quale si trova essere come i quadrati delle applicate A*a*, B*b*, C*c*, ec. decresce aritmeticamente, come altresì nella medesima progressione va ricrescendo la forza di passo in passo perduta. Ora perchè un foglio mai non si spezza, se prima le sue fibre non sono ridotte ad un certo stato di stiramento, per il qual effetto ci vogliono forze uguali; è cosa chiara, che il corpo A nel rompere parecchj fogli un dopo l'altro, perde in ciascheduna azione un pari grado della propria forza, ed in conseguenza si esperimenta sempre uguale la resistenza, che procede dalla tenacità dei fogli supposti della stessa materia, e di pari crassizie, qualunque possa essere la massa, la figura, e la velocità del mobile.

COROLLARIO III.

I tempi seguitano la proporzione della velocità perduta; di maniera che, se dalla intercetta *fa* ci viene rappresentato il tempo, in cui si rompe il primo foglio, le altre *gb*, *bc*, ec. ci determinano i tempi impiegati a spezzare il secondo, ed il terzo strato. Quindi i tempi consumati in produrre il totale effetto restano espressi dalle applicate A*a*, B*b*, cc. mentre però la massa del globo A non patisca alterazione.

COROLLARIO IV.

Considerata la cosa più generalmente, se prenderemo due sfere di ugual volume, e di differente peso, e le lascieremo cadere da varie altezze, chiamate le masse M, *m*, le sublimità S, *s*, i numeri dei so-

fogli rotti N, *n*, i tempi ſpeſi nel produrre gli effetti intieri T, *t* (con queſto però, che le palle, compiute le loro operazioni, reſtino affatto prive di forza, e non ſi mettano in conto i tempi impiegati nello ſcorrere con celerità proſſimamente equabile ognuno de' piccioli intervalli tra foglio, e foglio) avremo le ſeguenti analogie

$N : n :: MU^2 : mU^2 :: MS : ms$ con parecchie altre, che dal

$T : t :: MU : mU :: \sqrt{MN} : \sqrt{mn}$

combinamento delle accennate poſſono agevolmente dedurſi.

ANNOTAZIONE PRIMA.

Da quanto ſin ora s'è detto, e dimoſtrato, haſſi ſecondo me a cavare una concluſione principale, ed è, che nell'una, e nell'altra ſperienza gli effetti generati mal corriſpondono alle forze vive acquiſtate dalle palle cadenti, ſe queſte forze ſi miſurano dalle quantità del moto, o dalle maſſe moltiplicate nelle velocità. E ſe così va la faccenda, fa di meſtieri ricorrere al ſutterfugio del tempo, e ſopra di ciò farſi ad aſcoltare con attenzione le ſottigliezze, con cui i Carteſiani, ed i Nevvtoniani tentano di ſatisfare alla oppoſizione.

Penſano, che la forza viva abbia a diſtinguerſi dall'azione, intendendo per forza quella quantità di moto, che nel mobile attualmente riſiede, e per azione la forza medeſima modificata dal tempo conſumato in produrre l'effetto intiero. Alla ſola forza non debbe attribuirſi l'operazione; ma bensì alla forza congiunta col tempo, venendo dal combinamento di queſti elementi determinata l'energia dell'azione, e conſeguentemente la quantità dell' effetto, che ad eſſa in ogn' incontro ſi trova eſſere proporzionale. E quì come ſe la loro ingegnoſa ſpecolazione doveſſe eſſere ricevuta per un primo principio, o per una verità chiaramente dimoſtrata, fanno le maraviglie, come mai il dottiſſimo Leibnizio abbia potuto traſcurare la conſiderazione dei tempi, e ſia caduto in un errore sì manifeſto, che non ammette nè difeſa, nè ſcuſa.

ANNOTAZIONE SECONDA.

Il celebre Sig. Crouſaz ſi è il primo, che ſia pervenuto a mia notizia, il quale per mettere a coperto la ſentenza dei Carteſiani, e nel tempo medeſimo ſalvare la debita analogia tra la cagione, e l'effetto, s'è ingegnato di ſpiegare lo ſperimento del Signor Poleni nella ſeguente maniera.

Voleva egli, che la ſfera A più peſante (Fig. 102.) impiegaſſe minor tempo nell'eſcavare la ſua foſſa, di quello faceſſe l'altra più leggiera B nel profondare la propria buca, e che queſti tempi ſerbaſſero la proporzione delle velocità acquiſtate nei punti C, D, e foſſero in ragione inverſa dimidiata delle maſſe A, B. La coſa ſta tutto al ro-

ve-

veſcio, come ho fatto chiaramente vedere nella Propoſizione ſeconda; nè credo, che molto ci voglia a capire, anche ſenza l'ajuto della Geometria, che di due palle atte ad eſcavare due foſſe uguali, quella ci ſpenderà minor tempo, che principia ad internarſi nella materia cedente con maggiore celerità.

Miſurando per tanto il citato Sig. Crouſaz ambe le azioni colle maſſe moltiplicate prima nelle velocità acquiſtate, indi ne' tempi conſumati nel formare le buche, i quali tempi a parer ſuo ſono proporzionali a quelli delle cadute, eſprime malamente il vigore d'ambe eſſe azioni per i prodotti AUT, BUt, che ſuppone fra loro eguali, e conſeguentemente capaci di generare effetti pari, quantunque ſieno queſti ſenza fallo in ragione delle maſſe A, B; ſtantechè le celerità V, U nel caſo noſtro ſono reciprocamente come i tempi T, t. Toccherà dunque a lui lo ſpiegare, qualmente due azioni, che ponno determinarſi in qualſivoglia proporzione, producano due foſſe, o due effetti uguali, e come ſuſſiſta la neceſſaria corriſpondenza, che dee paſſare fra la cagione generatrice, e l'effetto generato.

ANNOTAZIONE TERZA.

Ma ſe applicando il tempo alla maniera del Sig. Crouſaz nell'eſempio, che abbiam per le mani, in vece di toglierſi, s'accreſce l'inconveniente; veggiamo, ſe poſſa riuſcir meglio la coſa, adattandolo in un modo diverſo conforme il ſentimento degl' Ingleſi.

Atteſo che le velocità V, U ſi ſcoprono eſſere reciprocamente come $\sqrt{A} : \sqrt{B}$; le quantità del moto, o le forze Carteſiane faranno direttamente nella medeſima proporzione. Ma gli effetti generati, o ſieno le foſſe eſcavate ſi trovano uguali, dunque ſa di meſtieri modificare in maniera per mezzo dei tempi, o per qualche altra ſtrada le predette quantità del moto, che ſi riducano all'egualità; acciocchè la cagione ſerbi coll'effetto la debita analogia. Può farſi ciò in due modi, o moltiplicandole nelle velocità, o dividendole per i tempi; eſſendoſi dimoſtrato, che queſti ſono in ragione diretta dimidiata delle maſſe. Nel primo caſo abbiamo i prodotti uguali AV^2, BU^2, e conſeguentemente le forze vive miſurate giuſta la ſentenza del Leibnizio, e come richiede lo ſperimento. Nel ſecondo c'è l'uguaglianza fra le due frazioni $\frac{AV}{T}$, $\frac{BU}{t}$, e di queſta ipoteſi ſi vale l'acutiſſimo Signor Pemberton, per render qualche ragione del Fenomeno, intorno cui ſi fa parola.

Parmi, che il Sig. Crouſaz, ſebbene prendeva un graviſſimo sbaglio nella determinazione dei tempi, ciò non oſtante la diſcorreſſe aſſai più coerentemente ai principj della ſua ſcuola, in ſupponendo, che quanto più dura l'azione, tanto più la forza agente venga avvalorata dal

tempo: tutto all'opposto dell'Autore Ingleſe, il quale per adattarſi piuttosto al biſogno, che alla verità, penſa, che quanto è più lungo il tempo dell'azione, altrettanto ſi diminuiſca l'effetto prodotto dalla forza agente; coſicchè i tempi abbiano ad ajutare non già la forza viva operante, ma la morta reſiſtente. Perciò poſte uguali dall'una, e dall'altra parte le reſiſtenze, eſſendo come RT : Rt :: AV : BU, ſi pretende, che ſi generino effetti pari, e ſi formino foſſe uguali; perchè le reſiſtenze corroborate dai tempi, nel mentre che ſi percorrono ſpazj eguali nella materia tenace, diſtruggono quantità di moto ad eſſe proporzionali.

Il diviſamento di avvalorare colla durata del tempo la reazione in cambio dell'azione, rieſce per mera fortuna nel caſo noſtro: ma in altri incontri va a terminare in aſſurdi manifeſti. E per metterne ſotto gli occhi un eſempio, diceva il Leibnizio, che tanta forza ci vuole per far ſalire la maſſa quattro ad un'altezza eſpreſſa per l'unità, quanta ſe ne richiede per far aſcendere la maſſa = 1 all'altezza quattro: ma ſpiegando io in alto la maſſa quattro colla velocità = 1, monta eſſa alla ſublimità ſimpla, e gittando in ſu la maſſa = 1 colla velocità = 2, ſale eſſa all'altezza quadrupla; dunque ſono dotati di egual forza due gravi, le maſſe de' quali ſtanno in ragione come 1: 4, e le velocità all'incontro come 2: 1; ma l'uguaglianza non può conſeguirſi, ſe le forze non ſono fra loro in proporzione compoſta, ſemplice delle maſſe, e duplicata delle velocità; dunque le forze vive ſi miſurano per i quadrati delle velocità moltiplicati nelle maſſe.

Alla premeſſa rifleſſione del Leibnizio coſa riſpondono concordemente i ſuoi Avverſarj? Non negano, che l'effetto delle due differenti ſalite, cioè della maſſa m alla ſublimità $\frac{1}{m}$, e della maſſa $\frac{1}{m}$ all'altezza m ſia un effetto pari, in cui debba egual vigore impiegarſi: ſoggiungono bensì baſtare, che la velocità del grave, il quale comincia ad aſcendere più celere, ſia appunto alla velocità del più lento come $\sqrt{m} : \frac{1}{\sqrt{m}}$; e ciò perchè oltre le maſſe, e le celerità, anno anche a computarſi i tempi delle ſalite. La maſſa m s'eſtolle alla ſublimità $\frac{1}{m}$, principiando ad aſcendere colla velocità $\frac{1}{\sqrt{m}}$, e compiendo la ſalita nel tempo $\frac{1}{\sqrt{m}}$: laddove all'incontro la maſſa $\frac{1}{m}$ comincia il ſuo moto colla ce-

celerità $\sqrt{m}$, ed impiegandoci il tempo espresso per $\sqrt{m}$ monta alla sublimità m. Ora moltiplicando ambo le masse respettivamente nelle velocità impresse, e nei tempi dell' azioni, cioè $m \cdot \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{m}}$, e $\frac{1}{m} \cdot \sqrt{m} \cdot \sqrt{m}$, avremo prodotti, e conseguentemente effetti eguali.

Io non mi fermo ad esaminare il valore della risposta, che dai Cartesiani si adatta agli elastri del Sig. Giovanni Bernoulli, ed a cento altri casi simili: mi so semplicemente ad avvertire, che nella sperienza del Sig. Poleni la maggior forza produce un effetto pari a quello della minore non per altra ragione, se non perchè ci consuma più tempo a produrlo. Tutto al rovescio nell' esempio del Leibnizio la forza più debole per lo medesimo motivo, che più tempo c'impiega, genera un effetto eguale a quello della più robusta.

Per sostenere in qualche modo la comune opinione, bisogna necessariamente dire, che nel primo caso il tempo più lungo avvalori la resistenza del sevo, e stia dalla parte della reazione; e nel secondo, che in vece di avvalorare la reazione della gravità, la quale come fa la tenacità del sevo, va anch'essa estinguendo la forza del grave ascendente, si disponga non si sa come a corroborare l' azione del mobile.

Forse è d'uopo aver riguardo non mica alla maggiore, o minor forza, che nel corpo agente risiede, ma piuttosto a qualche altra ignota circostanza, per distinguere qual parte venga favorita dal tempo, e per sapere s'esso computar si debba in ajuto dell' azione, o della reazione: ed io intanto aspetterò, che dagli Avversarj del Leibnizio, per non incorrere in qualche equivocazione, me ne venga assegnato il generale, e vero criterio.

ANNOTAZIONE QUARTA.

Questa incostanza di operare mi ha fatto cadere in sospetto esserci in sì fatte ricerche nascosta una qualche grande ambiguità: sebbene essa non è tanto occulta, che un occhio alquanto attento non giunga facilmente a scoprirla. L'equivoco consiste in ciò, che il tempo non ci ha punto che fare, o se pure c'entra, ha egli da entrarci tanto dalla parte dell' azione, quanto della reazione, il che è lo stesso, come se nè per l'una, nè per l'altra parte c'entrasse.

E' cosa manifesta, che le due palle A, B (Fig. 102.) perdono tutte le loro forze acquistate nelle discese, in formando le due fosse uguali CE, DF; mentre la materia cedente a poco a poco va estenuando le suddette forze, fino ad estinguerle intieramente. Ben è vero, che la sfera A consuma più tempo in escavar la sua buca, di quello faccia la palla B,

e

e queſti tempi ſono in ragione dimidiata delle maſſe: ma è altrettanto vero, che la reſiſtenza del ſevo contenuto nella foſſa CE fa per più tempo contraſto all' azione della palla A, ed il ſevo della buca DF per minor tempo ſi oppone all'azione della ſfera B; dunque s' io metto in conto la durata dell' azione, non debbo ommettere quella della reazione; e ſe la prima avvalora la forza agente, la ſeconda del pari avvalora la reſiſtente.

Egli è un aſſioma ricevuto da tutti i Fiſici, e Matematici, che l'azione è ſempre uguale, e contraria alla reazione; dunque ciò ſi verifica in qualunque elemento di tempo; dunque anche nei tempi intieri, ne' quali l'azione, e la reazione ſi compie, ha luogo lo ſteſſo canone. Quindi ſe per cagion d' eſempio la forza F ſi equilibra colla reſiſtenza R in qualunque tempo T, dico, che un altra forza eguale in qualſivoglia altro tempo t vincerà un'altra reſiſtenza equivalente, nè potrà mai ſuperarne una maggiore, nè laſciarſi eſtinguere da una minore.

ANNOTAZIONE QUINTA.

Se la preſente materia aveſſe biſogno d' una più chiara dilucidazione; facciaſi, che le tante volte nominate due ſfere A, B abbiano in diſcendendo acquiſtate due quantità di moto ad arbitrio AV, BU: e giacchè i tempi ſpeſi nella eſcavazione delle due buche ſeguitano la proporzione delle quantità ſteſſe; ne ſiegue, che fatto uſo dei tempi giuſta l'ipoteſi del Sig. Crouſaz, le azioni, e conſeguentemente gli effetti prodotti, o ſia le profondità delle foſſe avrebbono ad eſſere in ragione compoſta, duplicata delle maſſe, ed altresì duplicata delle velocità, cioè come $AVT : BUt$, ovvero come $A^2V^2 : B^2U^2$: lo che non può mai verificarſi, fuorchè nell'unico caſo, in cui ſieno eguali le maſſe; mentre allora lo ſperimento non diſcordando dalla teorica, ci fa vedere, che le ſaette delle buche ſono proporzionali ai quadrati delle celerità.

All'oppoſto ſe il tempo s'applica ad avvalorare le reſiſtenze; ſeguitando le veſtigia del Sig. Pemberton, ſcopriremo una generale uguaglianza fra le due frazioni $\frac{AV}{T}$, $\frac{BU}{t}$, ed in ordine a ciò dovrebbono eſſere uguali tutti gli effetti; coſicchè due palle di pari diametro o gravi, o leggiere, e cadenti da qualſivoglia altezza avrebbono ſempre ad internarſi egualmente nel ſevo, e formare due foſſe ugualmente cupe. E pure la ragione c'inſegna eſſere queſto un manifeſtiſſimo aſſurdo, e l'oſſervazione ci ammoniſce ciò non aver luogo, ſe non nell'unico incontro, che i quadrati delle velocità ſieno in ragione inverſa delle maſſe. L'equivocazione dello Scrittore Ingleſe è nata dal non aver egli eſteſo il ſuo computo a tutti i caſi, ma ſolamente a quell' unico, in cui per mera fortuna l'eſperienza non era ripugnante alla ſua concluſione.

Supponiamo, che ſieno eguali le quantità del moto AV, BU, e conſeguentemente anche i tempi T, *t*, ne' quali ſi eſcavano le due foſſe CE, DF: ma le profondità delle foſſe ſteſſe ſaranno ineguali, ed in proporzione come le velocità V, U, ovvero reciprocamente come le maſſe A, B, la qual ragione può determinarſi a piacere.

Ora io dimando in che modo poſſa mai ſuccedere, che due forze eguali in ſentenza degli Avverſarj, operanti in tempi parimente uguali producano effetti tanto diverſi; perchè il ſenſo comune m'inſegna, che ſtando tutte le coſe pari, maggior forza ci voglia ad eſcavare una buca, quanto eſſa è più profonda. Nè giova in tale incontro ricorrere ai tempi; concioſſiachè adattandoli alle forze agenti, o alle reſiſtenti, ſtante l'uguaglianza notata, niun profitto ſe ne ritragge, e queſta egualità ſi mantiene ſempre la ſteſſa non ſolo fra i tempi intieri, ma di più fra le loro fluſſioni. Altro dunque non rimane, ſe non valerſi della regola Leibniziana; mentre così troveremo le ſaette delle buche proporzionali alle forze vive, ed all'energia delle cauſe riſpondere ottimamente gli effetti.

ANNOTAZIONE SESTA.

Credeva il Sig. Deſaguliers, che la ſperienza dei fogli di carta da lui tentata per contrapporla a quella del Sig. Poleni, veduto il ſucceſſo mal corriſpondere all'impegno, e all'eſpettazione, doveſſe col ſolito ſutterfugio del tempo accomodarſi all'ipoteſi Carteſiana. Ma ſembra a me non eſſerci forſe ſperimento, che più di queſto moſtri gli aſſurdi, che in via di conſeguenze ſi deducono dalla comune ſentenza. Veggiamolo in una particolare ſuppoſizione.

Prendaſi la palla A (Fig. 106.) la di cui maſſa ſia M, e ſi laſci cadere dall'altezza A*a* eſpoſta per l'unità, onde ſia parimente M il numero dei fogli rotti. Abbiaſi la ſeconda ſfera B più leggiera di maſſa *m*, ed iſtituita l'analogia *m*: M:. A*a*: B*b*, diſcenda queſta dalla ſublimità B*b*, nel qual caſo per le coſe dette di ſopra romperanno eſſe palle un numero pari di fogli. Pongo in uſo il terzo globo C uguale in maſſa al globo A, ma che cada dall'altezza C*c* = C*b*; coſicchè il numero de' fogli rotti riſpetto agli altri lacerati dalla palla A, ovvero B ſtia in ragione, come gli ſpazj traſcorſi C*c*. A*a*.

Fatta queſta preparazione, mi metto a confrontare le azioni delle due ſfere A, B, delle quali ſono pari gli effetti. La ſublimità B*b* ci viene eſpreſſa dalla frazione $\frac{M}{m}$, la velocità del corpo B nel punto *b* per $\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{m}}$, la ſua quantità di moto per *m* $\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{m}} = \sqrt{M}\sqrt{m}$, alla qual

gran-

grandezza è ſempre proporzionale il tempo ſpeſo nella rottura dei fogli. All'incontro abbiamo nella palla A tanto la quantità del moto, quanto il tempo dell'effetto intiero eſpoſto egualmente per M.

Ora perchè l'eſperienza ci fa vedere, che le predette due sfere A, B acquiſtano in virtù delle difceſe tanta energia, quanta baſta a lacerare un numero eguale di fogli; ſe deeſi aver riguardo alla corriſpondenza fra la cagione, e l'effetto, abbiamo a conchiudere, che ſe non ſono eguali le forze vive, lo ſieno almanco le azioni. Ma nella noſtra poſizione le quantità del moto ſi riſpondono in ragione dimidiata delle maſſe, come altresì i tempi, ne' quali gli effetti ſi compiono; dunque ſe dietro le veſtigia del Sig. Crouſaz, e degli altri Carteſiani io moltiplico le forze vive nei tempi, mi ſi preſentano le azioni in proporzione ſemplice delle maſſe, alla quale non adattandoſi in conto alcuno gli effetti prodotti, è d'uopo, che per non urtare nell'aſſurdo, mi diſponga ad abbracciare il parere del Sig. Pemberton, dividendo le quantità del moto per i tempi, e facendo, che i tempi medeſimi in cambio delle forze vive avvalorino le reſiſtenze. Così eſſendo $\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{M}} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}}$, ed eguali in conſeguenza le azioni, ſi manterrà ferma l'analogia fra le cagioni, e gli effetti.

In tal maniera cammina la faccenda nel caſo propoſto. Frattanto s'io mi volgo a paragonare inſieme gli ſforzi delle due palle A, C trovo, che per eſſere elleno di pari maſſa, il numero dei fogli ſpezzati è proporzionale alle ſublimità Aa, Cc, e che le quantità del moto, ed i tempi ſono in ragione ſudduplicata delle ſteſſe ſublimità, o come $1 : \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{m}}$. S'io mi ſervo dell'artificio adoperato nell'eſemplo antecedente, e che divido giuſta il metodo del Sig. Pemberton le forze vive Carteſiane per i tempi corriſpondenti, computandoli dalla parte delle reſiſtenze; le azioni, che in tal modo diventano eguali, avrebbono a produrre effetti uguali, e non mai proporzionali alle altezze delle cadute, conforme l'eſperienza c'inſegna. Ed ecco che per iſcanſare l'inconveniente, fa di meſtieri, ch'io mi dichiari del partito del Sig. Crouſaz, corroborando le quantità del moto, o le forze agenti con l'ajuto dei tempi; mentr'eſſendo allora le azioni, ed in conſeguenza gli effetti in ragione duplicata di $1 : \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{m}}$, o come $1 : \frac{M}{m}$, avremo i nu-

meri

meri degli ſtrati rotti proporzionali alle ſublimità, e la teorica s'accorderà coll'oſſervazione.

A queſto paſſo ho ben giuſto motivo di maravigliarmi, e di mettere in conſiderazione il gran giudizio, ed il diſcernimento, di cui debbe eſſere dotato il tempo, che accompagna l'azione della ſfera A; concioſſiachè, ſe metteſi a confronto il ſuo effetto con quello della palla B, è neceſſario, che il tempo abbia tanta diſcrezione di avvalorare la reſiſtenza, udita però prima, e ben'imparata la lezione del Signor Pemberton. Quando poi ſi tratta di far paragone tra le azioni, e gli effetti de'due globi A, C, biſogna, che il tempo mutata opinione, ſecondo la maſſima del Sig. Crouſaz ſi diſponga a metterſi dalla parte della forza agente, e s'ingegni a tutto potere di corroborarla, perchè non naſca un qualche moſtro in Natura.

Il peggio ſi è, che ſpeſſe fiate il tempo non ſa che partito prendere, come chiaramente appare in paragonando gli ſforzi, e gli effetti delle palle B, C; atteſochè eſſendo eguali le altezze *Cc*, *Bb*, e conſeguentemente le velocità V, U, accade, che le forze vive ſeguitino la proporzione delle maſſe in qualunque ipoteſi, nella qual ragione ſi trovano eſſere anche i tempi, e gli effetti. Non ponno dunque i tempi applicarſi nè alle forze vive agenti, nè alle morte reſiſtenti; perchè nel primo caſo le azioni, e gli effetti, che ad eſſe riſpondono, ſarebbono come i quadrati delle maſſe, e nel ſecondo eguali: all'una, e all'altra delle quali concluſioni manifeſtamente ripugna l'eſperienza.

Nè giova il far paſſaggio dalle quantità finite alle infinitamente picciole; mentre ci ſi fanno incontro i medeſimi inconvenienti, come ne reſterà pienamente convinto, chi ſi prenderà la briga di farne il calcolo. Reſta per tanto, che ſi torni ad inculcare ciò, che altre volte s'è inſinuato, che non potendoſi far uſo del tempo, ſe non ſi adatta egualmente all'azione, ed alla reazione, ſenza incorrere in paralogiſmo, ſiamo in piena libertà di traſcurare queſto elemento in qualunque incontro; purchè non ſi prenda errore nella eſtimazione delle forze vive, che ſono ſempre come le maſſe moltiplicate nei quadrati delle attuali velocità.

SCHE-

SCHEDIASMA XXVIII.

Della Forza, colla quale i corpi fluidi urtano nei ſolidi, o ſia della Reſiſtenza, con cui i mezzi fluidi s' oppongono al moto dei ſolidi.

NOn è egli una coſa ſtravagante, che i Carteſiani, e i Leibniziani, i quali ſono fra loro tanto diſcordi nel determinare la vera miſura delle forze vive, facendola i primi in ragione ſemplice delle velocità, ed i ſecondi in duplicata; non oſtante ciò talvolta ſi porgono amichevolmente la mano, e convengono in parecchie concluſioni, che ſiccome dipendono certamente dai loro principj, così con differenti mezzi dovrebbono eſſere dimoſtrate? Io per me credo, e ne ſono rimaſo appieno convinto in leggendo alcune Diſſertazioni uſcite alla luce in queſti ultimi tempi, che i Fautori della ſentenza Leibniziana non abbiano bene ſcandagliato il fondo della materia, e che nelle loro poſizioni frequentemente ſi contraddicano, con che a taluno anno fatto credere, che la Natura in differenti caſi metta in opera leggi diverſe, ed in queſto ſolo incontro ſi dimentichi della ſua coſtanza, e della ſua ſemplicità.

Per cagion d'eſempio tutti queſti Signori dimoſtrano le leggi della comunicazione del moto fra i corpi molli, ed inerti, o per via del centro di gravità, che non muta nè velocità, nè direzione, o aſſumendo, che tanto avanti, quanto dopo l'urto la ſteſſa quantità di moto ſi conſervi, ſenza mai far parola delle forze vive proporzionali, ſecondo la loro opinione, ai quadrati delle velocità. Niuno (trattone il Sig. Graveſande, il quale però non ha meſſo in chiaro la faccenda quanto baſta) mette in conſiderazione quella porzione di forza viva, che nella colliſione dei corpi molli in tutto, o in parte s'eſtingue, impiegandoſi nelle mutue contuſioni, e nell'alterar la figura dei corpi medeſimi, paſſando in queſta guiſa ad eſſere forza morta, la quale ſe talora viene per così dire a riſuſcitare, come accade nei corpi elaſtici, ci fa chiaramente comprendere verificarſi nell'uno, e nell'altro caſo il canone del Leibnizio.

A di-

(*) *Fu compoſto queſto Schediaſma l'anno* 1730., *come chiaramente appariſce da una lettera dell' Autore al Sig. Abate Giuſeppe Suzzi, e da varie riſpoſte dello ſteſſo Sig. Abate. Il Padre Vincenzo Riccati lo ha inſerito nel ſuo Dialogo ſopra le forze vive, e ſopra le azioni delle forze morte ſtampato in Bologna l'anno* 1749. *Così parla l' Interlocutor Lelio alla pagina* 386. „ *Non devo ricevere quella lode, che non è* „ *mia. Tutta queſta ſpeculazione m'è ſtata ſuggerita, e privatamen-* „ *te comunicata dal Conte Jacopo Riccati.*

A diſegno io mi ſervo di queſto eſempio, dipendendo da eſſo una buona parte di ciò, che ſono per dire. Tutti i Matematici concordano, che l'azione d'un fluido contro un corpo duro abbia a miſurarſi colla maſſa del fluido ſteſſo moltiplicata nel quadrato della velocità. Tutti altresì confeſſano ſuccedere lo ſteſſo effetto, o che il fluido percuota il corpo duro, o che il corpo cammini con pari celerità per lo fluido ſtagnante. Quanto alla ſeconda propoſizione può eſſa paſſare per un aſſioma, ma della prima non è ſtata data ſin ora una compiuta dimoſtrazione.

Il Sig. Mariotte la diſcorreva nella ſeguente maniera. La forza d'un fluido è tanto maggiore, quanto è più grande la velocità, con cui le ſue particelle ſi muovono; dunque da un canto queſta forza è proporzionale alla velocità medeſima: ma dall'altro canto ſe nel fluido viene accreſciuta la celerità, con un maggior numero delle ſue parti in un dato tempo percuote il ſolido, e queſto numero di parti percotenti ſerba la ragione della velocità ſteſſa; dunque conſiderati i due elementi, l'azione intera del fluido ſarà in proporzione compoſta della ſua velocità, e del numero delle parti, che agiſcono nel tempo dato, vale a dire in ragione duplicata della velocità medeſima.

Pare, che i Leibniziani non doveſſero ammettere l'addotta dimoſtrazione, e taluno potrebbe perſuaderſi, che a norma dei loro principj s'aveſſe piuttoſto a diſcorrere così. L'azione del fluido ſi miſura dalla forza della percoſſa, e dal numero delle particelle, dalle quali in un dato tempo il corpo duro viene percoſſo: ma queſto numero ſta in ragione della velocità ſteſſa; dunque l'intera azione del fluido è proporzionale al cubo, e non al quadrato della velocità.

Chi in tal guiſa penſaſſe, anderebbe errato di lunga mano; ma per ſatisfare alla difficoltà, che ſembra a prima viſta inſuperabile, è d'uopo dimoſtrare il ſeguente

TEOREMA.

Le azioni d'un fluido, che urta in un corpo duro con differenti velocità, o quelle d'un ſolido, che cammina con velocità diverſe per un fluido quieto, ſono in ragione dei quadrati delle velocità ſteſſe.

Sia il paralellepipedo ABC (Fig. 107.), il quale cominci a muoverſi con una data velocità per un fluido ſtagnante, ed avanzi cammino per lo ſpazio infinitamente piccolo BE: egli è certo, che in virtù di queſto moto viene cacciato di luogo il fluido contenuto nel ſito BH, e viene ſpinto innanzi colla ſteſſa velocità, con cui il ſolido di paſſo in paſſo cammina, non eſſendoci altra differenza fra la velocità del ſolido prima dell'urto, e quella del ſolido, e del fluido inſieme dopo l'urto, ſe non d'una quantità infiniteſima, ſtante l'ipoteſi aſſunta. Se dunque il ſolido perde di velocità, mentre il fluido a poco a poco ne va acquiſtando, ſiamo nel caſo, in cui deono neceſſariamente aver luogo le leggi delle comunicazioni dei moti.

Sup-

Supponiamo primieramente, che la predetta comunicazione si faccia colle regole già note dei corpi molli. E giacchè le masse del solido ABC, e del fluido BH, stante che essi corpi anno per base comune il rettangolo EH, sono in ragione composta dell'altezza AB all' altezza BE, e della gravità specifica del solido a quella del fluido; ponendo $AB = a$, $BE = s$, la gravità specifica del solido $= m$, quella del fluido $= n$, avremo la massa solida $ABC = am$, e la fluida $BH = ns$. Pongasi in oltre $= u$ la velocità, che si concepisce nel solido, prima ch' esso s'avanzi per lo spazio minimo BE, e dopo fatto questo passo, e spinto fuori di luogo il fluido BH, la sua velocità sarà $= \frac{amu}{am+ns}$, come si rende manifesto, adattando al nostro caso i canoni della comunicazione del moto fra i corpi inerti; ma la predetta velocità è parimente uguale alla velocità u meno la porzione infinitesima du, che si perde dal solido in esercitando la sua azione contro del fluido; dunque siamo pervenuti alla equazione $\frac{amu}{am+ns} = u - du$, e ridotta l'equazione, $nus = amdu + nsdu$. Ma nella nostra supposizione essendosi preso per infinitesimo lo spazio $BE = s$, che equivale alla flussione $-ds$, avremo $-nuds = amdu - ndsdu$, o pure $-\frac{nuds}{am} = du$ e moltiplicando ambi i membri per u, $-\frac{Nu^2ds}{am} = udu$. Essendo in oltre cosa certa, che la resistenza del fluido moltiplicata nell' elemento negativo dello spazio è uguale al momento della velocità, cioè a dire $-Rds = ndu$; dunque $-\frac{nu^2ds}{am} = udu = -Rds$, ed in conseguenza $\frac{nu^2}{am} = R$. Quindi tanto l'azione del solido, quanto la reazione del fluido, che sono sempre uguali, e contrarie, s' esprimono per quantità $\frac{nu^2}{am}$, lo che ec.

Supponiamo in secondo luogo, che la comunicazione del moto nel nostro caso si faccia colle regole dei corpi elastici. In tale ipotesi avanzato che sia il solido per lo spazio minimo BE, la sua velocità sarà

$\frac{amu - nus}{am + ns} = u - du$, e riducendo l'equazione col metodo di ſopra eſpreſſo, $- \frac{2nuds}{am} = du$, o ſia $- \frac{2nu^2ds}{am} = udu = - Rds$; dunque

$R = \frac{2nu^2}{am}$.

COROLLARIO I.

E' coſa degna da eſſere avvertita, che ſi comunichi il moto dal ſolido al fluido o colle leggi dei corpi molli, o con quelle degli elaſtici, la reſiſtenza e nell'una, e nell'altra ſuppoſizione è ſempre proporzionale al quadrato della velocità, con queſta ſola diverſità, che la reſiſtenza nel primo caſo è minore per metà paragonata con quella, che ha luogo nel ſecondo caſo.

SCOLIO.

In paſſando dalla Geometria alla Fiſica, reſta a vederſi quale delle due accennate leggi ſia più conforme al modo di operare della Natura.

Da un canto io noto, che muovendoſi un corpo ſolido per un mezzo fluido, non ſuccede ciò, che ſi oſſerva nell'urto dei corpi elaſtici, i quali dopo la percoſſa l'uno dall'altro ſi ſtaccano. Non così fa il fluido cacciato di luogo dal ſolido; concioſſiachè incontrando nell'atto di muoverſi l'intoppo del fluido contiguo, e replicandoſi di paſſo in paſſo gli oſtacoli, è d'uopo, che il fluido o patiſca qualche condenſazione, mentre ſia elaſtico, o almeno in qualunque caſo dia tranſito al corpo duro muovendoſi in giro, come l'eſperienza ci dimoſtra. In oltre noi veggiamo, che i corpi duri, e maſſiccj reſtano col tempo corroſi dall'urto de' fluidi anche più ſottili, e per tacere degli effetti dell'acque correnti, l'aere medeſimo, ch'è così raro, altera, e ſcioglie inſenſibilmente tutti i miſti, facendo forza di meſtruo univerſale. Una parte dunque della forza della percoſſa ſi conſuma in agire contro la ſuperficie dei ſolidi.

Dall'altro canto non c'è fluido, che di qualche forza elaſtica non ſia dotato. Dell'aria la coſa è chiara, e gli altri fluidi, che di compreſſione non ſon capaci, mentre ſieno chiuſi in un vaſo, ſpruzzati violentemente contro un corpo duro patiſcono rifleſſione. Il punto ſta, ſe queſta forza di molla ſi ponga in azione, allora quando i ſolidi a traverſo de' fluidi ſi fanno ſtrada. Pare, che ſia legge ſtabile della Natura, che inſinuandoſi un corpo, ed aprendoſi il paſſaggio per mezzo un al-

altro o ſolido, o fluido, la comunicazione del moto ſi faccia con i canoni dei corpi molli, ed inerti. Ne abbiamo un indicio nella luce, la quale, ſebbene è dotata d'una perfetta virtù elaſtica, non oſtante ciò in penetrando un qualche mezzo diafano o liquido, o conſiſtente, ci fa chiaramente comprendere, che le ſue refrazioni prendono regola dall'accennata legge dell'urto dei corpi molli, come all'oppoſto le ſue rifleſſioni dall'altra legge dell'urto dei corpi elaſtici manifeſtamente dipendono.

Ma perchè c'inſegua l'eſperienza non andar mai diſgiunta la refrazione dalla rifleſſione, e che lo ſteſſo diafano in parte permette il paſſaggio al lume, che ſi refrange, ed in parte riflettendolo vi ſi oppone; dobbiam conchiudere, che avendoſi a computare l'intiera reſiſtenza, con cui il diafano fa contraſto all'azione della luce, è d'uopo l'unire inſieme ambe le leggi delle comunicazioni del moto, e ſtabilirne una terza. Anche ſulla materia, di cui trattiamo, non eſſendoci in Natura nè corpi perfettamente molli ed inerti, nè (trattane forſe la luce) corpi iſquiſitamente elaſtici, i primi de' quali non ſieno dotati di qualche minimo grado di forza elaſtica, come ſi ricava dal ſuono muto, ed ottuſo, che ſi ſente nell'atto della percoſſa; ed i ſecondi non ſieno ſoggetti a qualche piccola contuſione, o almeno non trattengano in ſe ſteſſi a cauſa del tremito, che dura dopo l'urto, una qualche porzione di forza; è coſa chiara, che parte della forza viva ſi cambia in morta, ſpendendoſi in ammaccare, ed in agire contro la ſuperfizie del ſolido, e parte ſi conſerva in paſſando da un corpo all'altro, o in facendo, che il fluido ſi rifletta, e ſi pieghi in varj moti irregolari, e tortuoſi.

Quindi io ſon di parere, che niuna delle due leggi accennate abbia luogo in Natura, ma che in maniera ſi contemperino, che ne naſca in fra due una di mezzo, e che la reſiſtenza ſia maggiore di quella, che richiedono i corpi perfettamente molli, e minore dell'altra, ch'è propria dei corpi perfettamente elaſtici. Tutta dunque l'alterazione conſiſterà nel modificare il coefficiente $\frac{n}{am}$, che dovrà moltiplicarſi per un numero rotto maggiore dell'unità, e minore del binario.

Crederei, che con qualche accurata ſperienza ſi poteſſe trovare il proſſimo, ſe non il preciſo: ma alla reſiſtenza, che naſce dall'inerzia della materia, e ſu cui abbiamo fin'ora verſato, dee aggiungerſi l'altra naſcente dalla tenacità, la quale io ſo, e ne ho una dimoſtrazione, che ſebbene in qualſivoglia fluido è ſempre diverſa, è però nello ſteſſo mezzo ſempre coſtante, qualunque ſi finga eſſere la velocità.

COROLLARIO II.

Non ſarà fuori di propoſito l'avvertire, che ſul principio del moto il ſolido urta nel fluido quieto, ma nel progreſſo cacciando di luogo le particelle fluide, e queſte comunicando il moto alle più vicine, e di mano in mano alle più lontane, viene a camminare per un mezzo, che ſi muove anch'eſſo con qualche celerità per la medeſima direzione. In queſta guiſa ſi ſminuiſce bensì alquanto la reſiſtenza, ma non ſi muta la legge, avendoſi a far il computo ſulla velocità relativa del ſolido riſpetto a quella del fluido, ſuccedendo lo ſteſſo, come ſe il corpo duro camminaſſe con una celerità minore di quello, che in fatti ha, e con eſſa ſi apriſſe la ſtrada per mezzo un liquido quieto, e ſtagnante.

COROLLARIO III.

In qualunque modo, e per qualſivoglia dei canoni già meſſi in conſiderazione facciaſi la comunicazione dei moti tra il ſolido, e il fluido, reſta s'io non m'inganno, confermata la legge Leibniziana intorno le forze vive. E la ragione ſi è, perchè ſe nelle leggi della comunicazione del moto tanto fra corpi molli, quanto fra gli elaſtici, ſenza ricorrere alla ſentenza del Leibnizio, non ponno ſalvarſi i Fenomeni, nè ſi può ſpiegare, onde naſca la contuſione nei primi, nè l'accreſcimento di forza, che ſuccede talvolta nell'urto dei ſecondi; egli è manifeſto, che la ſteſſa opinione dee aver luogo anche nell' azioni del fluido contro il ſolido, o nelle reſiſtenze, con cui ai ſolidi s'oppongono i fluidi; ſtante che dipendono queſte neceſſariamente, come s'è fatto vedere, dai Canoni della comunicazione dei moti.

SCHEDIASMA XXIX. (*)

PROBLEMA.

Data in qualſivoglia modo la forza centripeta per la diſtanza dal centro, e meſſa la reſiſtenza in ragione compoſta della velocità attuale duplicata, e della denſità del fluido, inveſtigare le leggi della diſceſa d'un grave.

STando ferme le condizioni del quiſito, ci ſi preſenta la formola generale $-fds + cu^2 \Delta\, ds = udu$, in cui f ci eſpone la forza centrale, S lo ſpazio da traſcorrerſi ſino al centro, Δ la denſità del mezzo, ed u la velocità attuale. Per ſeparare le incognite, preparata la formola giuſta il metodo a me familiare, ſarà $-fds = u^2 . \frac{du - c\Delta ds}{u}$.

Faccio $c\Delta ds = \frac{dz}{z}$, onde eſſendo Δ dato per s, ſia data altresì per s la ſpezie z, ed avrò $-fds = u^2 . \frac{du}{u} - \frac{dz}{z}$. Metto poi $\frac{du}{u} - \frac{dz}{z} = \frac{dp}{p}$; ed integrando, $lu - lz = lp$, e paſſando dalle quantità logaritmiche alle comuni, $u = zp$, ed $u^2 = z^2p^2$. Quindi fatte le opportune ſoſtituzioni, $-fds = \frac{u^2dp}{p} = z^2pdp$, o pure $-\frac{fds}{zz} = pdp$, e ſommando, $2\int -\frac{fds}{zz} = p^2 + g$: ma $p^2 = \frac{u^2}{z^2}$; dunque $2z^2 \int -\frac{fds}{zz} = u^2 + gz^2$.

La coſtruzione dipende generalmente dai logaritmi, e dalle quadrature; e ſe la denſità ſi finge coſtante, ciò non altera punto l'operazione: come altresì per i varj caſi di aſceſa, e di diſceſa baſta mutare i ſegni del più, e del meno. Appreſſo la ſoluzione ſerve a miſurare il moto de' pen-

(*) *Si ricava da una lettera 23. Luglio 1738. del Co. Giordano Riccati al Padre D. Ramiro Rampinelli, che in quel tempo era ſtato dall'Autore ſcritto il preſente Schediaſma.*

pendoli in qualunque curva, e ſpecialmente nella Cicloide, ſopra di che ho fatto alcune ſcoperte fin ora non oſſervate.

E perchè negl'incontri particolari ſi facilita l'effezione geometrica, ne prendo per mano un eſempio. Cada il grave per una verticale verſo il proprio centro, e ſia la denſità del mezzo in proporzione reciproca della lontananza dal centro medeſimo, cioè $\Delta = \frac{n}{s}$, e di più la gravità accelerante come qualſivoglia dignità della menzionata diſtanza, ovvero $f = as^m$. Regolando ſu tali dati la formula, trovo $c\Delta ds = \frac{cnds}{s} = \frac{dz}{z}$; dunque $s^{nc} = z$, $s^{2nc} = zz$, e perciò

$2s^{2nc} \int -\frac{as^m ds}{s^{2nc}} = u^2 + gs^{2nc}$. In queſto mentre ſi rinviene la quantità $\int -\frac{as^m ds}{s^{2nc}} = -\frac{as^{m-2nc+1}}{m-2cn+1}$; dunque $-\frac{2as^{m+1}}{m-2cn+1} = uu + gs^{2cn}$. Ora ſa d'uopo determinare la coſtante aggiunta g. Quando il grave comincia a diſcendere, ſi trova rimoto dal centro per la linea data b, ed allora $u = o$, con che l'equazione ſi riduce a $-\frac{2ab^{m+1}}{m-2cn+1} = g\,b^{2nc}$, ovvero $-\frac{2ab^{m-2cn+1}}{m-2cn+1} = g$; laonde l'eſpreſſione principale piglia la ſeguente forma $\frac{2ab^{m-2n+1}s^{2nc} - 2as^{m+1}}{m-2nc+1} = u^2$.

Quì non vogliono traſcurarſi alquante determinazioni. Prima di tutto ſtabiliſco l'eſponente $m = o$, onde la gravità ſi aſſuma come coſtante, e ſi modifichi l'equazione come ſegue $\frac{2ab^{-2nc+1}s^{2nc} - 2as}{-2nc+1} = uu$; Se ſarà $c = 1$, $n = 1$, avremo $2as - \frac{2as^2}{b} = u^2$, il qual luogo è all'elliſſi ordinaria. Cominciando pertanto il moto alla diſtanza del centro ſegnata b, paſſa dalla celerità nulla alla maſſima corriſpondente alla metà del ſuo viaggio $= \frac{b}{2}$, indi perdendo il mobile a poco a poco la ve-

velocità acquiſtata, giunto al ſuo centro ſi ravviſa in iſtato di quiete: Similmente ſtando intatta la reſiſtenza proveniente dal quadrato della velocità, e la coefficiente $c = 1$, ſe ſi muta la denſità del mezzo, e ſia n un qualunque numero intiero, ed affermativo (concioſſiachè ripugna, che ſi aſſuma negativo) egli è evidente, che ſarà negativo il binomio $-2n+1$, e che l'equazione piglierà l'aſpetto $b^{2n-1}s - s^{2n} = \frac{2n-1 \cdot b^{2n-1}u^2}{2a}$. Anche quì, la velocità è nulla in due caſi, vale a dire nel cominciamento del moto, quando $s = b$, e nel fine, mentre il mobile giunge al centro, ed è $s = 0$. Per rinvenire poi la maſſima ordinata delle infinite curve locali, preſe le differenze nell'ultima eſpreſſione, e fatta la fluſſione $du = 0$, naſcerà l'equazione $b^{2n-1}ds = 2ns^{2n-1}ds$, o pure $\frac{b}{\frac{1}{2n}^{\frac{1}{2n-1}}} = s$, aſſiſſa, a cui riſponde la maſſima applicata, o la maſſima velocità.

Si noti, che quanto è più grande la quantità $2n$, altrettanto vaſſi impicciolendo la grandezza $2n^{-\frac{1}{2n-1}}$, ch'è il denominatore della frazione $\frac{b}{2n^{-\frac{1}{2n-1}}}$, diſcoſtandoſi ſempre più da $\frac{b}{2}$, ed avvicinandoſi a $\frac{b}{1}$, per la qual cauſa laſciato cadere il peſo dalla ſublimità b, può intervenire, che traſcorſo qualſiſia minimo ſpazio, acquiſti eſſo la velocità maſſima, la quale totalmente non perda, ſe non ſe pervenuto che ſia al proprio centro, e compiuto un lunghiſſimo viaggio. Ma aſſunta la $2n$ minore dell'unità, quanto il predetto denominatore $2n^{-\frac{1}{2n-1}}$ ſarà più grande, altrettanto ſarà più piccola la frazione $\frac{b}{2n^{-\frac{1}{2n-1}}} = s$, e conſeguentemente ſi accoſterà al centro la maſſima celerità; di modo che potrà venir guadagnata dal grave nello ſcorrere per un lunghiſſimo tratto, e

poi

poi perduta nell'avanzar cammino per un quanto si voglia minimo spazio. In questo mentre fatta infinitesima la coefficiente n, la velocità massima corrisponderà al centro verificandosi allora l'espressione $2a.\overline{b-s} = u^2$, e la scala delle celerità crescenti acquistate da un peso libero da ogni resistenza sarà la parabola Apolloniana, conforme la dottrina del Galileo.

Non debbo trascurare l'ipotesi di $n = \frac{1}{2}$. Ripetuta la formola generale $\frac{2ab^{-2n+1}s^{2n} - 2as}{-2n+1} = u^2$, e surrogata in iscambio di $2n$ l'unità, la cosa si riduce a $\frac{0}{0} = u^2$. In tale incontro egli è d'uopo ricorrere ai logaritmi, ed ommessa l'Analisi, metto anzi gli occhi la costruzione. Sia (Fig. 108.) A il centro, AB la sublimità, B il principio della discesa, per il qual punto passi il ramo d'una logaritmica decrescente BDF, la di cui suttangente sia $= a$ indice della gravità costante: dico, che il rettangolo ACD è sempre uguale al semiquadrato della velocità, dalla quale resta affetto il mobile nel punto C, dopo aver percorso lo spazio BC. Anche nella supposizione, che abbiam per le mani, la velocità oltre l'esser zero nel punto B, tale sarà altresì nel centro A; perchè assunta Ac inassegnabile, il rettangolo di Ac nell'asfintoto infinito AG è una grandezza minore di qualsisia data.

Per ben concepire l'economia di questi moti, fa di mestieri determinare le scale delle forze attualmente acceleranti, e ritardanti, il che si conseguisce col prendere la gravità costante espurgata dalle resistenze, e col descrivere le scale stesse, che farebbono discendere il grave colle medesime leggi di celerità nel vano. L'impulso vero sollecitante si misura dall'apotome $a - \frac{u^2 n}{s}$, la quale moltiplicata nell'elemento $-ds$ dello spazio decrescente ci dà il momento della velocità udu: Ora per le nostre formole si ha $\frac{2ab^{-2n+1}s^{2n} - 2as}{-2n+1} = u^2$; dunque nella suddetta apotome sostituito in iscambio di u^2, il suo valore, si trova $a - \frac{2anb^{-2n+1}s^{2n-1} + 2an}{-2n+1} = F$, impressione variabile, che realmente accelera, e poscia ritarda il grave per tutto il corso della c

du-a-

duta, ovvero $\frac{a}{-2n+1} - \frac{2anb^{-2n+2}s^{2n+1}}{-2n+1} = F$. A queſto paſſo anno a

diſtinguerſi due caſi, ſecondo che la coefficiente $2n$ è maggiore, o minore dell'unità; perchè ſe ſi deſſe uguaglianza, biſogna come ho detto valerſi dei logaritmi.

Nel primo caſo eſſendo negativa la quantità $-2n+1$, ci ſi preſenta l'eſpreſſione $\frac{2ans^{2n-1}}{2n+1 \cdot b^{2n-2}} - \frac{a}{2n-1} = F$. Sia pertanto (Fig. 109.)

A il centro, AB la ſublimità $= b$, e col vertice A intorno l'aſſe AB s'intenda deſcritta la parabola ADC, che ſoddisfaccia all'equazione $\frac{2ans^{2n-1}}{2n-1 \cdot b^{2n-2}} = y$. Pongaſi $BE = \frac{a}{2n-1}$, e dal punto E ſi tiri la retta

EF parallela alla verticale BA, che tagli la curva nel punto D, indi conducanſi a BA le normali DG, FA parallele all'applicata CB. Nel principio della caduta ſi ha la forza centrale $EC = a$, gravità coſtante, che poi dall'oſtacolo delle reſiſtenze ſi va minorando; così che nel punto D la forza agente ſi pareggia colla reſiſtente, e diventa nulla. Ivi ceſſando l'accelerazione, ſi rinviene la maſſima velocità, ed in progreſſo cominciando il ritardamento cagionato dalle impreſſioni negative contenute nel trilineo DFA, ſi perde paſſo paſſo la celerità acquiſtata, che s'eguaglia a zero nel centro A, purchè, come ſuccede nella noſtra ipoteſi, la ſomma delle forze poſitive eſpoſta dall'area DEC ſia pari a quella delle negative eſpreſſa per l'area DFA.

Ciò ſi verifica ogni qual volta l'area parabolica ABC ſi eguaglia al rettangolo AE; concioſſiachè detratto dall'una parte, e dall'altra il comune trapezio miſto compreſo dalle tre rette DE, EB, BA, e dalla curva DA, rimangono eguali fra loro i due trilinei DEC, DFA. Ora abbiamo l'elemento dell'area parabolica $\frac{2ans^{2n-1}ds}{2n-1 \cdot b^{2n-2}} = yds$, ed integrando, $\frac{as^{2n}}{2n-1 \cdot b^{2n-2}} = \int yds$, e poſta $s = b$, ABC ſpazio parabolico $=$ $\frac{ab}{2n-1}$: ma anco il rettangolo AE ſi miſura col prodotto $\frac{a}{2n-1} \cdot b$; dun-

que s'è provata l'ugualità del rettangolo AE con l'area ABCD, e conſeguentemente dei due trilinei DEC, DFA.

Facendomi ſtrada al ſecondo caſo, cioè a dire quando la ſpezie $2n$ è minore dell'unità, ed è poſitivo il binomio $-2n+1$, mi ſi preſenta la forza variabile $F = \frac{a}{1-2n} - \frac{2anb^{1-2n}s^{2n-1}}{1-2n}$, ed atteſo che l'eſponente $2n-1$ è negativo, la curva locale naſcente dalla equazione ſeguente $\frac{2anb^{1-2n}s^{2n-1}}{1-2n} = y$ ſarà una iperboloide, ch' io ſuppongo delineata (Fig. 110.) dentro gli aſſintoti BA, AH. Metto poſcia BE $= \frac{a}{1-2n}$, e tiro la normale EF interſecante la curva nel punto D.

Ad eſſo, o ſia a G corriſponde la maſſima celerità, e l' aggregato di tutte le impreſſioni poſitive, ed acceleranti è compreſo dallo ſpazio CED; ſiccome quello delle ritardanti, e negative dall'area eſteſa all'infinito IDFH, le quali due ſuperficie ſono fra loro eguali.

Speſſe volte le verità dimoſtrate ci compariſcono innanzi ſotto l'aſpetto di paradoſſi. Primieramente la ſcala delle forze centrali acceleranti ſi eſponga (Fig 111.) per la retta CD parallela alla linea BA della caduta, e colle ordinate all' iperbola volgare IF deſcritta fra gli aſſintoti BA, AG s'eſprimano le denſità variabili del mezzo, onde la reſiſtenza in qualunque punto H s'abbia moltiplicando l'applicata HF nel quadrato della velocità acquiſtata dal mobile nel ſito H. Io voglio ſupporre, che in tali circoſtanze il grave pervenuto al centro A ſi trovi in iſtato di quiete. Ora minorata a mio piacimento la denſità del mezzo, onde mi venga rappreſentata dalla iperbola analoga *ef*, male la diſcorrerei, s'io diceſſi, che non alterandoſi nè punto nè poco l'impreſſione ſollecitante BC, mentre la denſità più grande del fluido fa, che il corpo peſante ſi riduca alla quiete nel centro A, la indefinitamente più picciola ſi comporterà in maniera, che lo ſteſſo corpo giunto in A ſarà fornito d' un qualche grado di velocità finita. La dimoſtrazione mi ammoniſce, che non debbo fidarmi di queſto raziocinio, quantunque a prima viſta plauſibile.

Secondariamente tengo ferma la ſcala EF delle denſità, ed altresì quella della gravità coſtante CD, e poſto che in sì fatta poſizione perda il mobile nel centro A tutta la velocità guadagnata colla caduta, parerebbe, che accreſciuto l'impulſo accelerante, mettendo la gravità coſtante multipla di *a*, o di BC, ſi aveſſe ad ottenere, che in A camminaſſe il grave con una data celerità. E pure la coſa non è così; perchè aumentata ſempre più la gravità, tanto e tanto il peſo non ſi avanzerà mai a ſcorrere qualſiſia minimo ſpazio al diſotto del centro A.

Ap-

Appreſſo ſi determini la ſublimità AB o più lunga, o più corta, ed anche o maſſima, o minima fiſicamente, avranno ſempre luogo le verità enunziate.

In terzo luogo poſſo fingermi eſtenuata quanto mi piace la denſità del fluido reſiſtente, che non oſtante ciò, arrivato che ſia il grave al centro A, ſarà privo affatto di moto. Che ſe la denſità ſteſſa diventerà infinitesima, allora il mobile reſterà affetto da una velocità finita espoſta per $\sqrt{2ab}$. Ecco dunque una ſpezie di ſalto, per cui ſi paſſa da una grandezza nulla ad una determinata. Trovo l'ipoteſi, che ſa la velocità $= \sqrt{2ab}$, mettendo $n = o$, e trovo l'altra, che ſtabiliſce la velocità $= o$, ponendo n uguale a qualunque quantità finita o grande, o picciola: ma cerco indarno la ſuppoſizione, che mi dia nel centro una celerità minore di $\sqrt{2ab}$. Svaniſce il paradoſſo, ogni qual volta ſi riflette, che allo ſminuirſi della ſpezie n, o della denſità del mezzo, ne naſce un doppio effetto, cioè a dire, che la velocità maſſima ricreſce accoſtandoſi ſempre più riſpetto alla ſua grandezza a quella, che ha luogo nel vuoto, e ſi eſprime per $\sqrt{2ab}$; ed in oltre, ch'eſſa velocità maſſima va ſempre più avvicinandoſi al centro. Preſa pertanto l'abſciſſa variabile AG (Fig. 112.) nell'ipoteſi, che al punto G corriſponda la maſſima velocità, per le coſe dette di ſopra ci ſi preſenta l'equazione locale $\frac{b}{\frac{1}{2n}\frac{1}{2n-1}} = S$, curva appartenente al genere delle percorrenti, o eſponenziali, per coſtituire la quale ſi dee ricorrere ai logaritmi. Noto però, che fatta $n = o$, anche S diventa zero, e poſta n infinita, ſi trova $s = b$; e la ragione ſi è, perchè la quantità $\frac{1}{2n}^{\frac{1}{2n-1}}$, ovvero $\frac{1}{2n}^{\frac{1}{2n}} = \sqrt[2n]{2n}$ s'eguaglia all'unità. Principia dunque la curva dal punto A, ed è aſſintotica riſpetto all'orizzontale BC, come la delineata ADE. In queſto mentre eſſendo $n = \infty$, la velocità maſſima ſi rinviene nulla nel punto B, e mentre ſia $n = o$, eſſa maſſima celerità riſpondente al centro A ſi miſura dal prodotto $\sqrt{2ab}$. Per la qual cauſa ne'punti intermedj, per eſempio G, giacchè n ſi fa uguale ad una quantità data, la predetta velocità maſſima GF ſpettante al punto G ſtarà dentro i limiti ſtabiliti.

Le concluſioni ſin quì rapportate anno luogo con le debite modificazioni in infinite ipoteſi differenti, e ſpecialmente in quella, nella

quale la forza centripeta si assume proporzionale alla distanza dal centro, onde sia $m = 1$, e la formola generale $\frac{2ab^{m-2n+1}s^{2n} - 2as^{m+1}}{m-2n+1} = u^2$ si tramuti nella particolare $\frac{2ab^{1-2n}s^{2n} - 2as^2}{2-2n} = u^2$. In due incontri si trova nulla la velocità, e messa $s = b$, e qualora nel centro diventa $S = o$. Fatta $2n = 1$, si scopre l'equazione $2as - \frac{2as^2}{b} = \frac{u^2}{b}$, similissima a quella, che ci si è affacciata nella antecedente supposizione della gravità costante, posta ivi però la grandezza $2n = 2$, e mentre la sublimità b nell'uno, e nell'altro caso faccia figura d'unità. Cosa curiosa si è, che presa la gravità o costante, o pure variabile in ragione delle lontananze dal centro, se nella prima supposizione la resistenza si espone per $u^2 . \frac{1}{s}$, e nella seconda per $\frac{u^2}{2} . \frac{1}{s}$, la scala delle celerità può essere la medesima. Ora altronde io so, che non variata punto la densità del mezzo $= \frac{1}{s}$, la resistenza dipendente dall'inerzia della materia, se ne' fluidi elastici s' espone per u^2, in quelli, che sono privi d'elasticità, debbe esprimersi per $\frac{u^2}{2}$.

Ho soddisfatto al Problema proposto, calcando le vestigia impresse da' Geometri di prima linea: ma per dir il vero si racchiude nel progresso dell'analisi una tacita supposizione, e consiste nel fingere, che il mezzo fluido resistente al moto del solido sia affatto spogliato di gravità, e che tutto l'intoppo derivi solamente dalla densità, e dall'inerzia. Mentre non si ammetta in Natura la materia sottile del Cartesio, egli è manifesto, che l' ipotesi mal si accorda colla Fisica. Dove poi ci guidi la correzione di sì fatta licenza, io per ora non prendo la briga d'investigarlo.

SHE-

SCHEDIASMA XXX. (*)

PROBLEMA.

Del moto dei pendoli a Cicloide, posta la resistenza del mezzo in ragione duplicata dell' attuale velocità.

Discenda la ghianda del pendolo dal punto di quiete B (fig. 113.); e vada accelerandosi il moto per gli archi crescenti BD della Cicloide: egli è certo, che s'io esporrò il peso assoluto della predetta ghianda, o per dir meglio (quand'essa è collocata in un fluido dotato di gravità) il suo peso specifico, e relativo per il doppio diametro del cerchio governatore della curva, la forza tangenziale sollecitante il mobile in qualsivoglia punto, per esempio D, mi verrà rappresentata dall'arco DC, che va a terminare nel punto infimo della Cicloide: dalla qual forza continuamente applicata dee sottrarsi quella della resistenza, che nella nostra ipotesi è proporzionale al quadrato della attuale velocità, e per il prodotto nu^2 generalmente si espone. Quindi chiamati S gli spazj trascorsi come BD, ed a l'arco intiero CB, avremo la formula fondamentale (1ª) $ads - sds - nu^2ds = udu$.

E quì prima di passar oltre non voglio lasciar d'avvertire, che mentre il pendolo dopo esser disceso per l'arco BC è obbligato a salire per l'arco BE, la nostra espressione differenziale, che serve per la discesa, non patisce alcuna alterazione nel caso della salita. La ghianda monta in virtù dell'impeto impresso, e vi si oppone tanto la sollecitazione della gravità, quanto la resistenza del mezzo. La prima in qualunque punto E è uguale all'arco CE, e si esprime per $s - a$, e la seconda per nu^2; dunque moltiplicando ambo queste quantità per l'elemento crescente dello spazio $+ ds$, e poscia uguagliandole al momento decrescente della velocità $- udu$, troveremo $sds - ads + nu^2ds = -udu$, o sia $ads - sds - nu^2ds = udu$.

Per separar le variabili nella equazione (1ª) misse, e confuse, metto in opera i miei soliti artifizj. Prima d'ogni altra cosa faccio $s = \log. z$, e differenziando, $ds = \frac{dz}{z}$, e dopo questa surrogazione preparo l'equazione nella seguente maniera.

(2ª)

(*) *Con lettera in data de' 5. Marzo dell'anno 1732. comunicò il Conte Jacopo al Sig. Abate Suzzi la soluzione del presente Problema.*

$$(2^a)\ \frac{adz}{z} - \frac{dz}{z}lz = u^2 \cdot \frac{du}{u} + \frac{ndz}{z}.$$

In ſecondo luogo pongo $\frac{du}{u} + \frac{ndz}{z} = \frac{dp}{p}$, e ſommando $lu + nlz = lp$;

e paſſando dalle grandezze logaritmiche alle comuni, $uz^n = p$. Soſtituiti nella equazione (2^a) queſti valori, naſce la

$$(3^a)\ \frac{adz}{z} - \frac{dz}{z}lz = \frac{u^2dp}{p} = \frac{pdp}{z^{2n}},$$

atteſochè $u^2 = \frac{pp}{z^{2n}}$, e moltiplicando tutti i termini per z^{2n}, riſulta la

$$(4^a)\ az^{2n-1}dz - z^{2n-1}dzlz = pdp,$$

nella quale ſono ſeparate le incognite.

Per integrare l'ultima formola, ſi richiede un poco d'induſtria, e maſſimamente per iſcanſare l'imbarazzo delle quadrature, e ridurre la coſa a ſemplici logaritmi. Conſidero, che il primo termine $az^{2n-1}dz$, ed il terzo pdp ammettono una ſpedita integrazione: ma per quello appartiene al ſecondo $-z^{2n-1}dzlz$, queſto da ſe ſolo non è agevolmente ſommabile; può però rendersi tale aggiungendoci un altro termine, cioè a dire $-\frac{z^{2n-1}dz}{2n}$; concioſſiachè l'aggregato dei due termini $-z^{2n-1}dzlz - \frac{z^{2n-1}dz}{2n}$ ſi riduce all'integrale $-\frac{z^{2n}lz}{2n}$.

Frattanto perchè non reſti turbata l'egualità dell'eſpreſſione (4^a) è d'uopo d'aggiungere, e di ſottrarre nel primo membro la quantità $\frac{z^{2n-1}dz}{2n}$ nel ſeguente modo,

$$(5^a)\ az^{2n-1}dz + \frac{z^{2n-1}dz}{2n} - z^{2n-1}dzlz - \frac{z^{2n-1}dz}{2n} = pdp.$$

Facendoſi poi ſtrada alla integrazione, avraſſi, non ommeſſa l'aggiunta della coſtante c, $\frac{2an+1}{4nn}z^{2n} - \frac{z^{2n}lz}{2n} = \frac{p^2}{2} + c$: ma $p^2 = u^2z^{2n}$; dun-

que

que ſurrogato queſto valore, ed iſtituita la diviſione di tutti i termini per z^{2n}, e la moltiplicazione per $2n$,

$$(6^a)\ \frac{2an+1}{2n} - lz - \frac{2nc}{z^{2n}} = nu^2 = r.$$

Ora abbiamo a fiſſare il valore della coſtante c. Nel principio del moto, vale a dire nel punto B, tanto la velocità u, quanto la reſiſtenza r ſi trova uguale a nulla, come altresì lo ſpazio S, o ſia il logaritmo z, e conſeguentemente in queſta ſuppoſizione $z = 1$. Soſtituiti i valori già determinati nella equazione (6^a), ſi ſcoprirà

$c = \frac{2an+1}{4nn}$, e $2nc = \frac{2an+1}{2n}$, e ſi avrà la compita ſoluzione contenuta nella eſpreſſione

$$(7^a)\ \frac{2an+1}{2n} - \frac{2an+1}{2n\,z^{2n}} = lz + r = S + r,$$

e ponendo $1 - \frac{1}{z^{2n}} = y$, troveremo $\frac{2an+1 \,.\, y}{2n} = S + r$, la qual equazione ſi convertirà facilmente nell'analogia $1 : a + \frac{1}{2n} :: y : s + r$.

Poteva io ſervirmi d'un'analiſi aſſai più riſtretta, particolarmente dappoichè la ſoluzione più eſteſa, che prima mi è venuta alle mani, mi ha fatto venire in cognizione del riſultato, e così praticano ſpeſſe fiate certi Autori per occultare in parte il metodo: ma io ho voluto guidare il Lettore per quella medeſima ſtrada, che da me è ſtata battuta, avanti ch'io ſapeſſi a qual termine foſſe eſſa per condurmi. Per dir il vero la coſtruzione riuſcirà ſempliciſſima, purchè ſi oſſervi, che eſſendoſi fatto lo ſpazio $s = l.\ z$, e di più $1 - \frac{1}{z^{2n}} = y$, s'io prenderò per abſciſſe gli ſpazj creſcenti s, e per ordinate le variabili y, la curva locale indi naſcente ſarà una logaritmica, che avrà per ſuttangente coſtante una quantità $= \frac{1}{2n}$. Sia $1 - x = y$, e perciò $x = \frac{1}{z^{2n}}$, ovvero $z = x^{-\frac{1}{2n}}$, e $lz = lx^{\frac{1}{2n}}$ Preſe le differenze;

dz

$\frac{dz}{z} = ds = -\frac{1}{2n} : \frac{dx}{x}$; dunque $\frac{xds}{dx} = -\frac{1}{2n}$, lo che ec.

COSTRUZIONE.

Tutto il giro della costruzione si ristringe in tirare due parallele indefinite GH, IK (Fig. 113, 114.) distanti per la normale GI, che fa figura d'unità, e può farsi uguale all'arco semi-cicloidale BC, da cui ci viene messa sotto gli occhi la gravità specifica della ghianda del pendolo oscillante in un mezzo grave, e resistente. Per il punto G segnato ad arbitrio passi la logaritmica *Glmno*, di cui sia assintoto la linea IK, e sotto toccante la retta esposta per $1 : \frac{1}{2n}$ egli è manifesto,

che alle abscisse GL, GN espresse nella nostra analisi per l'indeterminata S risponderanno le ordinate *Ll*, N*n* rappresentate per *y*. Facciamci a vedere cosa dalla costruzione si ricavi.

1. Discenda il pendolo dal punto di quiete *b*, e dopo aver camminato per l'arco *b*C in discendendo, ascenda per l'arco C*e*, e si fermi nel sito *e*: dimandasi il valore della resistenza in qualunque punto di mezzo per esempio *d*. Abbiasi sotto l'occhio l'analogia

$1 : a + \frac{1}{2n} :: y : s + r$, e facciasi GQ = *b*C = *a*, a cui si aggiunga

la QH uguale alla suttangente della logaritmica, e condotta la normale HK, e la diagonale GH, si prenda uguale all'arco *bd* l'abscissa GL, a cui risponda l'ordinata L*l*, e per il punto *l* passi la retta T*l*R parallela alla KG incontrando l'asse prodotto nel punto R: io dico, che l'intercetta GR ci dinota la resistenza $r = nu^a$, per cui il fluido s'oppone alla ghianda nel punto segnato *d*.

2. E perchè la secante TR taglia sempre la curva in due punti, cioè a dire nel punto già determinato *l*, ed in un altro per cagion d'esempio *n*, si deduce, che la medesima resistenza GR corrisponde a due archi cicloidali diversi, il primo de' quali si è *bd*, ed il secondo si trova, assumendo la curva *bCe* uguale all'abscissa GN.

3. Che se i due punti *n*, *l* s'andassero sempre più accostando, fino a farsi infinitamante prossimi; allora la secante TR si convertirebbe nella toccante U*m* S parallela alla KG, e lasciata cadere dal contatto *m* l'applicata *m*M, al punto D (posto l'arco *b*D = all'abscissa GM) converrà la massima resistenza GS.

4. Si osservi in questo mentre, che la diagonale GK interseca la logaritmica ne' due punti G, *o*; cosicchè condotta l'ordinata O*o*, e fatto l'arco *bCe* uguale alla retta GO, nei due siti *b*, ed *e* si scopre nulla la resistenza; lo che non può intervenire, salvo che nei due punti

di

di quiete. Dunque cadendo la ghianda dal punto di riposo b, monterà fino al punto e, e l'abscissa GO ci darà la misura dell'arco bCe descritto dal pendolo parte nella discesa per bC, e parte nell'ascendimento per Ce.

5. La curva per tanto delle resistenze è una specie d'ellissoide, che principiando dal punto G si va allontanando dall'asse, fino ad acquistare la massima ordinata uguale all'intercetta GS, indi si ripiega, e discende, congiungendosi di bel nuovo con l'asse nel punto O, e ci viene rappresentata dalla curva GXO.

SCOLIO I.

Che la curva delle resistenze abbia un massimo, ci vuole poca fatica ad iscoprirlo. Essendo la resistenza nel punto di quiete $b=o$, mentre la forza accelerante si esprime per l'arco bC, e crescendo la prima in ragione duplicata della velocità attuale, che il pendolo di passo in passo si va acquistando, nel tempo medesimo, che la seconda decresce continuamente, quanto più il mobile s'accosta al punto C; ci sarà necessariamente un sito per esempio D, in cui la forza sollecitante sarà pari alla resistente.

Per tutto lo spazio bD la ghianda acquisterà sempre nuovi gradi di celerità; perchè quella porzione della gravità, che opera per le direzioni delle tangenti, supera la reazione del mezzo. Tutto all'opposto nei punti di mezzo fra D, e C il pendolo dee ritardarsi, essendo maggiore la forza negativa, che fa contrasto, della positiva, che accelera. Quanto poi la velocità cala, altrettanto si minora colla legge assegnata la resistenza; dunque la massima velocità, e la massima opposizione sarà nel punto D, in cui le predette forze operanti in senso contrario si suppongono eguali. Perciò la resistenza nel punto assegnato s'esprimerà per l'arco DC, con cui si misura parimente la forza sollecitante, e lo spazio passato bD più la resistenza DC sarà uguale all'arco costante bC, che va a finire nel punto infimo della cicloide: le quali particolarità esponendosi in termini analitici ci danno $s+r=a$, ovvero $a-s=r$.

Quindi nella curva delle resistenze GXO, per avere la massima Mx, basterà condurre dal punto Q l'inclinata QX, che si pieghi verso l'asse QG con un angolo semiretto.

Frattanto essendo per le cose dette la resistenza SG più lo spazio percorso GM uguale all'arco $bC=GQ=a$, e stante la similitudine de' triangoli SmM, VmP verificandosi l'analogia $SM=a : Mm=y :: VP=\frac{1}{2n} : Pm=1-y$, passeremo all'equazione $a-ay=\frac{y}{2n}$, che ridotta ci dà il valore di $Mm=y=\frac{2an}{2an+1}$, e di $Pm=x=\frac{1}{2an+1}$.

SCOLIO II.

Un' altra proprietà ſi oſſerva nella premeſſa legge di reſiſtenza: Pongaſi, che la maſſima velocità della ghianda corriſponda al punto D: io dico, che pervenuto il pendolo al punto più baſſo C conſerverà in ſe ſteſſo qualche grado di velocità; laonde dovrà neceſſariamente reciprocare, qualunque ſia il valore della coefficiente n.

La noſtra formula ci dà in qualunque punto dell' aſſe GO, $\frac{2an+1}{2n} \cdot y = s + r$: ma nel punto M corriſpondente alla maſſima reſiſtenza MX il valore dell'ordinata Mm ſi trova $= \frac{2an}{2an+1}$; dunque fatta la ſurrogazione, ſi ſcopre $\frac{2an+1}{2n} \cdot Mm = a = s + r$. Oſſervando poſcia, che la logaritmica Gmo tanto maggiormente ſi diſcoſta dall' aſſe GO, quanto più creſcono le abſciſſe; egli è certo, che nel punto Q corriſpondente all'infimo C della cicloide, l'applicata QZ è più grande di Mm: perciò in tal caſo la quantità $\frac{2an+1}{2n} \cdot QZ$ è maggiore di a; ed eſſendo nell'incontro medeſimo l'abſciſſa $GQ = a$, ne ſiegue, che la grandezza $\frac{2an+1}{2n} \cdot QZ - a$ è poſitiva: la quale uguagliandoſi alla reſiſtenza $r = nu^2$, ci dimoſtra, che il quadrato u^2 è una quantità affermativa, e che la ghianda conſerva nel punto C una velocità finita, per cui il pendolo viene obbligato ad aſcendere.

E da ciò ſi conchiuda, che meſſo il pendolo una volta in moto (ſuppoſta la legge di reſiſtenza, che abbiam per le mani) continua egli a reciprocare ſenza mai fermarſi. Di fatto per quanto ſia vicino al punto più baſſo C, quello per eſempio D, da cui la ghianda comincia a diſcendere, arrivata ch' eſſa ſia in C mantiene in ſe un qualche grado di celerità, dal quale ſarà coſtretta a ſalire per una qualunque, febbene talvolta minima porzione della curva Cf. E così tornando ſempre a diſcendere, e a rimontare, non ſi ridurrà mai ad uno ſtato di perfetta quiete. Ciò s'intenda detto in puro rigore di Geometria, e non già per quello appartiene alla Fiſica, atteſe parecchie circoſtanze, dalle quali il Matematico ſuole preſcindere.

S C O L I O III.

Il Sig. Cav. Nevvton, e dopo lui il Sig. Ermanno anno dimoſtrato alla loro maniera, che l' area intiera della ſcala delle reſiſtenze compreſa dall'aſſe GO, e dalla curva GXO è uguale alla metà della differenza, che paſſa fra i quadrati degli archi bC, Ce, per il primo de' quali diſcende il pendolo, ed aſcende per il ſecondo.

Anche queſta verità può dedurſi dalle noſtre formule; concioſſiachè abbiaſi giuſta la determinazione de' citati Scrittori la ſemidifferenza de' predetti quadrati $as - \frac{s^2}{2} = \int rds$: ma ſtante la mia equazione fondamentale $\overline{a + \frac{1}{2n}} \cdot y - s = r$, e moltiplicando tutti i termini per l'elemento ds, $\overline{a + \frac{1}{2n}} \cdot yds - sds = rds$, ed integrando, $\overline{a + \frac{1}{2n}} \cdot \int yds - \frac{s^2}{2} = \int rds = as - \frac{s^2}{2}$; dunque $\overline{a + \frac{1}{2n}} \int yds = as$.

In queſto mentre lo ſpazio logaritmico $GmnO$ eſpoſto per $\int yds$ ſi ſa eſſere uguale alla quantità $s - \frac{1}{2n} y$; dunque $\overline{a + \frac{1}{2n}} \cdot \overline{s - \frac{1}{n} y} = as$, ed eſpurgata l' equazione, $\overline{a + \frac{1}{2n}}\, y = s$: concluſione, che da noi ſi trova col porre ſemplicemente nella noſtra formula $r = 0$, e che ci fa vedere come da una verità all' altra ſi faccia paſſaggio.

S C O L I O IV.

Dalle coſe dette poſſiamo inferire, che le oſcillazioni più e meno eſteſe ne' noſtri pendoli cicloidali non ſi compiono in tempi uguali, e che mal s'accoppia la legge delle reſiſtenze in proporzione dei quadrati delle velocità con un eſatto iſocroniſmo. Per dimoſtrare queſta verità, s'intenda la cicloide BCF (fig. 113., e 115.) diſteſa in una retta uguale GPH, e ſupponendo, che il pendolo ſi parta dal punto di

quiete B, e deſcriva in una intiera oſcillazione l'arco BCE, indi reciprocando l'arco EC*b*, e di bel nuovo l'arco *b*C*e*, e così di mano in mano, prendanſi le tre rette GI, IL, LN eguali a' predetti archi, e ſi concepiſcano delineate le ſcale delle reſiſtenze tali quali ſono da noi ſtate determinate, e che ci ſieno rappreſentate dalle curve GMI, IOL, LoN. Quindi paſſino per il punto P corriſpondente all' altro C le due linee *g*P*h*, *i*P*l*, che ſi taglino in croce, e ſi pieghino verſo l'aſſe GH con un angolo ſemiretto, e finalmente ſi compiano i triangoli rettangoli, come nello ſchema.

Egli è certo, che le impreſſioni acceleranti nella diſceſa, e ritardanti nell' aſcendimento comunicate alla ghianda dalla ſua natural gravità, e che agiſcono nella curva BCF per le direzioni delle toccanti, ci vengono eſpoſte di paſſo in paſſo per le ordinate dei triangoli P*G*g, PIK. A cagion d'eſempio, dopo eſſer diſceſo il pendolo dall' arco B*b* uguale all'abſciſſa GL, nel punto *b* ſi trova ſollecitato dalla forza tangenziale eſpreſſa per LQ: ma avendoſi da queſta a ſottrarre la reſiſtenza dinotata per LT, ne ſiegue, che nel ſuddetto punto *b* la forza accelerante purgata dalle reſiſtenze, ci viene rappreſentata dall' intercetta TQ. Meſſa dunque la LU = TQ, ſe faremo paſſare per il punto V, ed altri in ſimil maniera determinati la curva *g*URK, ſarà eſſa la ſcala delle attuali ſollecitazioni, per cui ſi regola il moto prima accelerato, e poi ritardato del pendolo.

L'andamento di queſta curva è noto per le coſe di ſopra avvertite: concioſſiachè nel punto G riſpondente al punto B, l' ordinata G*g* è uguale all'arco BC eſprimente la gravità ſpecifica intiera, che opera nel punto B ſenza intoppo di reſiſtenza. Diſcende poſcia la curva, accoſtandoſi ſempre più all'aſſe ſino ad interſecarlo nel punto R, ſito in cui la reſiſtenza è maſſima, ed uguale alla forza tangenziale: indi ſi eſtende con un'altro ramo al di ſotto, allontanandoſi dall' aſſe, e terminando nel punto K, il quale corriſponde al punto I, o ſia al punto E, dove tutto il moto ſi eſtingue. Tra li due limiti R, P analoghi agli altri due D, C la reſiſtenza ſupera la forza, che agiſce per la tangente, ed in conſeguenza la velocità della ghianda ſi va minorando: ma fra gli altri due P, I, ovvero C, E ambo le predette forze coſpirano a diſtruggere il moto acquiſtato, ed ogni applicata negativa alla curva per eſempio NX in cambio d'eſſere uguale alla differenza tra le due mentovate azioni, trovaſi formata dalla loro ſomma. Perciò eſſendo l'area G*g* UR l'aggregato di tutte le impreſſioni acceleranti, e l'area RXKI quello di tutte le ritardanti, accederà, che le predette aree ſieno fra loro uguali; richiedendoſi un cumulo pari di forze morte tanto per generare, quanto per eſtinguere una data forza viva.

Ma quando il pendolo reciprocando percorre l'arco EC*b* uguale alla retta IPL, fingaſi deſcritta la curva *i*S*l*, che ci metta ſotto gli occhi la ſcala di quegl'impulſi, da' quali viene per tutto l'arco EC*b* la ghianda attualmente ſollecitata, ed a queſta curva le rifleſſioni già fatte

s' a-

s'adattino. In altra occaſione ho dimoſtrato (*a*), che le oſcillazioni per gli archi BCE, EC*b*, *b*C*e*, ec. non ponno mai compierſi in tempi uguali, ſe le ſcale *g*RK, *s*I*l*, ec. delle forze attualmente, e ſucceſſivamente applicate al mobile non ſono curve ſimili. E ſe così è, ſimili altresì eſſer debbono quelle delle reſiſtenze GMI, IOL, ec. la ragione conſiſte in ciò, ch'eſſendo parimente ſimili i triangoli *g*GP, PIK, PLQ, ec., che ſono le ſcale delle forze tangenziali, non poſſono mai per via di addizione, o di ſottrazione generarſi curve ſimili, ſe prima fra le generatrici non ſi conſerva la ſomiglianza.

Poſta per tanto la ſimilitudine, ſiccome richiede l'ipoteſi dell'iſocroniſmo, fra le curve GMI, IOL, ec., le loro aree ſaranno in ragione duplicata delle corde GI, IL, ovvero degli archi BCE, EC*b*: ma le predette aree ſi ſono nello ſcolio precedente provate uguali alla metà delle differenze fra i quadrati degli archi BC, CE, ed EC, C*b*; dunque poſti i predetti BC$=a$, CE$=p$, C*b*$=q$, ci ſi preſenterà la ſeguente analogia $\overline{a+p}^{2} : \overline{p+q}^{2} :: a^2 - p^2 : p^2 - q^2$, dalla quale col mezzo d'una facile deduzione ſi ricava queſt'altra $a : p :: q$, e s'inferiſce, che gli archi BC, CE, C*b*, ec. coſtituiſcono una continua progreſſione Geometrica.

Si perde dunque una quantità proporzionale di moto in un numero pari di vibrazioni, ſieno eſſe o grandi, o picciole, che così richiedono gli archi decreſcenti in ſerie geometrica: ma ciò ripugna alle eſperienze Nevvtoniane, che ſi conſiderano in progreſſo. Perciò o le vibrazioni d'un pendolo a cicloide non ſono iſocrone nel pieno, o le reſiſtenze non ſeguitano la proporzione, che paſſa fra i quadrati delle velocità, o quello che mi ſembra più ragionevole, niuna di queſte due leggi eſattamente ſi verifica.

S C O L I O V.

Il Sig. Cavalier Nevvton nei Corollarj alla Propoſizione 31. lib. 2. de' ſuoi Principj propone una regola generale, cioè che poſta la reſiſtenza *r* come qualſivoglia dignità n^{ma} della velocità, gli archi ſucceſſivamente deſcritti dal pendolo alzati alla medeſima poteſtà ſono proporzionali alle loro differenze. Se queſto canone almeno proſſimamente non diſcorda dalla verità; ne ſiegue, che chiamati x, y, z i tre archi BCE, ECB, *b*C*e* percorſi dalla ghianda immediatamente l'uno dopo l'altro, avremo l'analogia $x^n : y^n :: x - y : y - z$, per mezzo della quale ſi ſcopre il valore del terzo arco z, ſuppoſti noti i due primi, indi colla ſteſſa regola il valore del quarto, e così di mano in mano viene a formarſi la progreſſione degli archi decreſcenti.

Ora

(*a*) *Schediaſma XXIII., Lemma I*

Ora io noto, che poſte le reſiſtenze in ragione duplicata delle velocità, ed i quadrati degli archi come le loro differenze; quanto più piccioli ſono gli eccessi d'un arco ſopra dell'altro immediatamente proſſimo, altrettanto la noſtra ſerie s'accoſta ad una armonica, e ſarebbe eſattamente tale, ogni qual volta le differenze foſſero minime, ed inaſſegnabili. Veggaſi il lodato Sig. Newton alla Propoſizione 5ª. del citato libro. Ci valeremo dunque di queſta ſuppoſizione fiſicamente giuſta con tanta maggior confidenza, quanto che andiamo in traccia del proſſimo, e non dell'eſatto.

Premeſſo ciò, biſogna farſi a ſciogliere il ſeguente Problema. Sia il pendolo circolare BCI (fig. 116.), di cui s'è ſervito il mentovato Scrittore nelle ſue oſſervazioni regiſtrate allo Scolio generale della ſuddetta Propoſizione 31., e partaſi la ghianda dal punto di quiete B, deſcrivendo nella prima oſcillazione l'arco BCD computate le reſiſtenze, indi nella ſeconda l'arco DCE, e l'arco ECF nella terza, e così di ſeguito, ſinattantochè in un numero determinato di vibrazioni ſi percorra nell'ultimo aſcendimento l'arco dato CH, ed il pendolo abbia perduta una data porzione del ſuo moto: ſi cerca qualmente abbiano ad eſprimerſi gli archi BCD, DCE, ec. per una continuata progreſſione armonica.

Se il pendolo ſi vibraſſe nel vano, monterebbe ſino al punto I, e l'arco BCI ſarebbe doppio di BC: ma nel pieno non oltrepaſſa il punto D; dunque fatto l'arco $BCI = 2a$, s'eſprimerà l'arco BCD per la quantità $\frac{2a}{1+x}$, e gli archi ſuſſeguenti, che debbono coſtituire una progreſſione armonica, per le frazioni $\frac{2a}{1+2x}$, $\frac{2a}{1+3x}$, $\frac{2a}{1+4x}$ ec., nelle nelle quali ſtando i numeratori coſtanti, creſcono i denominatori in ſerie aritmetica. Ma perchè il numero delle oſcillazioni $= n$ ſi ſuppone noto, e conſeguentemente anche il numero de' termini componenti la progreſſione, ne ſegue, che l'ultimo arco GCH ci verrà eſpoſto dalla frazione $\frac{2a}{1+nx}$, ed eſſendo l'arco $CH = b$, ſarà altresì noto l'arco GH, che per via di adequazione è doppio di CH; dunque ci ſi affaccerà l'equazione $\frac{2a}{1+nx} = 2b$, dalla quale ſi cava il valore di $x = \frac{a-b}{nb}$, e poſta $a-b=c$, ſarà $x = \frac{c}{nb}$. La noſtra ſerie armonica camminerà per tanto nella ſeguente maniera.

$$\frac{2a}{1+\frac{c}{nb}}, \frac{2a}{1+\frac{2c}{nb}}, \frac{2a}{1+\frac{3c}{nb}}, \frac{2a}{1+\frac{4c}{nb}}, \text{ec.} \frac{2a}{1+\frac{mc}{nb}}.$$

Quando si fa $n = m$, il termine $\frac{2a}{1+\frac{c}{b}}$ è precisamente $= 2b$.

In questo mentre facciamci strada ad un altro Problema. Continui il pendolo le sue reciprocazioni, e finalmente giunga a descrivere l'arco KCL, il quale sia in data ragione all'arco BCI $= 2a$: si dimanda quante oscillazioni richiedonsi per ottenere, che la ghianda venga a percorrere il detto arco KCL $= 2g$. Facciasi $\frac{2a}{1+\frac{mc}{nb}} = 2g$, ed in virtù di questa equazione si cerchi il valore del numero delle vibrazioni posto $= m = \frac{\overline{a-g}.\,bn}{gc}$.

Ma perchè abbiamo a valerci degli sperimenti fatti colla sua solita accuratezza dal tante volte lodato Cavalier Nevvton, fa di mestieri dalle formule antecedenti dedurre il seguente Teorema.

Si parta il pendolo dal punto di quiete E, e dopo parecchie oscillazioni nell'ultimo ascendimento descriva l'arco CF, di modo che posti gli archi CE, CD uguali, perda la quantità del moto espressa per la differenza FD, che all'arco CE, o CD abbia una data relazione. Similmente calando la ghianda dal punto di riposo K, e fatto l'arco CL $=$ CK, compiuto che sia un numero qualunque di vibrazioni, monti nell'ultima salita per l'arco CM, e perda la quantità del moto espresso per la differenza ML, con questa condizione però, che si serbi l'analogia DF : DC :: LM : LC; laonde per una parte, o per l'altra si perda una quantità proporzionale di moto giusta la frase Nevvtoniana: io dico, che come l'arco DC all'arco LC, così reciprocamente il numero delle vibrazioni, per cui si perde la quantità del moto DF, al numero delle vibrazioni, per cui si perde la quantità del moto LM, perfistendo però nella supposizione, che gli archi decrescenti costituiscano, come s'è detto di sopra, una progressione armonica.

In

In fatti assumendo, che il pendolo cominci il suo moto dal punto B, e si sappia per esperienza, ch' egli perde una data porzione di moto in un dato numero di vibrazioni, montando ultimamente per l'arco CD; posso determinare in quante oscillazioni giunge esso a descrivere prima l'arco EC, e poi l'arco CF. Presa per mano la nostra ultima formula

$\frac{\overline{a-g}}{g} \cdot \frac{bn}{c} = m$, in essa avremo $a =$ all' arco BC, $b =$ all' arco CD;

$c = a - b =$ alla differenza ID, ed $n =$ al numero noto delle vibrazioni, nelle quali si perde il moto ID: ed oltre ciò la spezie g ci rappresenterà l'arco EC, ed m il numero cercato delle vibrazioni, compiuto il quale descrivesi dalla ghianda lo stesso arco EC,

Ora se noi chiameremo G l'arco CF, ci si presenterà la seconda equazione, cioè $\frac{\overline{a-G}}{G} \cdot \frac{bn}{c} = M$, e sottratti l'uno dall'altro i membri delle due equazioni, $\frac{a}{G} \cdot \frac{bn}{c} - \frac{bn}{c} - \frac{a}{g} \cdot \frac{bn}{c} + \frac{bn}{c} = M - m$, cioè

$\frac{\overline{a-a}}{G} \cdot \frac{bn}{g} \cdot \frac{}{c} = M - m = x$, esprimendosi per x il numero delle oscillazioni, in cui il pendolo, che si parte dal punto di quiete E, arriva a descrivere l'arco CF, e perde la parte di moto espressa per DF.

Collo stesso giro di discorso, chiamando f l'arco KC, ed F l'arco CM, scopriremo, che il numero delle oscillazioni y, per cui si perde la porzione di moto ML, ci viene rappresentato dall' equazione

$\frac{\overline{a-a}}{F} \cdot \frac{bn}{f} \cdot \frac{}{c} = y$, e voltate le due equazioni in una proposizione, avrassi

$\frac{a-a}{G} : \frac{a-a}{g} :: \frac{a-a}{F} : \frac{a-a}{f} :: x : y$: ma per l'ipotesi $G : g :: F : f$; dunque se sarà

$G : g :: F : f :: 1 : p$, troverèmo $\frac{a-a}{G} : \frac{a-a}{pG} :: \frac{a-a}{F} : \frac{a-a}{pF} :: x : y$, o sia

$\frac{ap-a}{pG} : \frac{ap-a}{pF} :: x : y$, vale a dire i due numeri delle vibrazioni, in cui

si

ſi perde una quantità proporzionale di motō, in ragione reciproca degli archi EC : KC : lo che doveva dimoſtrarſi.

S C O L I O VI.

Poſſo preſentemente paragonare quanto riſulta dal calcolo con ciò, che mi dà l'eſperienza, e vedere nel tempo medeſimo ſino a qual ſegno l'ipoteſi aſſunta s'accorda colle operazioni della Natura.

Fra le molte oſſervazioni del Sig. Nevvton io ne ſcelgo due fatte nell'aria, ſiccome le più eſatte, e le più compiute. Nella prima ſi faceva uſo d'un globo di legno, il cui diametro era di dita $6\frac{7}{8}$ miſura di Londra, ed il peſo d'oncie Romane $57\frac{7}{22}$, ſoſpeſo da un tenue filo, in maniera che tra il punto di ſoſpenſione, ed il centro d'oſcillazione del globo ci foſſe l'intervallo di piedi diece, e mezzo. Laſciato cadere il pendolo da varj punti di quiete B, G, K, onde i primi archi di diſceſa BC, GC, KC foſſero in ragion dupla, cioè di dita 64, 32, 16, 8, ec., ſi notava diligentemente il numero delle vibrazioni, nelle quali in qualunque caſo ſi perdeva l'ottava, o la quarta parte del moto; così che per cagion d'eſempio deſcrivendoſi dal globo il primo arco BC $\doteq$ CI, giungeſſe eſſo a percorrere dopo un dato numero d'oſcillazioni nell'ultimo aſcendimento l'arco CD, e la differenza DI foſſe l'ottava, o la quarta parte dell'arco primiero BC.

Atteſo che gli archi coſtituiſcono una ſerie geometrica decreſcente, il cui eſponente è uguale al binario per le coſe de me dimoſtrate nell'ipoteſi, di cui ſi fa parola, i numeri delle vibrazioni dovrebbono altresì formare una progreſſione creſcente dello ſteſſo genere, la quale però aſſai diſcorda dalla ſperienza, come appare dall'anneſſa tavola.

Archi di prima diſceſa ——	64.	32.	16.	8.	4.	2.
Archi d'ultimo aſcendimento —	56.	28.	14.	7.	$3\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$.
Vibrazioni ſecondo il calcolo —	$9\frac{2}{3}$.	$19\frac{1}{3}$.	$38\frac{2}{3}$.	$77\frac{1}{3}$.	$154\frac{2}{3}$.	$309\frac{1}{3}$.
Vibrazioni giuſta l'eſperienza —	$9\frac{2}{3}$.	$18\frac{1}{2}$.	$35\frac{1}{2}$.	69.	121.	164.
Archi di prima diſceſa ——	64.	32.	16.	8.	4.	2.

Archi d'ultimo aſcendimento — 48. 24. 12. 6. 3. $1\frac{1}{2}$.

Vibrazioni ſecondo il calcolo — $22\frac{2}{3}$. $45\frac{1}{3}$. $90\frac{2}{3}$. $181\frac{1}{3}$. $362\frac{2}{3}$. $725\frac{1}{3}$.

Vibrazioni giuſta l'eſperienza — $22\frac{2}{3}$. $41\frac{2}{3}$. $83\frac{1}{3}$. $162\frac{1}{2}$. 272. 374.

Nella ſeconda ſperienza dal medeſimo filo lungo piedi $10\frac{1}{2}$ pendeva una palla di piombo di due dita di diametro, e di peſo d'once Romane $26\frac{1}{4}$. Eccone il riſultato.

Archi di prima diſceſa	64.	32.	16.	8.	4.	2.	1.
Detti d'ultimo aſcendimento	56.	28.	14.	7.	$3\frac{1}{2}$.	$1\frac{3}{4}$.	$\frac{7}{8}$
Vibrazioni ſecondo il calcolo	30.	60.	120.	240.	480.	960.	1920.
Dette giuſta l'eſperienza	30.	53.	$90\frac{1}{2}$.	140.	193.	228.	226
Archi di prima diſceſa	64.	32.	16.	8.	4.	2.	1.
Detti d'ultimo aſcendimento	48.	24.	12.	6.	3.	$1\frac{1}{2}$.	$\frac{3}{4}$.
Vibrazioni ſecondo il calcolo	70.	140.	280.	560.	1120.	2240.	4480.
Dette giuſta l'eſperienza.	70.	121.	204.	318.	420.	518.	510.

SCOLIO VII.

Sopra gli addotti calcoli non ſarà fuori di propoſito il fare alquante curioſe annotazioni. Quando gli archi ſono aſſai grandi, vanno eſſi decreſcendo ſenſibilmente in una progreſſione armonica, e con tale pre-

precisione, che nulla più. Nella prima esperienza quel pendolo, che percorre un arco di dita 64 nella sua prima discesa, si riduce a descrivere un' arco d'ultimo ascendimento di dita 56. in vibrazioni n°. $9\frac{2}{3}$: si dimanda in quante oscillazioni seguitando il nostro computo si ridurrà a salire per un arco di dita 48. La formula dello scolio quinto ci dà generalmente $\frac{\overline{a-g}}{g}\cdot\frac{bn}{c}=m$, la quale limitata giusta i dati, e la ragione, che passa fra le quantità a, b, g, c, rinviene al n°. $2\frac{1}{3}=m$, o pure $9\frac{2}{3}\cdot 2\frac{1}{3}=22\frac{5}{9}=m$, numero pochissimo diverso dall' altro $22\frac{2}{3}$ somministratoci dallo sperimento.

Similmente se nella seconda tavola dell' antecedente scolio il pendolo del piombo si riduce dalle dita 64. alla 56. in oscillazioni n°. 30, a norma del nostro canone moltiplicando il n°. 30. per $2\frac{1}{3}$ scopriremo, che in 70. vibrazioni sarà obbligato a salire per un arco di dita 48. ma in tante appunto nè più nè meno è succesſo l'effetto per testimonianza del Sig. Newton; dunque negar non si può, che almeno nelle maggiori reciprocazioni dei pendoli abbia luogo la serie armonica.

Quanto più gli archi diventano piccioli, tanto più questa legge si discosta dall'esperienza, ed in progresso si allontana con tali eccessi, che il numero delle oscillazioni, che avrebbono ad impiegarsi, è qualche fiata più che quadruplo di quelle, che in fatto si osservano. Ha dunque ragione lo Scrittore citato di asserire. *Resistentia globi, ubi celerius movetur, est in duplicata ratione velocitatis quam proxime; ubi tardius, paulo major, quam in ea ratione.*

S C O L I O VIII.

Considerato l'andamento più da presso, e penetrando più addentro nella ricerca, mi metto sotto gli occhi le seguenti progressioni decrescenti

1°. $a, x, 2x-a, 3x-2a, 4x-3a$ serie aritmetica

2ª. $a, x, \frac{x^2}{a}, \frac{x^3}{a^2}, \frac{x^4}{a^3}$ ferie geometrica

3ª. $a, x, \frac{ax}{2a-x}, \frac{ax}{3a-2x}, \frac{ax}{4a-3x}$ ferie armonica

4ª. $a, x, y, u, z.$

5ª. $a, x, p, q, r.$

Queſte due ultime progreſſioni da mé tali ſi aſſumono, che nella quarta ſia come il quadrato del primo termine a quel del ſecondo, così la differenza fra i due primi termini a quella, che paſſa fra il ſecondo, ed il terzo, e così ſucceſſivamente, cioè come

$a^2 : x^2 :: a - x : x - y$, e come $x^2 : y^2 :: x - y : y - u$, ec.

Nella quinta poi voglio, che i termini di mano in mano ſieno in ragione triplicata delle loro differenze, vale a dire come

$a^3 : x^3 :: a - x : x - p$, e come $x^3 : y^3 :: x - p : p - q$, ec.

Le progreſſioni di ſimil genere tutte così ſi coſtruiſcono. Sia $a^m : x^m :: a - x : x - y$; dunque $a^m x - a^m y = ax^m - x^{m+1}$, ovvero $x - \frac{x^m}{a^{m+1}} + \frac{x^{m+1}}{a^m} = y$. Dati pertanto i due primi termini a, x, per aver il terzo, ſi contino nella progreſſione geometrica tanti termini, ommeſſo il primo, quante unità ſono contenute nell'eſponente $m+1$, indi ſommati inſieme il ſecondo e l'ultimo, dall'aggregato di eſſi ſi ſottri il penultimo, ed il reſiduo ſarà il terzo termine della noſtra progreſſione. Per eſempio ſia $m = 2$: prendo i tre termini $x - \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{aa}$, gli eſtremi col ſegno affermativo, ed il medio col negativo, ed ho il valore della quantità ignota y. Chi voleſſe poi il quarto termine u, perverrebbe all'equazione $y - \frac{y^2}{x} + \frac{y^3}{x^2} = u$, e così ſeguitando all'infinito.

In cercando il terzo termine della quinta ſerie, diſpongo le quattro grandezze proporzionali $x, \frac{x^2}{a}, \frac{x^3}{a^2}, \frac{x^4}{a^3}$, e ſcelta la prima, la per

nul-

nultima, e l'ultima coi segni appropriati, dico essere $p = x - \frac{x^3}{a^2} + \frac{x^4}{a^3}$.

Quello che fa presentemente a mio proposito si è, che nelle progressioni di sopra esposte, fissati i due primi termini a, x in ciascheduna di esse uguali, il terzo dell'aritmetica $2x - a$ sarà minore del terzo $\frac{x^2}{a}$ nella geometrica, e questo altresì minore del terzo $\frac{ax}{2a-x}$ nell'armonica, il quale resterà superato dal terzo $y = x - \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{aa}$ della quarta serie, e finalmente il terzo $p = x - \frac{x^3}{a^2} + \frac{x^4}{a^3}$ della quinta sarà maggiore del terzo y della quarta. Ciò si verifica in tutti i termini, che compongono le colonne verticali delle predette progressioni, siccome ce ne può convincere il calcolo, senza che io mi prenda pensiero di dedurre la dimostrazione, che ci condurrebbe troppo lontani dal nostro soggetto.

Premesse queste necessarie avvertenze, si può francamente conchiudere, che preso per primo l'arco BCI$=a$, per secondo l'arco BCD$=S$, il quale nella prima oscillazione dal pendolo si percorre, e per terzo l'arco immediatamente susseguente DCE; questi tre archi mal vengono espressi da' primi tre termini della serie quarta, e peggio da quei della quinta. La ragione si è, perchè se quando gli archi si assumono di picciola estensione, i termini, che compongono la terza progressione armonica, si discostano per lungo tratto dall'esperienza; tanto maggiormente si scosteranno que' termini, che formano le due serie inferiori, i quali crescendo quantunque di poco sopra quelli della terza c'insegnano, che ci vorrebbe un maggior numero di vibrazioni, di quello che portano i calcoli da noi fatti, perchè la ghianda perdesse una data porzione di moto: e pure gli esperimenti ne richiedono uno assai minore, siccome dalle tavole si rende manifesto.

E se così è, le resistenze dei mezzi fluidi, che fanno contrasto al moto dei pendoli, non istanno dentro i limiti tra il quadrato, ed il cubo delle attuali velocità, conforme dover intervenire nei corpi solidi, che per linea retta camminano, abbiam dimostrato, mentre però il fluido cacciato di luogo si trovi costituito in riposo. Bisogna dunque ricorrere a leggi, ed a limiti affatto differenti, che colla scorta dell'esperienza si anderanno investigando.

Sul principio del moto negli archi grandi la resistenza sta in proporzione duplicata della velocità, ma presto si riduce a tale, che gli archi successivamente descritti costituiscono una serie armonica. In pro-

gres-

greſſo poi facendoſi gli archi di mano in mano percorſi ſempre più piccioli, ſi varia la progreſſione, diſponendoſi eſſi in certe ſerie ignote, che ſtanno di mezzo tra l'armonica, e la geometrica, allontanandoſi nel proſeguimento ſempre più dalla prima, ed avvicinandoſi alla ſeconda.

Merita la coſa, che ſi ponga in tutto il ſuo lume. Rimettiamoci a memoria, che ſe gli archi decreſcenti foſſero diſpoſti in una continua progreſſione geometrica, accaderebbe, che il pendolo tanto nelle reciprocazioni grandi, quanto nelle picciole verrebbe a perdere una quantità proporzionale di moto dopo compiuto un numero pari di oſcillazioni, A cagion d'eſempio ſe per la ſeconda tavola il globo da un arco di dita 64. paſſa ad un altro di dita 56. in trenta vibrazioni; in altrettante preciſamente farebbe tranſito da un arco di dita 32. a quello di dita 28, e da un arco di dita 16 a quello di dita 14, e così di ſeguito. Quali ſieno in ſimili circoſtanze i numeri delle vibrazioni, che riſpondono alla ragione armonica, e quelli, che ci vengono ſomminiſtrati dall'eſperienza, la tavola ce lo dimoſtra, ed il riſultato apparirà dal ſeguente computo.

Vibrazioni ſecondo la

ragione	Geometrica	eſperienza	ragione armonica	eſperienza
1ª.	30	30+23	60	60—7=53
2ª.	30	$30+60\frac{1}{2}$	120	$120-29\frac{1}{2}=90\frac{1}{2}$
3ª.	30	30+110	240	240—110=140.
4ª.	30	30+163	480	480—287=193.
5ª	30	30+198	960	960—732=228.

Avuto riguardo per una parte agli eccelſi, e per l'altra alle differenze, ſi ſcopre, che nel principio del moto, quanto le vibrazioni s'eſtendono per uno ſpazio più grande, l'eſperienza s'accoſta più da vicino alla ragione armonica: ma nel progreſſo, qualunque ſia l'andamento, l'approſſimazione ſi volta dalla parte della ſerie geometrica, e tanto ſe le avvicina, ch'egli è neceſſario, che prima con queſt'ultima ſi confonda, e poi ſe la laſſi addietro, ogni qual volta poteſſero continuarſi le oſſervazioni fino agli archi minimi, ed al ſenſo della viſta totalmente imperçettibili.

Io ne ricavo la prova dal fatto: concioſſiachè ſe l'arco KC è di due dita, per perdere l'ottava parte del moto ci vogliono 228. oſcillazioni, e 518. per perdere la quarta parte. Pervenuto poi l'arco NC

alla

alla misura d'un solo dito, se gli archi di passo in passo decrescenti si disponessero a formare una serie geometrica, quello espresso per l'unità non potrebbe ridursi a $\frac{7}{8}$, ovvero ad $\frac{1}{4}$, salvo che in tante vibrazioni nè più nè meno, quante sono esposte da suddetti numeri 228, e 518: ma per tal effetto meno se ne impiegano, bastando secondo l'esperienza nel primo caso oscillazioni 226, e nel secondo 510; dunque gli archi successivamente descritti dal pendolo si fanno minori, messi a confronto con quelli, che si adattano alla progressione geometrica: e perciò si dee conchiudere, che si faccia passaggio ad altre progressioni incognite, che stanno di mezzo fra la geometrica, e l'aritmetica, e che discostandosi sempre più l'andamento dalla prima, si vada avvicinando alla seconda, alla quale non si può mai pervenire, atteso gli assurdi, che ne nascerebbono, se non in caso, che si percorra l'ultimo spazio fisicamente infinitesimo con una minima celerità, e la ghianda si riduca alla quiete, soffrendo per questo impercettibile tratto una resistenza quasi inassegnabile, e prossimamente uniforme.

I due limiti pertanto delle resistenze vengono determinati per una parte negli archi grandi da un contrasto proporzionale al quadrato della velocità, e per l'altra in quell'arco minimo, ed ultimo, che sta di mezzo fra i confini del moto, e della quiete, da una opposizione, che si può prender per costante.

SCOLIO IX.

Io non saprei dedurre altronde la causa fisica degli addotti fenomeni, fuorchè dai moti irregolari, e dai bilanciamenti, ai quali è sottoposto il fluido per occasione dell'iterate reciprocazioni del pendolo. Egli è necessario, che le minime particelle componenti il liquido si trovino perturbate, ed agitate con direzioni parte cospiranti, e parte contrarie, senz'aver mai l'opportunità di rimettersi in una perfetta quiete. E ciò tanto più succede in fatto, quanto le oscillazioni sono più corte. Nelle più lunghe, ed estese percorrendosi archi grandi, e discendendo la ghianda per una curva assai inclinata, incontra obbliquamente gli strati del fluido disposti in diversi piani, ed il moto è misto di verticale, ed orizzontale: ma nelle piccole vibrazioni gli archi declinano pochissimo dalla linea retta, ed il pendolo andando, e ritornando per brevissimi spazj comunica sempre nuovo impeto alla medesima materia, che si mantiene, per dir così, in un perpetuo flusso, e riflusso, facendosi tante riflessioni, quante sono le reciprocazioni.

Qual meraviglia è dunque, se la resistenza cresce, non già assolutamente considerata, ma relativamente alla celerità, che nella ghianda risiede? Ha notato il Sig. Newton, che fatto oscillare nell'acqua un pendolo, ogni qual volta il vaso, che conteneva il fluido, era troppo angu-

angusto rispetto al diametro del globo oscillante, s'aumentava la resistenza; perchè l'acqua messa in moto era obbligata a riflettersi nelle vicine pareti del vaso oltre il dovere ristretto, nè potea cedere dai lati liberamente.

Dove ho favellato delle resistenze, ho messo in considerazione i moti del mezzo, a traverso del quale il solido s'apre la strada, e ne ho cercate le leggi nei casi più semplici, o almeno i limiti, da cui vengono circoscritte. La ricerca ci può dar qualche lume nel presente incontro, ma non già tale, che se ne possa aver il preciso, a causa degli ondeggiamenti irregolari, e contrarj, e delle velocità variabili al fluido comunicate. Una conclusione però si verifica, ed è che quando il fluido contrasta al moto del solido colla sua inerzia animata da qualche grado di celerità opposta, egli è necessario, che il corpo si riduca finalmente alla quiete.

Da tutte queste investigazioni altro non si può conchiudere, se non che i pendoli a cicloide, i quali anno fatto tanto onore al celebre Ughenio considerati nel vano, per averne egli prima d'ogni altro scoperte le mirabili proprietà, non sono di molto uso nel pieno, dovendosi secondo il comun consentimento de' più periti Artefici preferire i circolari di gran diametro, e che percorrano archi assai piccioli. La ragione consiste in ciò, che se fra le infinite curve ci è quella, cui convengono le oscillazioni isocrone, non ostante la resistenza del mezzo, e le stravaganti leggi, dalle quali è regolata l'opposizione, una parte minima d'un cerchio per la teorica de' raggi osculanti fisicamente combacierà, e si confonderà colla curva medesima.

SCHEDIASMA XXXI. (*)

Sopra le leggi delle resistenze, con le quali i mezzi fluidi ritardano il moto de' corpi solidi.

LA Geometria, che ne' primi tempi nata da debolissimi principj, a guisa d'un Fiume reale ricevendo col progresso dei Secoli il tributo di nuove invenzioni, s'è andata di passo in passo ingrossando, finalmente solo a giorni nostri è giunta a metter foce nell'immenso Oceano dell'infinito. Quando la quantità s'è cominciata a risolvere ne' suoi elementi infinitamente piccioli di varj gradi, e s'è scoperto il me-

(*) *Questo Schediasma unitamente coll'Annotazione del Sig. Abate Conte Girolamo Lioni fu impresso l'anno 1722. nel Tomo secondo de' supplementi al Giornale de' Letterati d'Italia. Il C. Jacopo per altro vi lavorava intorno l'anno 1717. Veggasi la seconda lettera dello Schediasma XXXVII. verso il fine.*

metodo analitico di maneggiarli con egual franchezza, come se fossero grandezze finite, le Scienze Fisiche, e Matematiche sono comparse in pubblico sotto un' altro aspetto; e si sono poste in tutto il loro lume tante sublimi verità, che pare aver noi, per così dire, alle mani il computo stesso della Natura.

La principale difficoltà consiste in fissare le vere leggi, di cui la sagacissima Natura nelle proprie operazioni si serve; mentre in tal ricerca sogliono frequentemente riuscir inutili i nuovi calcoli, e molti Autori di gran nome si sono contentati d' applicarli ad alcune ipotesi più verisimili, che vere, e certamente non dimostrate, oppure d' abbracciare in molti casi sotto una formula generale tutte le possibili ipotesi, per mostrare, se mai venisse a manifestarsi la vera d' averla in qualche modo prevenuta.

S'io non prendo errore, uno degli usi migliori, che possa farsi del computo differenziale, ed integrale si è, che col suo mezzo restino convinte di falso parecchie leggi naturali, che dagli Scrittori si veggono adottate come infallibili; imperocchè una Ipotesi, che non sia vera, non può mai reggere a tutte le conseguenze, che da essa si deducono, altrimente come mai potrebbe rigettarsi, se a tutti i Fenomeni esattamente corrispondesse? So per esperienza quant'intoppi si frappongano a chi s'ingegna di battere questa strada. Accade talora, che ci sieno ignoti per la maggior parte i Fenomeni, e che le osservazioni sieno quasi impossibili a farsi con accuratezza; perchè il senso ci dà il prossimo, e non mai l'esatto. Succede bene spesso, che il metodo degl' infiniti sul più bello ci abbandoni, a causa della confusione delle incognite, e delle loro flussioni, e per ciò abbiamo la necessità di raggirarci per sentieri diversi, e soddisfare a cento ardui Problemi, prima che si pervenga ad un effetto noto, e palpabile, che distrugga l'ipotesi assunta, e l'assurdo, da cui va accompagnata, chiaramente ci manifesti. Molte volte si viene a capo di ciò, che si cerca, per via di pazienza, o d'industria, ma non sarebbe già maraviglia, che si dovesse ancora la sua parte al caso, ed alla fortuna, che spesse fiate ha il suo ingegno.

Io mi sono proposto d' esaminare presentemente, se quelle leggi, con cui si pretende da' Matematici di primo grido, che i mezzi fluidi s' oppongano al moto de' corpi solidi, sieno tutte vere, e tutte possano in varie circostanze aver luogo; o pure se per avventura sieno false falsissime alcune d' esse, che vengono troppo coraggiosamente vantate per certe, e per evidenti

Affine di farmi strada a ciò, ch'io sono per dire, è da saperfi, che l'incomparabile Galileo, il quale prima d'ogni altro, scoperte con ammirabile sagacità le leggi fondamentali del moto, ci ha per così dire, spalancate le porte della Natura, ha dovuto nelle sue dimostrazioni prescindere dalle resistenze, e filosofare su i moti accelerati, come se i gravi per lo vano verso il loro centro piombassero: non già perchè egli ignorasse, che da qualunque mezzo, quanto si voglia ra-

ro, e cedente viene a poco a poco ritardata la velocità del mobile; ma perchè a' ſuoi tempi non avea fatti tali progreſſi la Geometria, che col ſuo ajuto ſi poteſſero ridurre a calcolo le reſiſtenze.

Il dotto VVallis Ingleſe principiò a metter mano in queſta aſtruſa materia, ſupponendo, che la reſiſtenza del mezzo ſuſſe ſempre in ragione della velocità, con cui il corpo ſolido attualmente cammina; non già per eſſer l'ipoteſi o la più ſemplice, o la più vera, ma ſolo perchè ad eſſa poteva più facilmente adattare le proprietà delle ſue geometriche progreſſioni. Qualche tempo dopo il famoſo Criſtiano Ughenio fattoſi a ſpecolare ſopra lo ſteſſo ſoggetto ſtabilì una nuova regola, eſſere le reſiſtenze in proporzione non ſemplice, ma duplicata delle velocità; canone, che ſarebbe ſtato concordemente, e ſenza contraddizione ricevuto, ſe il celebre Iſacco Nevvton con una rifleſſione più ingegnoſa, che ſoda, combinate inſieme le due mentovate leggi, non ne aveſſe architettata una terza. Conſidera egli nel fluido una doppia repugnanza ad eſſere penetrato, o diviſo. Naſce l'una dalla maſſa, o ſia dalla quantità della materia fluida, cui debbe il moto comunicarſi, ed è ſempre proporzionale alla denſità: naſce l'altra dalla difficoltà, che ſi prova nello ſtaccare una particella del fluido dalle contigue, e s'appella tenacità. Reſta il mobile ritardato dalla prima in proporzione duplicata della propria velocità, e dalla ſeconda, ſe ſi porge fede alla teorica del Sig. Nevvton, in proporzione ſemplice della velocità medeſima; e ſiccome quella ha il ſuo luogo ne' mezzi dotati d' una perfetta fluidità; così queſta in certi mezzi tenaci, e viſcoſi, per i quali a lento paſſo il corpo duro ſi va avanzando. Perchè poi ogni liquore, oltre la maſſa, di cui è compoſto, e da cui la forza d'inerzia dipende, ha qualche grado in ſe ſteſſo di viſcoſità, pare, che uniti inſieme i due impedimenti, un terzo ne riſulti, per cui il fluido s'oppone al moto de' ſolidi, parte in ragione della velocità, e parte del ſuo quadrato, onde abbia a formarſi la ſomma di queſte due quantità, per ben eſprimere la forza negativa, cui ſi dà il nome di reſiſtenza.

Meſſo da parte il canone Ugheniano, ſpero di far toccar con mano eſſere gli altri due ad una chiara, e manifeſta ſperienza direttamente contrarj. E' coſa maravigliosa, che avendo il lodato Sig. Nevvton, e dopo lui, per tacer di molti altri, li Sig. Varignon, ed Ermanno maneggiate per tutti i verſi le formule, che dalle accennate leggi derivano, non ſia mai loro venuto fatto d' incontrare qualche conſeguenza evidentemente falſa, ed alle operazioni della Natura ripugnante. Anch'io lungamente, e ſenza profitto per un labirinto di calcoli raggirato mi ſono, e finalmente ho ſcoperto ciò, che andava cercando, con la ſoluzione del ſeguente Problema, che non è già de' più facili della Geometria.

PROBLEMA.

Determinare nella Cicloide il moto d'un Pendolo, a cui si resista dal mezzo in ragione della velocità.

Il tante volte lodato Sig. Isacco Newton, non avendo alle mani la chiave analitica per satisfare al quisito, si fece a scioglierlo per via di conghietture; e col supporre falsamente, che la palla del pendolo partita dal punto di quiete R (fig.117.) discenda prima per l'arco maggiore RT, e poi monti in vigore dell'impeto concepito per l'arco minore TX, distesa la curva RTX in una retta uguale *rtx* (fig.118.); indi prese come absciisse gli spazj crescenti *rt*, *ry*, *rx*, ed alzate a piombo le ordinate *tu*, *yz*, che ci rappresentino le velocità acquistate dal mobile dopo avere trascorsi i predetti spazj, si diede a credere, che la curva locale, e nascente *ruzx* fosse una spezie d'ellisse. All' incontro il Sig. Ermanno confessò ingenuamente, che „ si resistentiæ sint ut celeritates acquisitæ, nondum constat, qua ratione curva *rzx* construi debeat, ne quidem concessis quadraturis figurarum curvilinearum „ e perciò sospettò, che appartenesse piuttosto alla famiglia delle trascendenti. Ma perchè entrambi si sono per lungo tratto allontanati dal vero, il loro esemplo ci può servire di ammaestramento, quanto sia cosa pericolosa il porsi ad indovinare in Geometria.

Sia per tanto la cicloide QTU (fig.117.), in cui si vibri un pendolo lasciato cadere dal punto di quiete R, che in forza della sua natural gravità descriva l'arco RST, con questa condizione, che in ogni punto, per esempio S, la resistenza del mezzo sia in ragione della velocità acquistata. Pongo l'arco TS$=y$, la resistenza nel punto S$=r$, la quale essendo alla velocità in data proporzione potrà esporsi con l'equazione $r=2bu$: e perchè s' intende espressa per il doppio diametro del cerchio generatore della cicloide la gravità costante, con la quale discenderebbe a piombo il mobile per il dato fluido, qualunque ella si possa essere (mentre su questo punto mi riserbo di scoprire un grande inganno) la forza tangenziale nel sito S da essa derivata ci verrà rappresentata dall'arco ST, e conseguentemente avremo per i canoni noti l'equazione $\overline{y-2bu}.-dy=udu$, ovvero (A) $-ydy+2budy=udu$.

Prima di tutto è d'uopo liberare la formula della confusione delle incognite, ed io potrei a tal effetto metter in uso la bella regola già pubblicata dal dottissimo Sig. Gabbriello Manfredi ne' nostri Giornali, e ch' essere familiare ai chiarissimi Signori Bernulli da varj Schediasmi inseriti negli Atti degli Eruditi di Lipsia bastantemente comprendo; per cui si fa succedere felicemente la separazione delle indeterminate nelle equazioni differenziali del primo grado, ogni qual volta in tutti i termini dell'espressione gli esponenti delle quantità variabili finite montano alla stessa dimensione. Facciasi dunque $u=yz$, ed $uu=yyzz$; quindi prese

le differenze, $udu = yyzdz + zzydy$, e ſoſtituiti opportunamente nella noſtra eſpreſſione (A) i valori della grandezza u, e della fluſſione udu, avraſſi $-ydy + 2bzydy = yyzdz + zzydy$, cioè $-ydy + 2bzydy - zzydy = yyzdz$, ed iſtituite le neceſſarie diviſioni, $-\frac{dy}{y} = \frac{zdz}{a - 2bz + zz}$. Che

ſe per avventura ſi deſideraſſe una formula più facile a maneggiarſi, pongaſi $b - x = z$, onde ſia $bb - 2bx + xx = zz$, $-bdx + xdx = zdz$, e finalmente $a - 2bz + zz = a - bb + xx$; così che ſurrogati i valori, riſulti la nuova equazione differenziale $\frac{-dy}{y} = \frac{-bdx}{a - bb + xx} + \frac{xdx}{a - bb + xx}$

L'integrazione del primo, e del terzo termine ſempre s'ottiene col mezzo dei logaritmi; ma quella del ſecondo può eſſere algebratica, ſe ſarà $a = bb$, o pure traſcendente, e dipendere dalla quadratura del cerchio, quando ſia a maggiore di bb, ovvero da quella dell'iperbola in caſo, che l'unità a ſia minore del quadrato bb. Le curve dunque infinite, che ſoddisfanno alla quiſtione propoſta, ſono parte del genere delle analitiche, e parte delle meccaniche, ſecondo il diverſo valore della quantità $2b$, che paragonata con l'unità, fiſſa la proporzione coſtante tra la velocità, e la reſiſtenza.

Fatte queſte oſſervazioni, non ſarebbe difficile paſſare alla coſtruzione: ma a me, cui non tanto cale della ſoluzione, quanto della ſua eleganza, e ſemplicità, ſia permeſſo il battere una ſtrada diverſa, e di adoprare una mia particolar maniera di ſviluppare le incognite, per cui ſi ſtendono i confini del calcolo ſommatorio, e con l'ajuto di cui in certi caſi più ardui infinite ſeparazioni s'ottengono, che ſtancherebbono per altro la pazienza di qualunque indefeſſo Analiſta, come penſo di far vedere a miglior occaſione.

Intanto richiamata a memoria la noſtra equazione (A) $-ydy + 2bdy = udu$, facciaſi $u = my - p$ (la lettera p dinota una quantità indeterminata aſſunta, ed m una coſtante da determinarſi nel progreſſo dell'operazione) ſarà dunque $uu = mmyy - 2myp + pp$, e preſe le differenze, $udu = mmydy - mydp - mpdy + pdp$, e nella formula (A) ſoſtituendo i valori trovati, di modo che ſvaniſca la ignota u, avremo (B) $-ydy + 2bmydy - 2bpdy = mmydy - mydp - mpdy + pdp$. Stabiliſco la ſeguente equazione $-ydy + 2bmydy = mmydy$, ovvero $-1 + 2bm = mm$, dalla quale ſi ricava $m + \frac{1}{m} = 2b$. Cancellati in queſto mentre nell'eſpreſſione

(B) i termini, che ſi diſtruggono, reſterà $= 2bpdy = -mydp - mpdy + pdp$,

pdp; cioè $\overline{2b-m}\cdot pdy-mydp=-pdp$, e collocato in cambio di $2b$ il suo valore $m+\frac{1}{m}$, (C) $pdy-mmydp=-mpdp$, ed integrando non ommessa la costante, $g+\frac{y}{p^{mm}}=\frac{mp^{1-mm}}{mm-1}$, oppure (D) $gp^{mm}+y=\frac{mp}{mm-1}$.

Per fissar poi il valore della costante g, si osservi, che nel punto R principio della discesa, supponendosi la velocità nulla, l'arco $TR=x$ diventa uguale ad una costante per esempio c, e nello stesso caso si raccoglie dall'equazione assunta $u=my-p$, che si fa $p=mc$. Se dunque nella formula (D) in vece di y, p si sostituiranno i valori c, mc, sarà $g=\frac{1}{c^{mm-1}\cdot\overline{m^{mm+2}-m^{mm}}}$, il qual valore posto in cambio di g nell'equazione (D), avremo (E) $\frac{mp}{mm-1}-\frac{p^{mm}}{c^{mm-1}\cdot\overline{m^{mm+2}-m^{mm}}}=y$; e moltiplicando tutti i termini per m, e collocando in vece di my il suo valore $u+p$ cavato dall'espressione sussidiaria $u=my-p$, sarà

(F) $\frac{p}{mm-1}-\frac{p^{mm}}{c^{mm-1}\cdot\overline{m^{mm+1}-m^{mm-1}}}=u$.

Le due equazioni fondamentali (E) (F) serviranno come di base alla costruzione; ma prima sarà ben fatto il considerare alcune determinazioni, che mettono in chiaro la natura del Problema.

I. La quantità m non può mai essere negativa, e molto meno immaginaria; e ciò, perchè, stante l'equazione $m+\frac{1}{m}=2b$, verrebbe ad essere negativa, o immaginaria la grandezza $2b$, la quale esprimendo, paragonata con l'unità, la proporzione della resistenza alla velocità, è d'uopo, che sia reale, e positiva; altrimenti la quistione sarebbe stata proposta sotto un ipotesi impossibile.

II. Sarà pertanto necessariamente affermativo l'esponente mm: Quindi nella formula (E) fatto l'omogeneo di comparazione $y=x-z$, con questa condizione, che si formino due parziali equazioni $\frac{mp}{mm-1}=x$, e $\frac{-p^{mm}}{c^{mm-1}\cdot\overline{m^{mm+2}-m^{mm}}}=-z$, la prima di esse sarà al triangolo, e la seconda ad una delle infinite parabole, e non

mai

mai delle infinite iperbole. Queſta rifleſſione ha parimente luogo nella formula (F) maneggiata con lo ſteſſo metodo.

III. Ben è vero, che l'eſponente mm può eſſere razionale, ſordo, ed anche miſto di quantità reali, ed immaginarie. Nel primo caſo le parabole ſono quaſi ſempre algebratiche, negli altri meccaniche, e per la loro coſtruzione biſogna ricorrere alla quadratura dell'iperbola, o del cerchio.

IV. La ſteſſa perpleſſità s'incontra ne' coefficienti de' termini, che per il differente valore della grandezza m compariſcono o affermativi, o negativi. Se $m=1$, il primo termine nell'una, e nell'altra eſpreſſione (E) (F) diventa infinito, e dobbiamo ſervirci dei logaritmi. Suppoſto m maggiore dell'unità, i primi termini nelle predette equazioni ſaranno affermativi, ed i ſecondi negativi, e le parabole deſcritte volteranno in tal caſo all'aſſe la loro conveſſità. Ma preſo m minore dell'unità, ſuccederà tutto l'oppoſto: il primo termine in ambe le formule ſarà negativo, e poſitivo il ſecondo, e le parabole concave verſo l'aſſe.

V. Deeſi avvertire, che la quantità m ha due valori differenti, purchè non ſia eguale all'unità, nel qual caſo i due valori ſi confondono in un ſolo. Negli altri caſi, ſe un valore ſi trova minore dell'unità, l'altro è maggiore. Prendaſi per mano l'equazione $m + \frac{1}{m} = 2b$, e ſe in vece di m collocherò l'altro valore $\frac{1}{m}$, non ſi muterà l'equazione.

Quindi ad una ſola ſuppoſizione ſatisfaranno due coſtruzioni. La Figura 119. ſervirà per l'ipoteſi, in cui m ſupera l'unità, e la 120. per quella, in cui reſta ſuperato.

La terza indeterminata p, che s'è introdotta a ſolo fine di liberar l'equazione (A) dalla confuſione delle variabili, fa un altro giuoco, e ſerve ad un altro uffizio, cioè di ſomminiſtrarci una eleganriſſima coſtruzione geometrica. Se s'aveſſe a coſtruire la curva cercata, col prendere per abſciſſe gli ſpazj paſſati, o da paſſarſi dal pendolo, e per ordinate le velocità acquiſtate in qualſivoglia punto de' ſuddetti ſpazj, egli è evidente, che con un nuovo calcolo analitico ſarebbe d'uopo rintracciare l'indole, e le proprietà della curva deſcritta. Un ſimile inconveniente per lo più ci ſi fa incontro nelle coſtruzioni di tutti quei luoghi, che montano ad un grado elevato, e che lineari, o più che ſolidi s'appellano; mentre la formula algebratica non ci preſenta a prima viſta, e ſenza il tedio d'una ulteriore ricerca la natura, e l'andamento della curva locale. Nel maneggiare, ſecondo le occaſioni, varj Problemi, mi ſono venuti in mente certi particolari artifizj, che ad infiniti caſi felicemente ponno adattarſi, e che da me comunicati ad un mio ſtimatiſſimo Amico, ne ha fatto un uſo sì grande, che ha ſuperata la mia aſpettazione. Uno di queſti conſiſte nel prendere una terza variabile, che ſerva d'aſſe comune a due curve note, con le ordinate delle quali,

o con

o con una determinata porzione d'asse le due incognite principali s'esprimano. Il caso, su cui versiamo, ce ne somministra l'esempio, e per mezzo delle intercette in due bilinei parabolici ci verrà fatto d'esprimere la relazione, con cui gli spazj rispondono alle velocità, e vedremo, per così dire, a nascere le absciisse, e le applicate d'infinite curve parte geometriche, e parte trascendenti.

COSTRUZIONE.

Con lo stesso vertice A, *a* (Fig. 119., e 120.) al medesimo asse AB, *ab* si descrivano le due parabole dello stesso esponente *mm* AHC, *ahc*; AFD, *afd*. Il parametro della prima sia $\frac{1}{c^{mm-1}.\sqrt{m^{mm+2}-m^{mm}}}$, e quello della seconda $\frac{1}{c^{mm-1}.\sqrt{m^{mm+1}-m^{mm-1}}}$.

S'inclinino all'asse AB, *ab* dal vertice A, *a* le due rette AC, *ac*; AE, *ae*, e sia AB : BC; *ab* : *bc* :: *mm* − 1 : *m*; AB : BE; *ab* : *be* :: *mm* − 1 : 1. La retta AC, *ac* tagli la sua parabola nel punto più lontano C, *c*, e la retta AE, *ae* incontri la propria nel punto più vicino F, *f*; onde si formino li due bilinei parabolici ANCO, *anco*; ALFK, *alfk*: egli è manifesto, che se dall'intercetta NO, *no* presa nel bilineo ANCO, *anco* verrà espresso l'arco ST della cicloide, l'intercetta LK, *lk* corrispondente nell'altro bilineo ALFK, *alfk* esprimerà la velocità del pendolo nel punto S.

COROLLARJ.

I. E' cosa mirabile, che le costruzioni della Figura 119., e 120.; sebbene pajono diverse, non sono in sostanza, che una costruzione medesima. Non ostante che le parabole dalla Figura 119. voltino il convesso verso l'asse, e quelle della 120. il concavo, stante il doppio valore della quantità *m*; contuttociò una sola è la soluzione. In fatti s'io piglierò NO = *no*, avrò LK = *lk*. Il fatto sta certamente così, e basti di averlo accennato, risparmiando per ora la dimostrazione. Considereremo pertanto semplicemente la costruzione della Figura 119., che con quella della 120. perfettamente concorda.

II. Presa la ordinata IH = alla costante *c* vale a dire all'arco RT della cicloide, la velocità nel punto F, o sia nel punto R, principio della discesa, compariſce nulla, e ciò dipende dalla determinazione della costante *g*.

III.

III. La velocità cominciandó dal nulla in F va a poco a poco crescendo, fino a diventar massima nel punto K; e poi si va diminuendo, sinattantochè torna nulla nel vertice A, cioè a dire nel punto infimo della cicloide. Ivi giunto il mobile perde tutto il suo moto, e viene posto in istato di quiete.

IV. La massima intercetta nel bilineo AHCO si trova essere IH=c corrispondente al punto F della velocità nulla, e la massima velocità LK resta determinata, quando AM=$p=c.m^{\frac{mn-1}{nn-1}}$.

V. Quando l' intercetta LK è la maggiore fra tutte, onde viene ad esprimere la massima velocità, in tal caso l' altra intercetta ON, che dinota lo spazio da passarsi, o sia l' arco ST della cicloide, si trova precisamente uguale alla resistenza del mezzo; così che ON=$2bu=r$. La dimostrazione si deduce finalmente dalle nostre formule.

VI. Discenda il pendolo dal punto di quiete Q, e scorra lo spazio QT; indi dal punto di quiete R, e scorra lo spazio RT: dico, che in camminare per i predetti spazj v' impiegherà tempi uguali, e la cicloide sarà isocrona anche nella nostra ipotesi. Mutata semplicemente la grandezza della costante c, si descriveranno due nuovi bilinei parabolici maggiori, o minori delli delineati nella Figura 119., e 120., ma però simili. Ora prese due figure simili, in cui dalle absciste s' esprimano gli spazj passati, e dalle ordinate le velocità corrispondenti, è agevole a provarsi, che combinando insieme i due moti, dopo avere trascorsi spazj proporzionali, i tempi si troveranno eguali. Questa verità si trova dimostrata dal Sig. Nevvton per altra strada.

VII. Resterebbero da considerarsi alcune altre particolarità, che stando ferma la nostra ipotesi delle resistenze, appartengono al moto del pendolo nella cicloide: come se il grave principiasse a discendere dal punto Q con un grado di velocità impressa da forza estrinseca; oppure che stando in riposo nel punto infimo T, venisse violentemente spinto in alto, ed obbligato a descrivere l' arco TXU. Con alterare opportunamente le nostre formule si scopriranno le proprietà di questi moti, nè io m'inoltrerò di vantaggio, essendosi detto quanto basta intorno il geometrico.

SCOLIO.

Mi fermerò piuttosto sulle conseguenze Fisiche, che sono le più importanti, ed in grazia delle quali la soluzione del Problema è stata premessa. Il terzo, ed il quinto Corollario m'insegnano, che partendosi il pendolo dal punto di quiete R va scorrendo con moto accelerato l'arco RS ora più lungo, ed ora più breve secondo la diversa proporzione, che passa fra la resistenza, e la velocità. Abbia dunque nel punto S acquistata la velocità massima corrispondente alla massima intercet-

cetta LK, continuerà esso a camminare per il restante arco ST con moto ritardato; di modo che arrivato al punto infimo T della cicloide, resterà totalmente immobile. Ciò si ricava evidentemente dalla costruzione; imperocchè esponendo l'intercetta ON lo spazio ST, e facendosi sempre minori gli spazj, quanto più s'accostano al punto T, si scopre, che essendo nel punto A nulla l'intercetta descrivente, che ci rappresenta lo spazio da scorrersi fino al vertice della cicloide, nulla è parimente l'altra intercetta, da cui la velocità nel suddetto punto T resta espressa, e così il pendolo viene posto in istato di perfetta quiete. Questa conclusione dimostrata in tutto rigore di Geometria ha un non so che del mirabile; quando massime si rifletta, che la proporzione costante della velocità alla resistenza può fingersi grande quanto ci piace; che non ostante ciò, mentre la tenacità del fluido non sia infinitamente piccola, si verificherà sempre, che il pendolo compirà il suo moto in una mezza vibrazione; nè per quanto si supponga fisicamente minima la viscosità del mezzo, il grave potrà mai passare nè meno per un brevissimo spazio la linea verticale. Disceso al sito più basso, ivi dee necessariamente fermarsi; atteschè nel luogo assegnato da questa legge di resistenza viene estinta tutta la velocità, che dalla gravità continuamente operante è stata ad esso di passo in passo comunicata.

Ora qual'è in Natura quel mezzo fluido, in cui non si trovi qualche grado di tenacità? L'aria stessa non ne va affatto esente. Viscosa è l'acqua a parere del Sig. Nevvton, e più la dolce, che la salsa secondo il Sig. Montanari. Che che sia di ciò a tutte le spezie degli ogli non può negarsi una sensibile, e manifesta viscosità; e pure ho osservato più volte un pendolo a cicloide immerso nell'olio d'uliva, o di mandorle, e lasciato cadere da un punto di quiete, reciprocare, vibrarsi, e compire un buon numero d'oscillazioni. Anche lo stesso Sig. Nevvton ammonito, cred'io, dall'esperienza, col conghietturare, che la curva delle velocità relativamente agli spazj fosse una spezie d'ellissi, ha tentato indarno di accordare il canone colle osservazioni. Supposta la legge del Sig. VVallis, poco uso potrebbe farsi de'pendoli, che in tutti i mezzi, trattone l'etere Cartesiano, ed il vuoto, estenderebbono il loro moto solamente alla metà della prima vibrazione. Se dunque non erra la Geomotria in tirare dai dati le conseguenze, è d'uopo rigettar come falsa l'ipotesi, da cui nascono alcune illazioni repugnanti ai Fenomeni naturali.

Nè crediamo già di poter aggiustar le partite sostituendo il canone Nevvtoniano, per cui si computa la resistenza del fluido parte in ragion semplice, e parte in duplicata della velocità: conciossiachè senza tentare la soluzione d'un altro Problema, m'ingegnerò di metter in chiaro la faccenda con una sola, e semplicissima osservazione. Quando il pendolo resta semplicemente ritardato dalla viscosità del mezzo, quantunque appena sensibile, che all'azione della gravità fa contrasto, egli è certo per le cose dimostrate, che nel punto T la velocità è nulla, ed il mobile si trova ridotto alla quiete. S'aggiunga l'altra sorta

di reſiſtenza, che naſce dall' inerzia della materia fluida, e ne ſeguirà, che debilitata dal nuovo oſtacolo la celerità, in qualſivoglia punto, per eſempio S, ſarà minore di prima; ſtante che in ogni momento di tempo perde il grave, in vece d'un ſolo, due infiniteſimi di velocità, per eſſer due le forze negative, che alla ſua diſceſa s' oppongono. Se dunque nel ſito infimo T era nulla la velocità nel primo caſo, debb' eſſer nulla anche nel ſecondo, nè il pendolo può aſcendere in conto alcuno per l'arco TX, e replicare le oſcillazioni. Ed ecco convinta di falſità al pari con quella del VVallis anche la legge Nevvtoniana, e dando ad ambedue un perpetuo eſilio dalla Fiſica, le riporremo fra le ipoteſi puramente matematiche.

Io fin ora non ho penſato, che a diſtruggere, ſenza prendermi la briga di edificare, e non avrò fatto poco, ſe mi ſarà riuſcito di liberare il mondo Letterato da certi errori, che appoggiati all' autorità d' Uomini incomparabili, e dall' univerſale abbracciati, ſono difficiliſſimi da ſcoprirſi. Chi ſa, che con altra occaſione io non faccia come quegli Architetti ignoranti, i quali gittano a terra una fabbrica mal fatta, per innalzarne una peggiore?

ANNOTAZIONE.

Del Signor Abate Conte Girolamo Lioni.

LA preſente Diſſertazione del Sig. Conte Jacopo Riccato un importantiſſimo documento ci ſomminiſtra, ed è, che non dobbiam fidarci di qualunque ipoteſi, per quanto giuſta, e ragionevole ella ci ſembri, ſe non è rigoroſamente dimoſtrata. Le idee delle ſcienze, e particolarmente delle Matematiche ſono per lo più alle idee comuni, e popolari direttamente contrarie; e popolari chiamar ſi poſſono tutte quelle opinioni, che non ſi veggono ſtabilite con una ſevera dimoſtrazione, quantunque ſieno uſcite dalla bocca d'un Filoſofo, o d'un Geometra.

La legge Nevvtoniana delle reſiſtenze pareva così ben fondata, tanto per quello riguarda la tenacità, quanto l' inerzia de' mezzi fluidi, che non ci voleva meno d'una dimoſtrazione per convincerla di falſità, e per obbligarci ad abbandonarla, come poco conforme ai Fenomeni della Natura. Ecco come viene ſpiegata dal dottiſſimo Graveſande delle ſentenze Nevvtoniane fedeliſſimo interprete (*a*): „ Retardatio ex cohæſione partium in eodem ſpatio, manente eodem corpore, eſt ſemper eadem, quæcumque fuerit corporis velocitas, eadem in omni caſu cohæſio ſuperanda eſt; creſcit igitur hæc reſiſtentia cum ſpatio percurſo, in qua etiam ratione creſcit velocitas; eſt idcirco ut ipſa velocitas. Reſiſtentia ex materiæ inertia, quando idem corpus per varia liquida, eadem cum celeritate, moyetur, ſequitur proportionem materiæ eodem tem-

(*a*) *Elem. Phyſico-Mathem. lib. 2. cap. 6.*

tempore removendæ, quæ eſt ut liquidi denſitas. Quando idem corpus per idem liquidum variis cum celeritatibus fertur, reſiſtentia hæc creſcit cum numero particularum, in quas tempore æquali corpus impingit, qui numerus eſt ut ſpatium eo in tempore percurſum, ideſt ut velocitas, ſed creſcit ulterius hæc reſiſtentia in ratione viris, cum qua corpus in ſingulas particulas incurrit, quæ vis eſt etiam ut corporis velocitas, &c.; tota ergo reſiſtentia eſt ut quadratum velocitatis. Corpori ergo in liquido moto partim reſiſtitur in ratione velocitatis, partim in hujus ratione duplicata „.

Ora però, che ſiamo abbaſtanza illuminati, non ci riuſcirà difficile lo ſcoprire il paralogiſmo, e moſtrare in che conſiſta il difetto del diſcorſo ſopra riferito in quella parte, che concerne la tenacità de' fluidi. Si vede per tanto ommeſſo un elemento, che dovea entrare neceſſariamente nel canone accennato; e queſto ſi è il tempo. Imperocchè ſe per diſunire due particelle d'un liquido ſtrettamente congiunte inſieme da quel vincolo, cui ſi dà nome di viſcoſità, o per iſpezzare un corpo duro, le cui parti ſono legate da innumerabili fibrille claſtiche l'una con l'altra intrecciate, s'adopra una forza determinata; egli è manifeſto, che per compire l'effetto ſi richiede un tempo determinato, e che per ottenerlo in tempo più breve una forza maggiore vi ſi ricerca; talmente che per fare in un iſtante la ſeparazione, non ci vorrebbe meno d'una forza infinita. Che ſe l'azione è ſempre uguale, e contraria alla reazione, le ſuddette particelle, o fibre, con una reſiſtenza infinita s'oppongono ad una momentanea diſtrazione.

Quanto dunque con maggior celerità ſi muove un corpo ſolido per un mezzo tegnente, e viſcoſo, in tanto minore ſpazio di tempo ſupera l'unione delle parti, e conſeguentemente incontra una più gran reſiſtenza. Ma con qual legge creſca l'impedimento relativamente alla velocità, laſceremo di buona voglia all'induſtria dal Sig. Conte Riccato il determinarlo.

ANNOTAZIONE DELL' EDITORE.

Sarebbe da deſiderarſi, che quanto è elegante, altrettanto foſſe univerſale il metodo, con che il noſtro Autore ſcioglie il propoſto problema, ed alla coſtruzion lo conduce. Egli eſſendo pervenuto all' equazione $m + \frac{1}{m} = 2b$, in cui la b dev'eſſere reale, ed affermativa, ha formato giudizio, che la m non poſſa eſſer nè negativa, nè immaginaria, perchè verrebbe, dic'egli, ad eſſer negativa, od immaginaria la grandezza $2b$. Quant'al negativo la conſeguenza è veriſſima; perchè la ſomma di due quantità negative non può eſſer eguale ad una quantità poſitiva. Quant'all'immaginario, comunque ne' tempi, in cui è ſtata ſcritta la preſente diſſertazione, quando le teoriche non eran poſte in quel lume, che an ricevuto di poi per le fatiche di molti valent'uo-

mini, la conſeguenza poteſſe parer veriſimile; pure ella è lontana dal vero, potendo la ſomma di due quantità immaginarie una quantità reale ſomminiſtrare.

E per non dipartirci dalla formula, di che ſi tratta, cerchiamo generalmente, quando la quantità $f+g\sqrt{-1}+\frac{1}{f+g\sqrt{-1}}$ di due immaginarj compoſta, ſia nulladimeno reale. Ridotti i due membri alla ſteſſa denominazione, ſi ha

$$\frac{ff-gg+1+2fg\sqrt{-1}}{f+g\sqrt{-1}}=2f\cdot\frac{\frac{ff-gg+1}{2f}+g\sqrt{-1}}{f+g\sqrt{-1}}.$$ Qualunque volta $\frac{ff-gg+1}{2f}=f$, fatta la diviſione, rimarrà $2f$, ch'è una quantità reale; nel qual caſo ſi ritroverà $f=\sqrt{1-gg}$.

Maneggiata l'equazione $m+\frac{1}{m}=2b$, ritroveremo

$m=b+\sqrt{bb-1}$ la quale è immaginaria, ſe ſia $b<1$, e può eſprimerſi così $m=b+\sqrt{1-bb}\cdot\sqrt{-1}$. Adunque fatto il confronto colla formula uniuerſale, ſarà $f=b$, $g=\sqrt{1-bb}$, e ſi verificherà, che $f=\sqrt{1-gg}$. Di fatto la formula $b+\sqrt{1-bb}.\sqrt{-1}+\frac{1}{b+\sqrt{1-bb}.\sqrt{-1}}$ ridotta alla ſteſſa denominazione darà

$$\frac{2bb+2b\sqrt{1-bb}.\sqrt{-1}}{b+\sqrt{1-bb}\sqrt{-1}}=2b,$$ quantità reale.

Quindi è manifeſto, che nell'ipoteſi di $b<1$ la coſtruzione nella diſſertazione contenuta non può aver luogo. E noi poſſiamo aſſeverare, che da molti anni l'Autore s'era avveduto della limitazion del ſuo metodo, e che aveva in animo di ſupplire a quel che mancava, e di reſtrin-

ſtringer le conſeguenze, ch'avea dedotte: ma in altri ſtudj occupato, e da altri affari impedito non ha mai meſſo la mano all'opera, ed è paſſato a miglior vita con tal diſegno. Siaci pertanto permeſſo di compier ciò, che l'Autore non ha potuto eſeguire, e di dar la ſoluzione nell ipoteſi, che b ſia minore dell'unità.

L'equazione da coſtruirſi è $-ydy + 2budy = udu$: e perciocchè dev' eſſere $b < 1$, fatto il ſeno totale $= 1$, pongaſi b eguale al co-ſeno dell'angolo φ, chiamandolo $=$ Cos. φ: dunque l'equazione ſarà $-ydy + 2$ Cos. $\varphi\ udy = udu$. A ſeparare l'indeterminate, per modo che non inelegante rieſca la coſtruzione, facciamo uſo della ſeguente ſoſtituzione $u = Mxy + Ny$. Le M, N ſono quantità da determinarſi acconciamente nel progreſſo dell'analiſi. Scacciata la u, ſi trova $-ydy + 2M.$ Cos. $\varphi.\ xydy + 2N.$ Cos. $\varphi.\ ydy = M^2x^2ydy + M^2y^2xdx - 2MNxydy + MNy^2dx + N^2ydy$. La qual equazione ridotta ci dà ſeparate le variabili nella ſeguente maniera

$$\frac{-dy}{y} = \frac{M^2xdx + MNdx}{1 - 2M.\text{ Cos. }\varphi.\ x + M^2x^2 - 2N.\text{Cos. }\varphi. + NN + 2MNx}.$$

Per conciliare alla formula maggiore ſemplicità, ſi diſcacci il ſecondo termine del diviſore col porre $N =$ Cos. φ, e naſcerà

$$\frac{-dy}{y} = \frac{xdx}{1 - \frac{\text{Cos. }\varphi^2}{MM} + xx} + \frac{\frac{\text{Cos. }\varphi\ dx}{M}}{1 - \frac{\text{Cos. }\varphi^2}{MM} + xx}, \text{ ovvero}$$

$$\frac{-dy}{y} = \frac{xd}{\frac{\text{Sin. }\varphi^2}{MM} + x^2} + \frac{\frac{\text{Cos. }\varphi\ dx}{M}}{\frac{\text{Sin. }\varphi^2}{MM} + xx}.$$

L'ultimo membro porta alla quadratura del cerchio. A rinvenirlo per tanto nel circolo, il cui raggio eguagli l'arco cicloidale, per cui diſcende il mobile, che chiamiamo $= f$, ſi faccia $\frac{\text{Sin. }\varphi}{M} = f$; dunque

$M =$

$M = \frac{\text{Sin. } \varphi}{f}$. Quindi l' equazione diverrà

$$-\frac{dy}{y} - \frac{xdx}{ff+xx} + \frac{\text{Cos. } \varphi . f\, dx}{\frac{\text{Sin. } \varphi}{ff+xx}}, \text{ ovvero}$$

$$\text{Tan. } \varphi . f . \frac{dy}{y} + \frac{xdx}{ff+xx} = -\frac{ff\, dx}{ff+xx};$$

Chiamato = A l'arco circolare, il cui raggio = f, e la cui tangente = x, integriamo prendendo i logaritmi nel sistema, la cui sottangente = Tan. $\varphi . f$, ed il cui protonumero, cioè quel numero, ch' ha il logaritmo = o, sia = f, e ritroveremo $ly + l\sqrt{ff+xx} = G - A$. Per definire la costante aggiunta G s'avverta, che posto $y = f$, sarà $ly = o$, $u = o$; dunque $x = -\frac{\text{Cos. } \varphi . f}{\text{Sin. } \varphi} = -$ Cot. $\varphi . f$, e l' arco A si cangerà in un arco, ch'ha il raggio $= f$, e la tangente $= -$ Cot. $\varphi . f$, il quale per esser negativo chiameremo = B; dunque avremo $lf \sqrt{1 + \text{Cot. } \varphi} = G + B$, ovvero lf. Cose. $\varphi - B = G$. Sostituito però nella nostra formula cotal valore di G, s'otterrà

$ly + l\sqrt{ff-xx} - l$ Cose. $\varphi . f = -A - B$, o chiamato

$A + B = z$. $ly \frac{\sqrt{ff+xx}}{\text{Cose. } \varphi . f} = -z$, e posto c quel numero, ch' ha per logaritmo l'unità, $y \frac{\sqrt{ff+xx}}{\text{Cose. } \varphi . f} = c^{-z}$.

Quest'ultima equazione ci somministra una costruzione, che non può essere più elegante. Col raggio CA = f (Fig. 121.) si descriva il circolo AEB, indi pel punto A preso ad arbitrio si meni l'indefinita tangente DAM. Si conduca CD, che faccia colla CA l'angolo ACD, il quale insieme coll'angolo φ compia un retto. E' chiaro, che AD = Cot. $\varphi . f$, e CD = Cose. $\varphi . f$. Quindi l'arco AB sarà quello, che nell' analisi abbiamo chiamato = B. Poscia pel punto B si descriva una spiral logaritmica BHF, che faccia co' suoi rami CB, CH l'angolo φ, siccome esige Tan. $\varphi . f$. sottangente del sistema, in cui abbiamo

mò preſi i logaritmi. Si taglino AM $= x$, ſarà AN l'arco chiamato nell'analiſi $= A$; dunque BAN $= z$; dunque CP $= c^{-z}$.

L'equazione ci porge la ſeguente analogia $\sqrt{ff+xx}$: Coſe. $\varphi . f$ :: c^{-z} : y : ma CM $= \sqrt{ff+xx}$, CD $=$ Coſe. $\varphi . f$, CP $= c^{-z}$; dunque condotta dal punto P la PQ parallela a MD, ſaranno le CQ $= y$.

Reſta da determinar le velocità acquiſtate per gli ſpazj paſſati BQ. La formula ſuſſidiaria ci dà $u = \frac{xy . \text{Sin. } \varphi}{f} + y . \text{Cof. } \varphi$, o ſia

$\frac{fu}{\text{Sin. } \varphi} = y . x + f . \frac{\text{Cof. } \varphi}{\text{Sin. } \varphi} = y . x + \text{Cot. } \varphi . f$: ma $\frac{1}{\text{Sin. } \varphi} =$ Coſe. φ;

dunque Coſe. $\varphi . fu = y . x + \text{Cot. } \varphi . f$; dunque CD $=$ Coſe. $\varphi . f$: DM $= x +$ Cot. $\varphi . f$ :: CQ $= y$: QP $= u$. Quindi rappreſentando BQ gli ſpazj paſſati, CQ que', che devono paſſarſi fin all' infimo, le velocità verranno eſpreſſe dalle rette QP ordinate alla ſpiral logaritmica, le quali incontrano l' aſſiſſe nell'angolo φ, angolo, che la ſpiral logaritmica fa co' ſuoi rami.

Le determinazioni ſono sì facili, che baſterà ſuccintamente accennarle. Si meni il diametro E 2 E parallelo alla tangente AM. Il corpo partendo dal punto di quiete B va movendoſi colle velocità eſpreſſe dall' ordinate alla ſpirale, e giunto al punto infimo C ſi trova avere la velocità C F. In così fatto movimento non s'accreſce ſempre la velocità del pendulo, ma dopo un determinato ſpazio a ritardar s'incomincia: e per ciò avremo in un dato punto la velocità maſſima.

Queſta ſi determina agevolmente conſiderando, ch' allor s'avrà la maſſima velocità, quando la tangente della ſpirale ſia parallela alla linea dell' aſſiſſe CD. Sia queſta la HK; dunque l'angolo DCH ſarà $=$ CHK: ma queſto eſſendo l'angolo, che la ſpirale fa col ſuo ramo $= \varphi$, ſi avrà DCH $= \varphi$. Quindi condotta la CH, che faccia colla CD l'angolo φ, e dal punto H, ov' ella incontra la curva ſpirale, menata Hf parallela a DM, queſta eſprimerà la maſſima velocità. Perciò il moto da B in I ſarà accelerato, da I in C ſarà ritardato.

Poichè giunto il mobile nel punto infimo C è dotato della velocità CF, chiara coſa è, che monterà con moto ritardato, venendo ſempre eſpreſſe le ſue velocità dall'ordinate della ſteſſa ſpirale, che pur continua, finchè avendo paſſato lo ſpazio C 2 B, d'ogni movimento ſarà ſfornito.

Soſpeſo il mobile dal punto 2B tornerà a diſcendere, e l'ordinate alla parte della ſpirale 2 B 2 F dinoteranno le ſue velocità negative, e giunto in C ſi troverà avere la celerità C 2 F; quindi di nuovo aſcendendo monterà per lo ſpazio C 3 B. Le ſeguenti oſcillazioni verranno eſ-

eſpreſſe dagli infiniti ſucceſſivi giri della ſpiral logaritmica. Dal che ſi ricava, che il pendulo non giungerà giammai ad una quiete perfetta.

Eſſendo gli archi della ſpiral logaritmica ſegati dal diametro BG, come BF2B, 2B2F3B ſempre ſimili, ſaranno ſimili ancor le ſcale delle reſiſtenze; dunque eſſendo ſimili le ſcale delle forze non impedite dalle reſiſtenze, ſaranno altresì ſimili le ſcale delle forze ſollecitanti; dunque i tempi dell'oſcillazioni grandi, e picciole ſaranno eguali, ed il pendulo iſocrono. Ma s'avverta, che non diceſi eguale il tempo della diſceſa a quel dell'aſceſa, ma il tempo per ciaſcuna diſceſa, ed aſceſa preſe inſieme è ſempre lo ſteſſo. E ciò ſi vuol intendere non ſolo dell'oſcillazioni, che il mobile di fatto compie, ma ancora di qualunque altra; perchè da qualunque punto il mobile cominci a diſcendere, la ſpiral logaritmica, che ne determina le velocità, è ſempre ſimile alla deſcritta.

Ma intorno a'tempi ſarà bene a dir qualche coſa di più preciſo; giacchè il metodo da noi uſato ec ne dà una determinazion elegante. E' noto eſſere $dt = -\frac{dy}{u}$: ma $u = \frac{xy\ \text{Sin.}\,\Phi}{f} + y.\ \text{Coſ.}\,\varphi =$

$\frac{\text{Sin.}\,\varphi}{f} . y . \overline{x + \frac{\text{Coſ.}\,\Phi}{\text{Sin.}\,\varphi}}\, f = \frac{\text{Sin.}\,\Phi}{f} . y . \overline{x + \text{Tang.}\,\varphi}\, . f$; dunque

$dt = \frac{-f dy}{\text{Sin.}\,\varphi . y . \overline{x + \text{Tang.}\,\varphi}\, . f}$: ma $\frac{-dy}{y} = \frac{x dx + \text{Tan.}\,\Phi . dx}{ff + xx}$, come

abbiam trovato di ſopra; dunque $dt = \frac{f}{\text{Sin.}\,\varphi} \cdot \frac{dx . x + \text{Tan.}\,\Phi}{\overline{ff + xx} . \overline{x + \text{Tan.}\,\varphi}} =$

$\frac{fdx}{\text{Sin.}\,\Phi . \overline{ff + xx}}$: ma $\frac{1}{\text{Sin.}\,\varphi} = \text{Coſe.}\,\varphi$; dunque $dt = \frac{\text{Coſe.}\,\Phi . fdx}{ff + xx}$

Eſſendo $\frac{fdx}{ff + xx}$ la differenza dell'angolo ACN, il cui integrale deve annullarſi poſta CN ſopra CB, ſarà di meſtieri aggiungere l'angolo coſtante BCA. Avrem dunque $t = \text{Coſe.}\,\Phi . \text{Ang. BCN}$: laonde non cangiandoſi l'angolo φ, i tempi ſaranno come gli angoli BCN. Le conſe-

ſeguenze, che da ciò ſi deducono; ſon sì patenti, che ci abuſeremmo dell'ozio de' noſtri Lettori, ſe in eſſe trattener ci voleſſimo.

Sin ora abbiamo conſiderato come coſtante l'angolo φ. Che ſe come variabile ſi riguardi paragonando due mobili, che diſcendendo come ſopra per BC patiſcano due diverſi generi di reſiſtenza, allora fiſſato il punto B, ſi prenderà come mobile il punto A, e deſcritte l'altre ſpirali logaritmiche, l'ordinate loro parallele alla tangente al punto A daranno le velocità. Queſte ſi troveranno ſempre maggiori creſcendo l'angolo φ, e diminuendo il ſuo complemento BCA, e s'aumenteranno ancora gli ſpazj della ſalita, per modo che ſe l'angolo φ diventa retto, che dà il caſo di Coſ. $\varphi = o$, e della reſiſtenza nulla, la ſpiral logaritmica ſi cangia in un circolo, e le ordinate ottogonali al diametro BG rappreſentano le velocità, eſſendo eguale lo ſpazio della ſalita CG allo ſpazio della diſceſa BC.

All'oppoſto ſe l'angolo φ ſi diminuiſce, le velocità, e gli ſpazj della ſalita vanno ſempre minorandoſi, per modo che poſto φ infinitesimo, e l'angolo BCA preſſochè retto, ch'è il caſo di Coſ. $\varphi = 1$, al punto C la velocità ſi ritrova infinitesima, e infinitesimo pure lo ſpazio d'aſcendimento. Laonde in queſt'ipoteſi il mobile giungerà ſino in C, dove ſi troverà ſpogliato d'ogni velocità.

Paſſiamo ai tempi. Quanto è maggiore l'angolo φ, e minore il ſuo complemento; tanto ſi minora la Coſe φ, e l'angolo BCE, ch'alla diſceſa ſerve; dunque ſi minora il tempo della diſceſa, il quale alle predette due quantità s'è provato proporzionale. All'oppoſto calando l'angolo φ, il tempo della diſceſa s'accreſce per guiſa, che poſto $\varphi = o$, divenendo la Coſe. φ infinita, il mobile non arriverà al punto C ſe non dopo un tempo infinito.

Lo ſteſſo vuol dirſi della diſceſa, e dell'aſceſa preſe inſieme; perchè l'angolo DCG in tal caſo è ſempre lo ſteſſo, cioè uguale a due retti, e però cotal tempo è proporzionale alla ſola Coſe. φ.

Ma quant'al tempo dell'aſcendimento la coſa è più varia; perchè delle due quantità, con che il tempo tien proporzione, creſcendo l'una, l'altra divien minore. Se creſce la Coſe. φ, ſi diminuiſce l'angolo $ECG = \varphi$. Suppongaſi paſſar φ ſucceſſivamente dal retto ad angoli ſempre minori. Egli è manifeſto, che da prima calerà più l'angolo φ di quello, che creſca la ſua coſecante; dunque il tempo dell'aſcendimento ſi farà minore. Ma ciò accaderà ſino ad un certo termine, dove ſi troverà ſcemar tanto l'angolo, quanto creſce la coſecante: e quì avremo il minimo tempo. Dopo queſto termine creſcendo più la coſecante di quello, che cali l'angolo φ, il tempo anderà creſcendo, ſino a diventar infinito nel caſo eſtremo di Coſ. $\varphi = 1$, nel qual caſo non s'avrà aſcendimento di ſorte alcuna.

Per determinar poi l'angolo φ, che ci dà il minimo tempo della ſalita, baſta ritrovare quel punto, in cui il complemento dell'angolo φ tanto creſce, quanto creſce la ſecante di queſto medeſimo complemento. A queſto fine col raggio $CO = 1$ (Fig. 122.) deſcritto il cerchio OB,

e condotta la tangente OD, pongaſi, che la ſecante CD ſia quella, il cui incremento eguagli l'incremento dell'arco OB. Preſo il punto *b* infinitamente vicino, ſi meni la ſecante C*bd*, e col centro C ſi deſcriva l'archetto D*m*: egli è chiaro, che dovrà eſſere $dm = Bb$. Ciò poſto, ſi ha $dm : Dm :: OD : CO$: ma $Dm : Bb :: CD : CB = CO$; dunque $dm : Bb :: CD \cdot OD : CO^2$; dunque eſſendo i primi due termini dell'analogia eguali, verrà ad eſſere $CD \cdot OD = CO^2$ ovvero $CD : CO :: CO : OD$. Perciò deſcritto un triangolo rettangolo in guiſa, che l'ipotenuſa ſia ad un lato, come queſto all'altro, l'angolo, che fa l'ipotenuſa col lato medio proporzionale, è il complemento dell'angolo φ, e l'angolo, che fa l'ipotenuſa coll'altro lato, è lo ſteſſo angolo φ ricercato.

Ma del caſo, ove $\cos. \varphi = 1$, ſebbene abbiamo alcuna coſa accennata, eſſendo il limite eſtremo dell'ipoteſi da noi trattata; pure perchè le conſeguenze, ſiccome immerſe negli abiſſi dell'infinito, e dell'infinitesimo, non ſi veggono colla deſiderata chiarezza, ſarà bene ſeparatamente parlare ſvogliendone, e coſtruendone l'equazione. Eſſa è la ſeguente,

$-ydy + 2udy = udu$. Diſponiamola nella ſeguente maniera

$-ydy + udy = udu - udy$, ovvero

$-dy \cdot \overline{y-u} = -u \cdot \overline{dy-du}$; dunque

$\frac{dy}{u} = \frac{dy-du}{y-u}$. Pongaſi $y-u = x$; dunque

$\frac{dy}{y-x} = \frac{dx}{x}$, o ſia $xdy = ydx - xdx$, e però

$\frac{xdy-ydx}{x^2} = -\frac{dx}{x}$, la quale integrata da $\frac{y}{x} = G - lx$.

Si ſono preſi i logaritmi nella logiſtica, che ha la ſottangente $= 1$.

A fiſſare la coſtante G s'avverta, che ſe $y = f$, $u = 0$; dunque $x = f$. Quindi ſarà $1 = G - lf$, e ſupponendo $lf = 0$, $G = 1$. Avremo pertanto l'equazione completa $\frac{y}{x} - 1 = -lx$, oppure $y - x = -xlx$: ma $y - x = u$; dunque $u = -xlx$, dalla quale trarremo la coſtruzione.

Sovra l'indefinita CR (Fig. 123.) eccitata la normale $CA = f$, colla ſottangente $= 1$ all'aſſintoto CR ſi deſcriva la logiſtica ANR. Egli è manifeſto, che eſſendo le $CM = x$, ſaranno le $MN = -lx$. Si ponga

MQ

MQ eguale al rettangolo CM. MN diviso per l'unità: la curva AQC, che passa per tutti i punti similmente determinati, darà colle sue ordinate M Q le velocità $=u$. La massima velocità s'avrà, quando KL$=1$. Poichè $y=x+u$, colla CA faccia la CB un angolo semiretto, e si otteranno le PQ$=y$, mentre le MQ$=u$.

Passando a' tempi, la formula ci presenta

$dt=-\frac{dy}{u}=\frac{-dx-du}{u}$: ma $u=-xlx$,

e $du=-dx-dxlx$; dunque

$dt=-\frac{-dx+dx+dxlx}{-xlx}=-\frac{dx}{x}$; dunque $t=-lx$.

Quindi i tempi verranno espressi dall'ordinate alla logistica MN, e perciò il tempo per la AC espresso dall' assintoto sarà infinito; dal che si deduce, che il pendolo non giungerà mai al punto infimo.

Le cose tutte contenute nella presente annotazione danno a divedere, che se la specie chiamata $=b$ dall' Autore non è minore dell'unità, egli è impossibile, ch'il pendolo reciprochi le sue oscillazioni, come la sperienza dimostra avvenire ne' nostri fluidi. Ma per fine ci sia permesso d'esporre in termini più conosciuti quello, che dinota la specie b. Sia $=p$ l'altezza, da cui il mobile discendendo nel vacuo acquista quella velocità, con che se viaggiasse nel pieno, patirebbe una resistenza eguale alla sua gravità. Cotal velocità adunque verrà espressa per $\sqrt{2p}$; dunque la resistenza $=2b\sqrt{2p}$: ma questa dev'esser eguale alla gravità; dunque $2b\sqrt{2p}=1$, ovvero $b=\frac{1}{2\sqrt{2p}}$. Ed ecco il valor della specie b.

Acciocchè il mobile reciprochi le oscillazioni fa di mestieri, che $b<1$; dunque dev'essere $\frac{1}{2\sqrt{2p}}<1$, ovvero $1<8p$; dunque $p>\frac{1}{8}$:

ma 1 esprime l'arco semicicloidale; dunque p dev'esser maggiore dell'ottava parte dell'arco semicicloidale, o sia della metà del raggio del circolo genitore. Per tanto se l'altezza, per cui il mobile discendendo acquista tal velocità, onde nel pieno la resistenza eguaglia la gravità, sarà maggiore della metà del raggio del circolo, che genera la cicloide; si anderanno dal pendolo reciprocando l'oscillazioni: ma se sia eguale, e molto più se minore, il pendolo d'ogni velocità sarà sfornito nel punto infimo; anzi non arriverà a cotal punto, se non in un tempo infinito.

E con ciò rimane compitamente sciolto il proposto problema, nè senza qualche eleganza.

SCHEDIASMA XXXII. (*)

PROBLEMA.

Determinare il moto d' un pendolo a cicloide, ſuppoſta coſtante la reſiſtenza del mezzo.

QUeſto Problema è già ſtato ſciolto dalli Signori Nevvton, ed Ermanno; ma perchè eglino non an fatto parola di alcuni particolari appartenenti alla Fiſica; non ſarà fuori di propoſito il darne una nuova, e più compiuta ſoluzione.

Oſcilli il pendolo per la cicloide BCD (Fig.124.) ed il principio della diſceſa ſi prenda dal punto di quiete B. La retta verticale BE doppia del diametro del cerchio generatore della curva ci eſponga la gravità aſſoluta della ghianda B nel vano, e colla linea BG ſi eſprima la gravità relativa, o ſpecifica della medeſima ghianda in un mezzo fluido reſiſtente, e peſante. Condotta al punto B la toccante B F, e dalli punti E, G laſciate cadere ſopra di eſſa le due normali E F, GH, egli è certo, che la linea BF uguale all' arco cicloidale BC ci rappreſenterà la forza tangenziale, da cui nel punto B viene ſollecitato il mobile in un mezzo vuoto, o infinitamente raro: come altresì la retta BH dinoterà la forza tangenziale, da cui nel punto B il pendolo, ſtando ferme le circoſtanze, viene accelerato nel pieno.

L'altra forza collaterale GH, derivata dalla verticale BG s' impiega in iſtendere il filo AB, nel qual effetto conſuma tutta la ſua energia, che dalla tenacità del filo è controbilanciata.

Da ciò ſi deduce, che tanto nel punto B, quanto in qualunque altro della cicloide, per eſempio I, l'impreſſione acceleratrice per la toccante è nel vano uguale agli archi BC, IC, e nel pieno in data ragione coſtante agli archi predetti, cioè a dire come BG : BE, ovvero come la differenza fra le due gravità aſſolute del ſolido, e del fluido al peſo aſſoluto del ſolido.

Stendo l'arco della cicloide in una linea retta *bd* (Fig.124., e 125.), onde li punti *b*, *c*, *d* corriſpondano agli altri B, C, D, e ſia BC = *bc*, e CD = *cd*. Eretta ſopra il punto *b* la perpendicolare *bh*, facciaſi queſta uguale alla forza BH, cioè in data ragione alla retta *bc*, o ſia alla curva BC, e tirata l'ipotenuſa *hc*, il triangolo *hbc* ci metterà ſotto gli occhi la ſcala delle infinite impreſſioni, per cui viene di paſſo in paſſo accelerato il pendolo per tutti i punti dell' arco cicloidale BC. Segnato nella curva ad arbitrio il punto I, e fattaſi l' abſciſſa *bi* = all' ar-

(*) *Diede occaſione a queſto, ed al ſeguente Schediaſma; che furono compoſti l'anno 1732, una privata amichevole controverſia tra il Sig. Conte Giovanni Rizzetti, e l'Autore circa la reſiſtenza dei mezzi fluidi.*

arco BI, l'ordinata *if* al triangolo, che ſta alla retta *ic*, o alla curva IC nella proporzione già aſſegnata, dinoterà la forza ſollecitante il pendolo nel punto I.

In queſto mentre ſupponendoſi coſtante la reſiſtenza del mezzo, ſarà d'uopo il contraſſegnarla con una quantità determinata, per cagion d'eſempio colla retta *ba*, e dal punto *a* condotta la linea *an* parallela a *bd*, taglierà eſſa la diagonale *bc* nel punto *g*, e meſſa *gn* = *ga*, ſia *nlo* perpendicolare ad *an*.

La preparazione per queſta volta ci manifeſta da ſe ſola ſenz'altro ajuto le paſſioni de'moti da noi cercate, e ſta in cambio di ſoluzione.

1°. Eſſendo la forza tangenziale ſollecitante il pendolo nel punto B uguale all'applicata *bh*, ſe da eſſa ſottrerremo la reſiſtenza coſtante *ba*, reſterà la quantità *ab* eſprimente quella forza, che nello ſteſſo punto B, non oſtante l'impedimento del mezzo, attualmente ſtimola la ghianda alla diſceſa. Similmente eſſendo *fi* la forza tangenziale corriſpondente al punto I, ed *ie* la reſiſtenza coſtante, ſarà *ef* l'impreſſione accelerante nel punto I purgata dalla reſiſtenza.

2°. Nel punto *k* analogo all'altro K ſegnato nell'arco BC la forza tangenziale è uguale alla reſiſtenza, e perciò operando le ſuddette potenze con direzione contraria, l'azione della prima reſta equilibrata dalla reazione della ſeconda. Ma al di ſotto del punto K fra li due limiti K, C, ſuperate le forze acceleranti dalle reſiſtenti, il mobile viene ſucceſſivamente ritardato dalle impreſſioni negative, delle quali è ſcala il triangolo *gmc*. Finalmente paſſato il punto C, mentre il grave aſcende, vi ſi oppongono unitamente tanto la forza per la toccante derivata dalla gravità, quanto la reſiſtenza coſtante, e di queſte potenze coſpiranti a diſtruggere l'impeto impreſſo è ſcala il trapezio *cmno*.

3°. Il pendolo dal punto di quiete B ſino al punto K acquiſta ſempre nuovi gradi di celerità: e la ragione ſi è, perchè le forze acceleranti purgate dalle reſiſtenze, ed eſpreſſe per le ordinate del triangolo *bag* agiſcono contro la ghianda, come s'eſſa camminaſſe nel vano: e quantunque ſieno decreſcenti, e vadano finalmente a terminare nel nulla; non oſtante ciò ogni nuova ſollecitazione produce un nuovo elemento di velocità, che alla già conceputa ſi aggiunge. In ordine a ciò la velocità maſſima ſarà nel punto K, e non già nell'infimo punto C della cicloide; concioſſiachè paſſato dal pendolo il predetto punto K, l'impeto acquiſtato ſi va a poco a poco debilitando, e le forze negative, che lo eſtinguono, ci vengono eſpoſte dalle applicate del triangolo *gno*.

4°. Eſſendo pertanto il triangolo *gno* ſimile, ed uguale al triangolo *bga*, interviene, che tutto il moto generato dai ſucceſſivi impulſi poſitivi contenuti nel triangolo *bga* ſaranno diſtrutti dalle ſucceſſive impreſſioni negative contenute nel triangolo *gno*. Corriſponda il punto *k* all'analogo K, e facciaſi l'arco KL eguale alla retta *kl*: io dico, che gli archi BK, KL ſaranno eguali, e che nel punto L ceſſerà tutto il moto del pendolo.

5°. La

5°. La ſcala delle velocità creſcenti da B ſino in K, è decreſcenti da K ſino in L, è la ſemiellilli Apolloniana bpl, il cui centro ſia in k, e la proporzione fra il quadrato del ſemiaſſe maggiore kb, ed il quadrato del minore kp ſia come EB : GB, vale a dire come il peſo aſſoluto della ghianda nel vano al ſuo peſo relativo nel pieno.

6°. Collocata la ghianda fra i due punti B, K in qualunque ſito I, da cui cominci a diſcendere, i tempi impiegati a ſcorrere gli archi BK, IK ſaranno uguali. Ciò naſce dalla ſimilitudine de due triangoli bga, fge, i quali fatta l'abſciſſa bi eguale all'arco BI, ſono nell'uno e nell'altro caſo le ſcale delle forze acceleranti. La medeſima oſſervazione ha luogo anche negli archi traſcorſi ſino alla totale eſtinzione del moto; laonde tutte le vibrazioni o grandi, o picciole in tal ſorta di pendoli ſi ſi compiſcono in egual tempo, e ſono iſocrone.

7°. Fiſſato l'arco IK = KC, ſe la ghianda principierà a cadere dal punto di ripoſo I, atteſe le coſe dimoſtrate ſi anderà accelerando ſino al punto K, indi ritardando ſino a giungere al punto infimo della cicloide, in cui ceſſerà tutto il moto, ed in conſeguenza non ci ſarà reciprocazione.

8°. Si può far cadere la ghianda dal punto di quiete M ſituato fra i punti I, K, ed allora trovandoſi la maſſima velocità in K, preſo l'arco KN = KM, ſarà eſtinta nel punto N tutta la velocità acquiſtata nella diſceſa.

9°. Eſaminiamo coſa ſia per riſultare dal calcolo. Diſcenda il mobile dal punto di quiete N, e pongaſi l'arco NC = b, e chiamati s gli ſpazj creſcenti da N ſino in C, uno de' quali ſia per cagion d'eſempio NO, la forza ſollecitante in O all'arco OC = $b-s$ ſarà in proporzione, come BG : BE, o come $n : 1$, ſuppoſta n una frazione minore dell'unità. Avremo pertanto la predetta forza = $nb-ns$, da cui ſottratta la reſiſtenza coſtante r, perverremo alla nota formula $\overline{nb-ns-r}\,.\,ds = u\,du$. Mentre r ſia maggiore della quantità nb, lo che dee neceſſariamente ſuccedere, potendo io diminuire quanto mi piace l'arco NC, ſtando ſempre determinata, e coſtante la reſiſtenza r; accaderà altresì, che il binomio $nb-r$ ſia una grandezza negativa = $-g$; dunque $-g\,ds - ns\,ds = u\,du$, ed integrando non ommeſſa l'aggiunta della coſtante, $c - gs - \frac{ns^2}{2} = \frac{u^2}{2}$: ma quando lo ſpazio s è nel punto N = o, ſi trova eſſere la velocità $u = o$; dunque ſarà parimente = o la coſtante aggiunta c; così che la vera integrazione ſi ridurrà $-2gs - ns^2 = u^2$, nella qual equazione non ſi ſcanſeranno mai gli immaginarj, ſe non ſi prendano negative le s. Di fatto ſe la reſiſtenza coſtante foſſe una potenza attiva, atta a generare il moto, la ghianda monterebbe all'insù, nel punto K ſarebbe dotata della maſſima velocità, indi con moto ritardato perverrebbe ſino al punto M, poſto KM = KN, ed in queſto ſpazietto reciprocherebbe le ſue oſcillazioni.

10°. Per-

10°. Perſiſtendo nella noſtra ipoteſi, ſe la ghianda nel partirſi dal punto di quiete B deſcriverà l'arco BCQ, indi reciprocando l'arco QCI, e poi l'arco ICP, e di bel nuovo reciprocando l'arco PCM, e così continuerà a vibrarſi, dico, che gli archi BCQ, QCI, ICP, PCM, ec. coſtituiſcono una progreſſione aritmetica decreſcente. Chiamo p l'arco BC, e $2p$ l'arco intiero BCD, che dal pendolo ſi deſcriverebbe nel vano: chiamo r la reſiſtenza coſtante, ed il primo termine della noſtra ſerie ſarà l'arco BCQ, che diviſo per metà nel punto O, e poſto l'arco $OC = q$ s'eſprimerà per $2p - 2q$, eſſendo l'arco QD, o la differenza, che paſſa fra gli archi BCD, BCQ doppia di OC, e per conſeguenza $= 2q$. Il ſecondo termine della progreſſione, cioè l'arco QCI ſi eſprime per la quantità $2p - 6q$; concioſſiachè fatto l'arco $CS = CQ$, e $CR = CO$, in diſcendendo la ghianda dal punto di quiete Q, acquiſterà nel punto R la maſſima velocità, e perderà tutto il ſuo moto pervenuta che ſia al punto I, reſtando indietro per l'arco IS doppio di CR, o di CO; e conſeguentemente $= 2q$. Aggiunte pertanto le due differenze $QD + SB = 4q$, l'eccesſo, per cui l'arco BCD ſupera l'arco ICQ, ſi troverà $= 6q$; dunque $ICQ = 2p - 6q$. Per la ſteſſa ragione ſarà il terzo termine, o l'arco $ICP = 2p - 10q$, ed il quarto, o l'arco $PCM = 2p - 14q$, e così di mano in mano: di modo che la differenza coſtante, con cui un termine ſorpaſſa l'altro immediatamente vicino, viene eſpoſta per $4q$, ed è ſempre quadrupla dell'arco dato OC.

11°. Oſſervo, che il ſuddetto arco OC ſta alla reſiſtenza coſtante r in ragion data, cioè a dire come il peſo aſſoluto della ghianda al ſuo peſo ſpecifico, o come EB: CG, ovvero per ſervirmi dei ſimboli del n°. 9° come $1 : n$. Senza moltiplicar le figure fingaſi, ch'eſſendo la retta $bc =$ all'arco BC, o alla toccante BF, e di più la normale $bh =$ BH, ſia l'abſciſſa $bk =$ all'arco BO, e conſeguentemente la $kc =$ all'arco OC. Condotta l'ipotenuſa hc, dalla kg verrà determinata la reſiſtenza coſtante r; dunque $ck = q : kg = r :: cb : bh ::$ FB : HB :: EB : GB :: $1 : n$; lo che dovea dimoſtrarſi.

Perciò ſe q ſi ſcopre eſſere $= \frac{r}{n}$, la progreſſione aritmetica, di cui abbiamo fatto parola, ci comparirà ſotto un altro aſpetto.

$$2p - \frac{2r}{n};\ 2p - \frac{6r}{n};\ 2p - \frac{10r}{n};\ 2p - \frac{14r}{n};\ \text{ec.}$$

SCOLIO.

Dalle ſeguenti conſiderazioni ſi raccoglierà, che avendoſi ad abbandonare l'ipoteſi delle reſiſtenze coſtanti, ſiccome quella, che tira ſeco degli aſſurdi; fa di meſtieri conchiudere, che le reſiſtenze riſpondano con qualche relazione alle velocità attuali del pendolo.

Ri-

Riduciamo la cosa a computo, e fondiamolo sopra alcune sperienze registrate dal Sig. Cav. Nevvton nello Scolio generale annesso alla proposizione 31. del secondo libro de' suoi Principj.

Il pendolo ivi descritto, la di cui ghianda era di legno, rimosso come nel primo sperimento dalla linea del piombo per la distanza di due dita, onde nel vuoto descrivesse un arco di quattro dita, dopo 164. oscillazioni è montato nel pieno, cioè a dire nell'aere, per un arco d'un dito, e tre quarti; di modo che l'arco intiero percosso nell'ultima reciprocazione era prossimamente di dita $3\frac{1}{2}$.

Supponiamo, che il ritardamento nasca da una resistenza costante; e procuriamo d'indagarne la precisa misura tanto nell'allegata esperienza, quanto in alcune altre dal citato Autore rapportate; ma prima è d'uopo di cercare il metodo, che ci guidi speditamente alla soluzione del quisito. Giacchè l'arco IQ è di quattro dita, ed il pendolo dopo 164. vibrazioni si riduce a descrivere l'arco MP di dita $3\frac{1}{2}$; suppongasi, che nella prima oscillazione la massima velocità della ghianda sia nel punto O, e ci si presenterà l'equazione $IQ - MP = b \cdot OC$. Per avere il valore della coefficiente b, da cui resta affetto l'arco costante OC, giusta la regola prescritta al n°. 10°. si moltiplichi il numero delle oscillazioni, che nel nostro caso è 164., per quattro, e dal prodotto si levi il binario, con che sarà $b = 654.$; dunque $IQ - MP = \frac{1}{2}$ dito $= 654.\ CO$, o sia $CO = \frac{1}{1308}$ parte d'un dito.

Archi descritti dal pendolo di legno nelle sperienze Nevvtoniane espressi in dita

4, 8, 16, 32, 64, 128.

Numero delle vibrazioni, in cui si perde respettivamente l'ottava parte del moto,

$164\frac{1}{2}$, 121, 69, $35\frac{1}{2}$, $18\frac{1}{2}$, $9\frac{2}{3}$.

Archi respettivamente percorsi dopo le dette vibrazioni espressi in dita

$3\frac{1}{2}$, 7, 14, 28, 56, 112.

Valore della quantità coefficiente b nè casi sopraddetti

$$654,\ 482,\ 274,\ 140,\ 72,\ 36\frac{2}{3};$$

Misura dell' arco CO negli esperimenti come sopra in parti d'un dito

$$\frac{1}{1308},\ \frac{1}{482},\ \frac{1}{137},\ \frac{1}{35},\ \frac{4}{35},\ \frac{24}{35};$$

Per le cose dette al n°. 11°. l'arco CO sta alla resistenza costante r come il peso assoluto della ghianda al suo peso specifico, cioè come BE: BG: ma il Sig. Newton ci assicura, che la sua sfera di legno era ad un pari volume d'acqua in proporzione di 55: 97, ed assumendo una ragione almeno prossima fra la gravità specifica della palla del legno paragonata con quella dell'aere come $453\frac{59}{97}$. 1, e perciò essendo BE: BG:: $453\frac{59}{97}$: $452\frac{59}{97}$, tale sarà parimente la proporzione fra l'arco CO, e la resistenza costante r.

Confrontando insieme ciò, che risulta dalla prima, e dall'ultima esperienza, trovo, che la resistenza supposta costante nel primo caso sta a quella del secondo in ragione di 11897. prossimamente.

Questa enorme disparità, che per qualunque ripiego non può mai sanarsi, ci fa abbastanza comprendere, che l'ipotesi assunta è sì fattamente assurda, che destrugge se stessa. Il computo adattato alla sperienza prende per dato, che la resistenza sia costante, e l'esperienza modificando il calcolo, ci fa toccar con mano esser falso il dato, e la resistenza variabile, la quale va crescendo, a misura che il pendolo cammina con maggiore celerità; perchè esso incontra un maggior contrasto, quanto da maggiore altezza discende.

SCHEDIASMA XXXIII.

PROBLEMA.

Determinare il moto d'un pendolo a cicloide, ſuppoſta coſtante la reſiſtenza, che ſi oppone alle diſceſe, ed agli aſcendimenti verticali.

LE curioſe proprietà notate nei pendoli oſcillanti colle leggi ſuppoſte nell'antecedente Problema, quantunque immaginarie, e diſcordi dai canoni, de' quali ſuole la Natura far uſo, mi anno dato motivo di cercare in qual maniera doveſſero regolarſi le reſiſtenze, acciocchè gli archi delle decreſcenti reciprocazioni, in cambio di formare una progreſſione aritmetica, ne coſtituiſſero una geometrica. Dopo un qualche giro di raziocinio, che per brevità tralaſcio, mi ſono accorto, che per ſatisfare alle condizioni della quiſtione, fa di meſtieri aſſumere le reſiſtenze in qualunque punto della cicloide per eſempio E (Fig. 126.) proporzionali alla forza tangenziale, che ſtimola il pendolo alla diſceſa.

Ci venga rappreſentata per la verticale EI la gravità ſpecifica, o relativa della ghianda oſcillante in un dato fluido: ſia IK la reſiſtenza coſtante, e pongaſi IH = IK. Poſcia condotte alla toccante EN le due perpendicolari KL, HN, ſi oſſervi, che ſe il pendolo diſcende, dalla forza ſollecitante EM dee ſottrarſi la reſiſtenza LM: all'incontro quando la ghianda in vigore dell'impeto impreſſo è obbligata ad aſcendere, alla forza tangenziale EM, che ſi oppone all'aſcendimento, biſogna aggiungere la reſiſtenza MN, onde la retta EN dinoti la forza unita, per cui viene ritardato il pendolo nel punto E.

Chiamata pertanto g la gravità ſpecifica EI, ed r la reſiſtenza coſtante IK, avremo EK = $g - r$, ed EH = $g - r$: ma come HE : KE :: NE : LE, e la forza tangenziale EM ſta all'arco della cicloide EC in ragion data; dunque ſarà nota altresì la ragione fra le rette EL, EN, e l'arco EC. Premeſſa queſta preparazione, io tirerò ſemplicemente le conſeguenze, ommeſſe le dimoſtrazioni, che dal metodo adoprato nel precedente problema agevolmente ſi deducono.

Dico dunque in primo luogo, che ſe la ghianda comincierà a diſcendere dal punto di quiete E, e dopo aver percorſo l'arco EC monterà per l'arco CF, i due archi EC, CF ſaranno in ragion data come $g + r : g - r$. Similmente qualora il pendolo reciprocando diſcende per l'arco FC, ed aſcende per l'arco CG, ſarà FC : CG :: $g + r : g - r$, e così ſucceſſivamente.

2°. Perciò tutti gli archi CE, CF, CG, CO coſtituiſcono una ſerie geometrica decreſcente, il cui eſponente reſta determinato dalla ragione coſtante di $g + r : g - r$. Di più le intiere vibrazioni EF, FG,

GO

GO formano altresì una serie geometrica decrescente all' infinito, ed in conseguenza di ciò il pendolo continuerà sempre a vibrarsi, senza che si riduca mai ad uno stato di perfetta quiete.

3°. E perchè, se il pendolo altra resistenza non patisse, salvo che la nascente dalla gravità del fluido, in cui sta immerso, tanto ascenderebbe, quanto discende, siccome è facile a dimostrarsi, laonde alla discesa EC risponderebbe la salita uguale CP, quantunque più tempo impiegasse a scorrere l'arco ECP nel pieno, di quello facesse nel vano; ne seguita, che la differenza FP procede dalla resistenza proporzionale in qualsivoglia luogo alla forza accelerante, o ritardante, e lo stesso dicasi delle altre differenze EG, PO, le quali ponendo l'arco $EC = a$, e l'arco $CF = x$ vengono espresse dalla seguente progressione

$$a - x,\ a - \frac{x^2}{a},\ a - \frac{x^3}{a^2},\ a - \frac{x^4}{a^3},\ a - \frac{x^5}{a^4},\ \text{ec.}$$

Questa serie è crescente, ma prese le sue differenze

$$x - \frac{x^2}{a},\ \frac{x^2}{a} - \frac{x^3}{a^2},\ \frac{x^3}{a^2} - \frac{x^4}{a^3},\ \frac{x^4}{a^3} - \frac{x^5}{a^4};\ \text{ec.}$$

formano queste una progressione geometrica decrescente.

4. Il tempo della discesa per la curva EC è maggiore del tempo impiegato nell'ascendimento per l'arco CF, e questi tempi sono in ragion dimidiata degli archi EC, CF, o sia come $\sqrt{g+r} : \sqrt{g-r}$. Non ostante ciò le intiere vibrazioni EF, FG, GO, ec. sono isocrone, conciossiachè sono uguali i tempi contumati nelle due discese EC, FC; ed altresì uguali i tempi spesi nelle due salite CF, CG.

5°. La velocità massima sarà nel punto infimo C della cicloide, e resterà fissata col prendere una media proporzionale fra l'arco EC della discesa, e la forza accelerante EL; ovvero fra l'arco CF della salita, e la forza ritardante corrispondente al punto F, la quale è quarta proporzionale alle tre quantità FC, CE, EL.

6°. Le velocità poi nei punti di mezzo per esempio in G, ed O si ritrovano col descrivere due quarte d'ellissi; la prima per la discesa coll'asse maggiore uguale all'arco EC, ed il minore uguale alla suddetta media proporzionale; la seconda per l'ascendimento con l'ultimo asse comune, e l'altro uguale all'arco CF.

7°. Due pendoli affatto simili, cioè di ghiande, e di fili uguali, che si vibrino nel medesimo fluido, uno percorrendo archi maggiori, e l'altro minori, perderanno una parte proporzionale del loro moto in un pari numero d'oscillazioni. Scenda il primo dal punto di quiete E, e dopo cento vibrazioni pervenga al punto G; di modo che sia EG la quarta parte dell'arco EC: dico, che il secondo, che si parte dal punto di riposo B, dopo cento oscillazioni monterà fino al punto E, e

che l'arco BE sarà subquadruplo dell'arco BC. La dimostrazione dipende dal n°. 2°. Le sperienze del Sig. Newton non favoriscono punto la nostra supposizione, come se ne può far facilmente il confronto.

8°. Finalmente stando tutte le cose ferme come sopra, se i fili, o le catenelle, che sostentano le ghiande, saranno ineguali, in tal caso i tempi delle vibrazioni nei due differenti pendoli saranno in ragione dimidiata delle lunghezze de' fili medesimi: proprietà, che si verifica anche nel vano.

SCOLIO.

Dalle conseguenze puramente geometriche mi faccio strada alle fisiche. Prima di tutto io noto, che nei punti di quiete per esempio E, F, ec. la resistenza r è necessariamente nulla; perchè il mezzo fluido non ha ripugnanza veruna a perfistere nello stato, in cui si trova, nè per quello appartiene alla sua inerzia, non essendo cacciato fuori di luogo; nè per quello concerne la tenacità, ed il fregamento, mentre non restano le particelle staccate l'una dall'altra, nè si oppongono colla loro asprezza ad un corpo, che sta in riposo. Tutto ciò, che in tale incontro può operare il mezzo, consiste in togliere al solido una parte del suo peso, facendo che il corpo discenda con una gravità relativa minore dell'assoluta. Le altre resistenze anno relazione al moto, ed è un manifesto assurdo, che nel punto di quiete E abbia ad esprimersi la resistenza per la quantità finita LM, come richiede la nostra ipotesi.

Molto meno intendo, qualmente facciasi il gran salto dal nulla al finito, senza passare per i gradi di mezzo. Se dunque nello stato di riposo si fa essere $r = o$, anche nello stato di moto, quando la velocità sarà infinitesima, sarà altresì minima la resistenza, e ad una celerità finita corrisponderà una finita resistenza, nella quale c'entrerà sempre una qualche funzione della velocità.

Cresce l'assurdo per un altro verso; conciossiache se nel punto di quiete E giusta l'ipotesi la resistenza LM è finita: all'incontro è nulla nel punto infimo C della cicloide, mentre cammina il pendolo colla massima velocità, e cammina per uno spazio minimo orizzontale, senza che sia nè accelerato, nè ritardato dalla sua natural gravità. In sì fatte circostanze ripugna pure l'inerzia del liquido spinto fuori del suo luogo, la tenacità delle particelle fluide, che vengono separate, e disgiunte, e forse anco lo sfregamento; come dunque può essere, che tutte queste resistenze abbiano in tal caso tanta discrezione di permettere al solido libero il passaggio, senza far contrasto al suo moto?

L'ipotesi Newtoniana, di cui ho favellato nello Schediasma XXXII. e la quale sottra la resistenza data dalla forza tangenziale, quantunque sia stata assunta dall'Autore piuttosto come matematica, che fisica, è soggetta al primo, ma non già a quest'ultimo inconveniente.

SCHE-

SCHEDIASMA XXXIV. (*)

Oſſervazioni ſopra il moto de' corpi ſolidi ne' mezzi fluidi.

NElla copioſa riſtampa delle Opere del Galileo fatta ultimamente in Firenze Tomo terzo, pag. 331., e ſeguenti, ſi trovano regiſtrati alcuni Teoremi dell'incomparabile Geometra Ab. D. Guido Grandi intorno le velocità dei ſolidi diſcendenti nei fluidi: e ſebbene queſta Dottrina è maneggiata nella ipoteſi più ſemplice, preſcindendoſi dalle reſiſtenze; non oſtante ciò parmi, che ſia ſtata ſtabilita ſu principj incerti, e mal corriſpondenti alle vere leggi del moto; laonde mi ſono laſciato indurre a mettere in carta queſte mie rifleſſioni.

Ecco in poche parole la ſentenza del lodato Matematico. Diſcenda il corpo A (Fig. 127.) per un fluido, e paragonate aſſieme le loro ſpecifiche gravità, abbiano la proporzione di MG : FG, onde la differenza MF eſprima la forza acceleratrice, con cui il ſolido A viene nel liquido alla diſceſa ſollecitato. In fatti ſupponendoſi, che la linea MG ci rappreſenti il peſo aſſoluto del corpo A nel vano, e la FG il peſo parimente aſſoluto nel vano d'una mole del liquido preciſamente uguale al volume del ſolido A; il peſo comparativo, o ſpecifico della palla A nel predetto fluido ci verrà eſpreſſo dalla retta MF; eſſendo certo, che il mezzo leva al ſolido tanto di peſo, quanto peſerebbe una data quantità del fluido, che ſottentraſſe nel luogo occupato dal ſolido.

Quindi tirata l'orizzontale FH, che paſſa per il punto F, e ad eſſa dal punto M inclinata la diagonale MH uguale alla MG, ſi pretende, che il momento, per cui il mobile A ſcenderebbe nel vuoto giuſta la direzione del piano inclinato HM, s'uguagli al momento, con cui è diſpoſto il corpo A a diſcendere verticalmente per il mezzo fluido. E la ragione ſi deriva da ciò, che la forza ſollecitante alla diſceſa in tutti i punti analoghi degli ſpazj traſcorſi, principiando dalla quiete, ſi trova eſſere preciſamente uguale alla linea MF tanto nell'una, quanto nell'altra ipoteſi.

La dimoſtrazione camminerebbe ottimamente, ſe foſſero pari le circoſtanze. Per meglio ſpiegarmi, ſieno le due palle A, B (Fig. 128.) dello ſteſſo volume, ma di differente peſo, le quali ſi connettano con un filo, che facciaſi paſſare per la girella immobile C; e non ſi metta

in

(*) *Nel meſe d'Agoſto 1720. comunicò l'Autore col mezzo dell'eccellente Aſtronomo Sig. Euſtachio Manfredi all'acutiſſimo Geometra P. Ab. D. Guido Grandi le ſue Oſſervazioni ſopra il moto de' corpi ſolidi ne' mezzi fluidi. Si ſervì queſti dello ſteſſo Sig. Manfredi per inviare al C. J. la ſua Riſpoſta nel meſe di Settembre dell'anno medeſimo, in cui difendeva la propria ſentenza pubblicata nella riſtampa delle Opere del Galileo fatta in Firenze l'anno 1718., e finalmente dopo la Replica dell'Autore ſi dichiarò interamente perſuaſo.*

in conto nè la gravità del filo, nè la frizione della troclea. Suppongasi; che la palla A discendendo nel vano faccia poggiare in alto la palla B: egli è manifesto, che con quella stessa velocità, con cui discenderà la prima, salirà altresì la seconda. Ora io dimando con che legge si facciano questi moti. Si dia m la massa del globo A, ed n quella del globo B, ed essendo i pesi proporzionali alle masse, si avrà la gravità comparativa, che spinge abbasso la sfera $A = m-n$.

Ciò premesso, per i canoni dei moti accelerati la forza sollecitante moltiplicata nel tempo è sempre uguale alla quantità del moto, o sia alla velocità moltiplicata nella massa, che attualmente si muove; e la forza medesima moltiplicata nello spazio trascorso equivale al prodotto del quadrato della velocità nella massa posta parimente in moto: ma nel caso nostro non s'imprime solamente il moto alla palla A, che discende, ma di più alla palla B, che con pari celerità è costretta ad ascendere; dunque chiamando, t il tempo, s lo spazio, u la velocità, avremo le seguenti formule $\overline{m-n} \cdot t = \overline{m+n} \cdot u$ dalle quali dedurremo

$$\overline{m-n} \cdot s = \overline{m+n} \cdot \frac{uu}{2},$$

tutte le proprietà del moto, che ci siamo proposti d'investigare.

Chi poi volesse considerare la salita del solido B, le formole diventerebbono negative, ed in tal incontro la forza accelerante $n-m$ essendo una quantità negativa ci ammonisce, che il corpo B dee montare in cambio di discendere.

Applicando l'addotta dimostrazione a que' solidi, che calano abbasso ne' mezzi fluidi, io noto, che la forza accelerante, o il peso comparativo non solamente spinge all'ingiù la massa solida, ma obbliga a salire con velocità equivalente una massa fluida eguale al predetto solido, e ad occupare il luogo da esso successivamente abbandonato. Il difetto pertanto, che secondo il mio debole parere si rinviene in tutto il progresso delle dimostrazioni del lodato Matematico, consiste in una semplice inavvertenza, cioè a dire nell'aver solo posto mente alla massa, che piomba abbasso, e non a quella, che poggia in alto.

Ma s'egli avesse rivolto lo sguardo a que' corpi, che per essere più leggieri in spezie del fluido, si trovano obbligati ad ascendere; si sarebbe accorto, che in tale ipotesi il liquido si è quello, che dal suo maggior momento astretto a calare abbasso, spinge il solido all'insù. Perciò la forza sollecitante sarà $n-m$, e siccome nell'altro caso s'è messa in conto la massa, che discende; così non veggio, perchè nel nostro debba essere trascurata. Non so capire per qual motivo nella prima supposizione s'adopri la formola $\frac{m-n}{m} \cdot t = u$, e nella seconda non si faccia uso dell'analoga $\frac{n-m}{n} \cdot t = u$: anzi in sua vece si sostituisca la seguente $\frac{n-m}{m} \cdot t = u$,

nella

nella quale, quasi che la massa fluida in discendendo non cagionasse principalmente l'effetto, si considera semplicemente l'ascendimento della solida.

In ordine a ciò per determinare il piano declive analogo HM, per cui il mobile liberamente sdrucciolando acquisti di passo in passo que' medesimi gradi di celerità, con cui il peso B per il fluido discende, egli è d'uopo diversificare la costruzione del Chiarissimo Autore, prendendo la normale HO, o sia FM non già eguale alla quantità $m-n$, ma più tosto all'altra $m \cdot \frac{m-n}{m+n}$, la quale deriva dai nostri principj.

Risposta del P. Ab. D. Guido Grandi alle premesse Osservazioni.

La difficoltà mossa dal Sig. Conte Riccato non parmi, che giunga ad oscurare l'idea chiarissima, che abbiamo della forza, con cui scende un solido per un mezzo fluido, analoga a quella, che eserciterebbe sopra il piano da me assegnato.

Se colla funicella CA (Fig. 127.) il corpo A si sospende, e sia il peso del suddetto corpo A come MG; dentro il fluido GB, il cui peso in pari mole al solido sia GF, m'insegna Archimede, e me lo conferma l'esperienza, che la fune suddetta viene tesa con una forza come FM, cioè proporzionale all'eccesso del peso di A sopra il peso del fluido B in pari mole. Similmente inclinata la MH eguale ad MG sopra l'orizzontale FH, se vi pongo sopra lo stesso corpo A, tenendolo colla fune AC parallela al piano HM, perchè non iscorra per esso; la forza, che ne sentirà la mano, sarà misurata dall'altezza perpendicolare HO, cioè dalla medesima MF; dunque in amendue i casi è la stessa forza, con cui il corpo A sta in procinto di scendere, e lo stesso momento esercita nel fluido, che nel piano HM.

Ora quì ci avverte il Sig. Conte, che diversamente si applica al moto la forza suddetta nel fluido, che nel piano; perchè in questo non ha da muovere, se non lo stesso corpo A; ma nel fluido, si muove insieme il corpo A all'ingiù, ed una mole pari di fluido B all'insù: e però bisogna distribuire la forza ad ambi i corpi A, B in ragione delle loro masse.

Io dubito, che non si rimetta in campo una partità già pareggiata, facendo il conto due volte sopra il fluido B eguale in mole al corpo A, se si parla della tendenza di esso; oppure che non si voglia richiamare in iscena ciò, che si era accordato di lasciarlo fuori, e prescinderne, se si parla del moto attuale del medesimo fluido.

Imperocchè quando si è detto, che la forza, la quale nel fluido tende la funicella CA, non è tutto il peso MG del corpo A, ma il solo eccesso MF sopra il peso GF del fluido B in pari mole, già si è considerata la tendenza del fluido B, che col suo peso GF resiste alla discesa del corpo A, perchè questa l'obbligherebbe a scomodarsi, e salire, per cedergli il luogo: e però detratta la forza suddetta GF, che resiste

alla

alla diſceſa del corpo A, il quale per altrō con tutta la forza GM tenderebbe a diſcendere, gli rimane di libera la ſola forza MF, con cui eſercita il ſuo momento di ſcendere, e tira la ſunicella CA. Non accade adunque più conſiderare, che la forza MF debba non ſolo muovere allo ingiù il corpo A, ma obbligare ancora il fluido B alla ſalita, perchè già ſi è conſiderato queſto punto una volta, quando ſi è concluſo, che il corpo A non più ha la forza come tutta la GM (quale averebbe, ſe non doveſſe contraſtare col fluido G ripugnante alla ſalita colla ſua forza GF) ma come la ſola FM, tenendone continuamente impiegata la parte ſua GF appunto in rintuzzare l'oppoſita tendenza del fluido B, la quale eſſendo equilibrata colla porzione GF della forza GM, con ogni minimo vantaggio di moto attuale, anche infinitamente piccolo, che ſi conſideri nel corpo A, reſta poi vinta, ed obbligato perciò il fluido B a ſalire.

Che ſe ſi vuole far conto non del ſolo cedere, che fa il fluido B per rimanere la ſua tendenza in qualſivoglia modo ſuperata dall'intiera forza di A, ed obbligata, per dir così, a ritirarſi dalle ſue pretenſioni, ma di più del moto attuale, che con una certa velocità ora minore, ed ora maggiore quindi ne ſegue, e traſporta di fatto in alto il fluido B: eccoci alla reſiſtenza del mezzo, da cui (ſiccome avverte il medeſimo Sig. Conte) preſcindevaſi in quella teoria: che però la conſiderazione di queſta, che ſul principio del moto (di cui ſi tratta principalmente) non è notabile, ma ſolo nel decorſo diventa poi tale, potrà aggiugnerſi a ciò, che ſi è dimoſtrato, ſenza gettare a terra le ſteſſe dimoſtrazioni, quaſi fondate foſſero in falſi principj, e così perfezionare la ſuddetta Teoria, ſupplendo ciò, che le manca.

Non sò però, ſe la ſtrada tenuta dal Sig. Conte ſia baſtevole a ciò, perchè il fluido è obbligato, moſſo ch'ei ſia, a ſalire ſempre con maggiore velocità, e quindi ſi va diminuendo il moto del ſolido; ma una parte di eſſo moto gli viene reſtituita dal fluido, che per di dietro ricorre, e così ſi entra in una Teoria complicatiſſima, che non può dipendere dalla formula coſtante $\frac{m-n}{m+n}$ trovata dal Sig. Conte; e dubito, che gli ſia per eſſere ammeſſo da tutti, che poſto un corpo di due libbre in un fluido, che in pari mole peſi una libbra, debba ſtimarſi la forza, che ha di ſcendere per eſſo, come di un terzo di libbra, cioè di 4. once, e non piuttoſto di mezza libbra, come ſin quì ſi è creduto, rimanendo l'altra mezza libbra, (e non 8. once) ſollevata dal contrappeſo d'una pari mole di fluido. Tuttavolta ſe la ragione del Sig. Conte Riccato convincerà in contrario, biſognerà pure ricrederſi.

Solamente avverto, che quando ſi dice, che alla diſceſa del ſolido dentro un fluido ſale altrettanta mole di fluido, in rigore non è poi vero, perchè ſe ſi muoverà il globo HKIL (Fig. 129.) per uno ſpazio infinitamente piccolo LO, baſterà, che ſi muova la ſola porzione

ne HLOI del fluido, ed altrettanto ne ricorra dalle parti vicine nello ſpazio HNIK, il che la natura eſeguiſce preſtiſſimo, e con minore ſcomodo, che ſia poſſibile, onde fin' ora non è ſtato neceſſario, che ſi muova una mole di fluido pari al ſolido, ma una parte infinitamente piccola, e con una velocità non maggiore di quella, con cui ſi è moſſo il ſolido, e però al moto del ſolido ſi aggiunge per conto del fluido un'altra quantità di moto infinitamente più piccola. Segua ora il ſolido a muoverſi per un altro ſpazio infinitamente piccolo; ſaremo nel medeſimo caſo di prima: non eſſendovi neceſſità, che ſi muova il fluido, che ſi muoveva nell'iſtante precedente, inſieme con quello, che ſi muoverà ora, potendo quello rimanere equilibrato col reſto. In ſomma in ogni iſtante troveremo, che una parte infinitamente piccola del fluido ha da ſalire (ed una ſimil parte ha da diſcendere) e non è ſe non per accidente, che ſi muova una parte notabile di eſſo fluido per dar luogo ſucceſſivamente al ſolido, ed in ciò è differente il caſo del moto ne' fluidi dal moto d'un peſo attaccato ad una funicella, che paſſando per una troclea abbia attaccato all'altro termine un peſo minore. In queſto caſo muovendoſi in giù il maggior peſo, è obbligato a ſtraſcicare allo 'nsù il peſo minore tutto in un tempo in qualſivoglia iſtante; ma il ſolido muovendoſi dentro il fluido non fa alzare tutto in un tempo una mole di fluido pari a ſe, ma a poco, a poco, e nel tempo, in cui diſcende per tutta l'altezza del ſuo diametro, la muove tutta a poco per volta. Anzi potrebb' eſſere il ſolido in un tal vaſo, che non conteneſſe he'meno tanta mole di fluido pari a ſe, e pure ſi potrebbe muovere per eſſo: come ſe un vaſo di larghezza per ogni verſo di once 12., e di altezza di once 15. conteneſſe un cubo di once 12. per ogni verſo di qualche corpo ſolido più grave dell' acqua, ed il reſto foſſe acqua; potrebbe il ſolido elevato alla ſuperficie cadere al fondo per l'altezza di once 3, e quando così aveſſe moſſa tutta l'acqua, non ne avrebbe alzata la metà della ſua mole, non eſſendovi che 807. once cubiche d'acqua in tutto, quando la mole del cubo è once cubiche 1728.

Il Sig. Bernoulli, non mi ricordo in quale Tomo degli Atti di Lipſia, calcolando il moto de'pendoli dentro i fluidi, computa la forza, che li muove appunto come ho fatt'io, ſecondo l'eccesſo della gravezza del corpo moſſo ſopra quella del fluido in pari mole, perchè avendo moſtrato eſſere la moltitudine delle vibrazioni di pendoli eguali fatte nello ſteſſo tempo in ſuddupplicata ragione delle forze, conclude poi, che eſſendo la ragione della gravità ſpecifica del corpo a quella del mezzo come G ad M, il numero delle vibrazioni nel vuoto a quello delle vibrazioni nel mezzo ſarà come $\sqrt{c} : \sqrt{c - m}$. Onde ſe il Sig. Conte vorrà impugnare la mia Teoria, avrà l'onore nello ſteſſo tempo di correggere quella di un sì celebre Matematico Oltramontano.

Replica alla Riſpoſta del P. Ab. Grandi.

Per eſſermi ſpiegato nell'altro mio foglio troppo in riſtretto, ho dato motivo al dottiſſimo P. Ab. Grandi di muovere alcune difficoltà contro la mia Teorica in propoſito della diſceſa de' corpi ſolidi ne' mezzi fluidi; alle quali m'ingegnerò di ſatisfare tenendomi lontano da ogni diſputa, ed a ſolo oggetto di ſcoprire la verità.

Si mi permeſſo prima d'ogni altra coſa di eſaminare l'ipoteſi del celebre Autore nelle ſue conſeguenze; perchè ſe taluna d'eſſe ſarà manifeſtamente aſſurda, ci renderà ſoſpetti i principj, da' quali è ſtata legittimamente dedotta. Prend'egli nella Prop. 6ª. pag. 336. a miſurare le velocità acquiſtate da un mobile, che diſcendendo per un fluido ci avrà ſpeſo un tempo determinato, e le paragona con quella, che in tempo pàri ſi ſarebbe acquiſtata nel vano, diſcorrendo nella ſeguente maniera.

La retta FG (Fig. 130.) eſprima la gravità ſpecifica del fluido, e la FC ci rappreſenti la velocità, che nel voto guadagnerebbe qualſivoglia corpo in fine d'un dato tempo, il qual tempo ſi eſponga altresì per la medeſima retta FC. Compiuto il rettangolo FU, e prorogate all'infinito le due linee UG, UC, fra eſſe ſiccome aſſintoti deſcrivaſi l'iperbola DFL, che paſſi per il punto F: interverrà, che ſe le abſciſſe GM, *Gm* eſprimeranno le varie gravità ſpecifiche de' ſolidi, che diſcendono nel predetto liquido, la di cui gravità ſpecifica è GF; le corriſpondenti applicate ML, *ml* eſporranno le velocità acquiſtate nel tempo predetto FC.

La premeſſa coſtruzione trae l'origine dalla formola fondamentale $\frac{m-n}{m} \cdot t = mu$, nella quale n, e t ſanno figura di coſtanti ed m, u di variabili. Quindi preſa GM infinita, la velocità acquiſtata da un corpo infinitamente denſo nel fine del tempo FC ſarebbe preciſamente uguale alla celerità, che in detto tempo ſi guadagnerebbe nel vano. Se poi la denſità del ſolido foſſe uguale a quella del fluido, cioè GM = GF, l'ordinata che nel punto F è nulla, indicherebbe, che il ſolido collocato in qualunque ſito del mezzo fluido ſtarebbe in ripoſo.

Sin quì tutto cammina ottimamente: ma quando ſi paſſa dal poſitivo al negativo, ci ſi fa anzi gli occhi l'inconveniente. In vero preſa la gravità ſpecifica del ſolido minore di quella del liquido, onde il corpo immerſo aſcenda in iſcambio di diſcendere; io poſſo determinare GN così piccola, che la velocità corriſpondente ND acquiſtata dal mobile aſcendente nel fine del tempo FC ſtia a quella, che acquiſterebbe un corpo cadente in pari tempo nel voto, in proporzione maggiore di qualſiſia data. Queſta conſeguenza, che viene ammeſſa dal P. Ab. Grandi nel Corollario ſecondo, baſta da ſe ſola, s'io non m'inganno, a far toccar con mano, che la ſua Dottrina non s'accorda colle vere leggi

del

del moto, nè colla ſperiénza: Di fatto biſognerebbe, che un corpo leggieri come un ſughero ſaliſſe nell'argento vivo con una incredibile celerità, e che con un moto prontiſſimo l'aria montaſſe per l'acqua, lo che ripugna alle oſſervazioni.

In oltre un corpo grave poſto in un fluido di maggiore gravità ſpecifica intanto aſcende, in quanto viene eſtruſo, e cacciato in alto dal maggior momento del liquido. Per altro il corpo più leggieri in iſpecie non ha in ſe ſteſſo alcuna facoltà, o alcuna inclinazione alla ſalita; e perciò non può mai aſcendere con maggiore celerità di quella, con cui poſſa diſcendere il fluido, dal quale è ſpinto ed eſtruſo. Ma certa coſa è, che il fluido non può diſcendere con maggiore velocità di quello ſarebbe in diſcendendo nel voto, quand'anche il ſolido immerſo ſi ſupponga d'una infinita rarità; dunque la velocità del ſolido aſcendente, quantunque rariſſimo, non può mai ſuperare la velocità del ſolido de' gravi cadenti in tempo pari nel vano. Se altrimenti foſſe, il predetto ſolido non poggerebbe in virtù della eſpulſione fatta dal fluido più grave, che cala abbaſſo, ma per una ſua natural leggerezza, e con una velocità, che ſupererebbe di lunga mano quella del fluido diſcendente in vigore di tutta la ſua innata gravità. Sarebbe queſta certamente una grande, e bella ſcoperta in Fiſica, ſe foſſe vera.

Tentiamo di ſciogliere lo ſteſſo Problema inerendo ai noſtri principj. Ciò ſi conſeguirà facilmente, preſa per mano la formula $\overline{m-n}.\ t = \overline{m+n}.\ u$, in cui ſuppoſte coſtanti n, t, s' aſſumeranno m, u ſiccome variabili; onde abbiaſi la ſeguente coſtruzione.

Sia FC la velocità acquiſtata da un mobile nel voto in fine del tempo eſpreſſo per la medeſima FC, e ci rappreſenti GF la denſità del fluido. Facciaſi Fg doppia di FG, e dato compimento al rettangolo Fu, dentro gli aſſintoti gu, uC deſcrivaſi l'iperbola HFO, che paſſi per il punto F: dico, che ſe per eſempio l'abſciſſa GM eſprimerà la denſità del ſolido, dall'applicata MO ci verrà eſpoſta la velocità acquiſtata da eſſo ſolido nel fine del tempo FC. Poſta GM infinita, la velocità ſarà uguale ad FC, e fatta la gravità ſpecifica del ſolido pari a quella del fluido, la velocità ſarà nulla.

Ma preſa la denſità GN del ſolido più picciola di quella del liquido, la velocità ſarà NP, che allora ſi troverà preciſamente uguale alla velocità FC, ogni qual volta la rarità del ſolido ſarà infinita; così che fatta GN infinitamente picciola, diventi la velocità GQ=FC. Per la qual cauſa in tale ipoteſi il fluido diſcenderà, preſcindendo dalle reſiſtenze, come ſe diſcendeſſe nel vano, e colla ſteſſa celerità verrà ſpinto all'insù il ſolido, che ſi finge infinitamente raro: conſeguenze tutte, che ſi accordano col principio dell'eſtruſione, e dimoſtrano la verità del mio aſſunto.

Da queſta Dottrina ſi cava un Corollario importante, che riuſcirebbe falſo, mentre foſſe vera l'opinione del P. Ab. Grandi: ed è, che

immerſo il grave A in un fluido B di minore ſpecifica gravità, ſe fingeremo un fluido D pari in gravità ſpecifica al ſolido A, ed un ſolido C egualmente denſo come il fluido B; il grave A nel diſcendere per il liquido B, ed il ſolido C nell'aſcendere per il fluido D, principiando dalla quiete, acquiſteranno in tempi uguali un grado pari di velocità. Ciò interviene, perchè la quantità poſitiva $\frac{A-B}{A+B}$ è uguale alla negativa $\frac{C-D}{C+D}$, con queſto divario però, che all'affermativa riſponderà una forza centripeta, ed alla negativa una centrifuga. Ma ſecondo il P. Ab. Grandi, la grandezza poſitiva $\frac{A-B}{A}$ alla negativa $\frac{C-D}{C}$ avrà la proporzione inverſa di A: C; laonde la velocità della diſceſa a quella della ſalita in tempi uguali potrà eſſere in qualſivoglia ragione.

Il detto fin quì è ſufficiente, s'io non erro, per iſtabilire la mia ſentenza: rimane per tanto, che ſi riſponda all'oppoſizioni.

Dubita il lodato Scrittore, che ſi metta due volte in conto l'azione del fluido B, ma l'eſempio da me recato toglie di mezzo la difficoltà. Fatto paſſare il filo per la troclea C (Fig. 128.), dal quale ſiano ſoſpeſi i due gravi A maggiore, e B minore, egli è certo, che s'io porrò in D una potenza $= A-B$, che tiri dal baſſo in alto, ſi farà l'equilibrio: contuttociò levata la potenza D, s'io vorrò determinare la velocità del peſo A nel fine del tempo dato, biſognerà anche per ſentimento del P. Grandi, ch'io mi vaglia della formula $\frac{A-B}{A+B} \cdot t = u$.

In vece del peſo B ſia circondato il corpo A da un fluido, di cui un volume uguale ad A peſi quanto il grave B. Reſtituita la potenza D, di bel nuovo ſi rimetterà l'equilibrio. Ma tolta di mezzo eſſa potenza D, chiaramente appariſce, che ſiccome nel primo caſo non può il corpo A calare abbaſſo, ſenza tirar in alto la maſſa B; così nel ſecondo non può il peſo A farſi ſtrada diſcendendo per il fluido, ſenz'alzare una mole di liquido corriſpondente alla maſſa B. La ragione ſi è, che conſiderato il grave A in quiete, il ſuo momento, o la forza ſollecitante equivale alla potenza D, nè ſi muta mai per tutto il tempo della diſceſa, ſe non ſe in quanto viene a diſtribuirſi ad una maſſa maggiore. Per la qual cauſa la predetta forza, o ſia impreſſione ſollecitante equivalente ſempre alla potenza coſtante D tanto meno opera, reſpettivamente alla velocità comunicata, quanto ha da animare una maſſa più grande.

SCHE-

SCHEDIASMA XXXV. (*)

Delle preſſioni, e degli equilibrj de' fluidi.

QUantunque ſia malagevole impreſa lo ſpiegare meccanicamente le proprietà de' corpi fluidi, e che i più ſublimi Geometri nelle loro dilucidazioni abbiano laſciato molto da deſiderare; non pertanto non mi ſarà vietato di proporre alcune mie oſſervazioni, e di ſpargere un qualche nuovo lume ſopra la preſente oſcuriſſima materia.

Prima d'ogn'altra coſa ſa di meſtieri comprendere in che conſiſta la maggior difficoltà. Dai fenomeni impariamo eſſere i fluidi, a diſtinzione dei ſolidi, forniti d'una ſingolare prerogativa di sfiancare per tutti i verſi, e di eſercitare la loro forza da tutti i lati: la qual forza è ſempre proporzionale all'altezza verticale del fluido ſopra incombente. Così i cannoni di piombo, o di rame ad uſo delle fontane caricati d'acqua, e lungi oltre una certa miſura finalmente ſi fendono, ed aperto un picciolo buco nella parte d'un vaſe, eſce il liquido con tanta velocità, quanta n'avrebbe acquiſtata in cadendo liberamente a piombo da una ſublimità pari all'altezza del fluido ſopra il centro del foro.

Abbiaſi un cilindro retto, il cui vano ſia pieno di ghiaccio. Ognun ſa, che la maſſa gelata colla ſua natural gravità preme il fondo, e non impiega qualſiſia menoma parte della ſua azione contro la ſuperficie concava della canna. Il gelo ſi ſquagli, ed allora oltreche il fondo ſoggiace ad una pari preſſione, anche alla parte del vaſo ſi addoſſa il ſuo carico, giuſta la regola teſtè indicata. Pare adunque, che perſeverando tutto intiero, e fenz'alcuna diminuzione l'effetto cagionato ſul fondo dal peſo del ghiaccio, ſe ne aggiunga un altro ſpeſſe fiate aſſai più gagliardo contro la ſponda, computata la ſomma totale delle preſſioni. Ma ſe la cagione non ſi muta, l'effetto non dovrebbe mai creſcere; altrimenti ſi mette una eccettuazione al celebre ed inalterabile Aſſioma, che gli effetti prodotti non ſuperano, nè vengono ſuperati dall'energia della cauſa produttrice, quando queſta nel generarli tutta ſi ſpende. Per iſvogliere il nodo, premetto il ſeguente

ASSIOMA.

Si diſpongano alquanti corpi toccantiſi A, B, C (Fig. 131.) uno ſopra l'altro verticalmente: è coſa chiara, che il più baſſo A ſoſtenta il peſo di tutti e due i ſuperiori. La gravità non dorme mai, e perciò quan-

(*) *Fu compoſto queſto Schediaſma l'anno* 1741. *per iſgombrare alcune difficoltà promoſſe dal P. Vincenzo Riccati, come ſi raccoglie da due lettere dello ſteſſo Padre, l'una de' 10. Gennajo, e l'altra de' 7. Marzo dell'anno mentovato, dirette al Fratello Co. Giordano.*

quando impedita non può ſtimolare le maſſe alla diſceſa, impiega tutto il ſuo vigore nel premere.

S C O L I O.

I fluidi ſono compoſti di minime particelle diſgiunte, e ſtaccate, e che fra loro non anno una ſtretta connessione; laonde ſono prontiſſimi a cedere ad ogn'impulſo. Se la ſtilla E (Fig.132.) non galleggia a fior d'acqua, ma ſta in quiete immerſa ad una data profondità; egli è certo ſoſtener eſſa il filo EF di tutte le goccie, che la caricano a perpendicolo, e in virtù di cotal preſſione premer eſſa tutte le goccie vicine per ogni direzione. Quinci ſi rende manifeſta la differenza tra i fluidi, ed i ſolidi. Queſti ſiccome compoſti di particole unite l'una coll'altra, e bene ſpeſſo inſieme intralciate, *agunt per modum unius;* nè una particella può ſfiancare dai lati, mentre non può ſtaccarſi dalle contigue, ed operar ſeparatamente. Là dove ne'fluidi, oltre all'eſercitare un azion comune, ciaſcuna goccia agiſce da ſe ſola, eſſendo pronta a cedere, da qualunque lato le venga aperta la ſtrada.

TEOREMA PRIMO.

Nelle ſteſſe circoſtanze dico, che la goccia E circondata dal fluido, perſiſtendo in ripoſo, è compreſſa ugualmente per tutte le direzioni.

La dimoſtrazione preſuppone eſſer le gocciole del fluido perfetto dotate di ſquiſita elaſticità. Abbiamo dal premeſſo Aſſioma, che la ſtilla E viene aggravata a piombo dalla colonna fluida EF: ma non oſtante il carico, e tutto che ſia ſoſtenuta da un appoggio, che cede ad ogni piccolo impulſo, ella non ſi muove nè direttamente all'ingiù, nè obbliquamente dai dati, nè cangia ulteriormente figura; dunque perſeverando l'equilibrio, lo ſforzo del filo verticale EF è contrabilanciato dalle impreſſioni, che premono tutto all'intorno la gocciola, le quali eguagliando la ſua elaſticità, vogliono miſurarſi dalla gravità della colonna EF: il che ec.

COROLLARIO PRIMO.

Si appoggi la ſtilla G alla parete del vaſo nel punto I: è coſa chiara, che non ſi turberà l'equilibrio; perchè la reſiſtenza della ſponda ſuppliſce alla mancanza delle particole acquee, che da quel lato facean contraſto. E lo ſteſſo dee ſuccedere, quand'anco le pareti non foſſero normali al fondo, ma ripiegate, come nella figura, e curve piuttoſto che rette; mercecchè in qualunque incontro la maſſa della gocciola è del pari compreſſa da tutti i lati, e ſe altrimenti camminaſſe la faccenda, non ſuſſiſterebbe l'equilibrio.

CO-

COROLLARIO SECONDO.

Per discernere qual forza impieghi la stilla G contro la parete del vase nel punto di appoggio I, basta misurare l'altezza del filo GH, e la specifica gravità del liquore. La goccia G è caricata dal peso della colonna fluida GH, e nello stesso tempo compressa da forze uguali, che tutto all'intorno la cingono: ma una di queste forze si è la reazione della sponda nel punto I, la quale equivalendo per una parte allo sforzo della gocciola G giusta la direzione perpendicolare alla linea del contatto, e per l'altra all'aggravamento del cilindro fluido GH; ne nasce di conseguenza, che la parete del vase in I viene pressa dalla stilla G con quello stesso vigore, per cui essa stilla viene aggravata dal peso del filo GH.

SCOLIO PRIMO.

Ed ecco sufficientemente dilucidata la maravigliosa proprietà dei fluidi di premere, e di sfiancare per tutti i versi; conciossiachè la goccia E non solamente sostenta il carico delle stille superiori, che a piombo la pressano, ma per mezzo della reazione anco lo sforzo delle inferiori, che come in un torchio la stringono. Oltre ciò bisogna tener conto dei fili orizzontali, ed obbliqui, che tutti, e per tutte le direzioni contro essa stilla esercitano una pari azione, ad uno de' quai fili suppliſce il contatto della parete. Per la qual cosa le particelle elementari componenti il fluido si contengono in un esatto equilibrio.

SCOLIO SECONDO.

La Proposizione esposta, e dimostrata è talmente seconda, che da essa spontaneamente fluiscono le primarie affezioni dei corpi liquidi. Tutti sanno, che una massa pesante discende, ogni qualvolta si accosta al centro dei gravi, ed al contrario ascende, quando se ne discosta.

E' noto altresì, che un peso non impedito sempre cala abbasso, non cessando mai di operare la gravità innata. Quinci la superficie superiore d'un fluido si mette a livello, e si adatta ad una superficie sferica egualmente distante da quel punto, verso cui in ogni Regione tendono i gravi. Se una parte si mantiene delle altre vicine più sollevata, fa d'uopo investigare la ragione, per la quale la gravità naturale in certi incontri patisce diminuzione, e se ne sta ozioſa.

Non si dà forse liquore, che di qualche picciola tenacità non sia fornito, ed oltre ciò i fluidi sono soggetti alle resistenze, ed ai fregamenti, e quanto sono più perfetti, tanto più facilmente si spianano. Mi è venuto fatto d'osservare, che escavata una buca nel mele, sostanza consistente, e che può chiamarsi semfluida, ci volevano parecchie ore, prima che la superficie si riponesse a livello.

Fa-

Famoſa ſi è l'eſperienza del Galileo, per cui ſi fa ſtare a fior d' acqua una lamina piana di metallo, quantunque aſſai più grieve in iſpecie dell'acqua medeſima. Si vede tutto all'intorno alzarſi un picciolo argine, e ſoſtentarſi l'acqua ſenza fluire. La lamina unita all'aere occupante il vano della ſponda acquea forma un ſolido più leggieri d'altrettanta mole d'acqua, il quale a guiſa di zatta galleggia. Ma bagnata gentilmente la lamina, queſta ſubito ſi profonda; perchè in tali circoſtanze l'acqua dell'arginetto non ſi ſoſtiene, e ſcorre liberamente.

Mi ſovviene d'avere ſpeſſe fiate veduto a derivare un rigagnolo per un aſciutto canaletto. L'acqua di poco corpo avvanzava ſtentatamente cammino, e con un moto interrotto; concioſſiachè tratto tratto ſi fermava, reſtando immota per qualche tempo, finattantochè ſaziato in prima l'alveo bibace, formava eſſa un groſſo labbro, e ſi alzava a miſura di poter ſuperare la ſcabroſità del fondo. Dappoi fluiva per un piccolo ſpazio, indi tornava a fermarſi, e ripetendo a paſſi regolati lo ſteſſo giuoco, appena in una intiera giornata le riuſciva di progredir per un miglio.

Molto ci ſarebbe da riflettere ſopra le ſuperficie dei liquori contenuti nei vaſi o ſcemi, o pieni, o traboccanti, e ſopra gli effetti indi naſcenti, de' quali ha ragionato a lungo il Borelli nella ſua Opera de' moti naturali dipendenti dalla gravità. Nè avrebbono ad ommetterſi i curioſi Fenomeni delle goccie ora ſenſibilmente rotonde, ora bislunghe, ed ora ſchiacciate, che ſono tanto più groſſe, quanto che ſi attaccano a corpi più ruvidi, e più peloſi. Alquante belle oſſervazioni ſi leggono in tal propoſito nel Trattato dei Barometri del Sig. Dott. Jacopo Piacentini, ora Primario Profeſſore di Medicina nella Univerſità di Padova.

SCOLIO III.

Se tutte le ſtille, che ſi rinvengono nella ſezione orizzontale qualunque FD (Fig. 133.) del vaſe ABC pieno d'acqua non ſono per ogni verſo egualmente premute; dico che non ſuſſiſtendo l'equilibrio, tutte le particelle del fluido tanto ſuperiori, quanto inferiori alla ſegnata ſezione ſi metteranno in movimento. La miſura delle compreſſioni, che ſtringono tutte all'intorno la goccia D ſi deſume dal filo verticale DE; e perchè ſi ſuppone, che la goccia F ſia meno premuta, ſoſterrà eſſa il filo FG più corto di DE. Prevalerà dunque la maggior forza, e la ſtilla F colle contigue ſarà coſtretta a cedere, ed a ſalire, diſcendendo all'incontro il filo ED, e comunicata l'agitazione a tutto il corpo del fluido, dopo varj bilanciamenti non ceſſerà mai il moto, ſe le particelle ſottentrate nei poſti D, F non ſaranno del pari compreſſe: lo che interverrà, mentre la ſuperficie ſuperiore AHC mettendoſi a livello, ſi trovi parallela alla ſezione FD.

Non

Non nega già, che l' acqua ammontata in HEC, e non impedita si spiani in discendendo, come per un piano inclinato. Non pertanto il maggior effetto proviene certamente dalla pressione; conciossiachè è molto più grande l'impulso, che spigne in alto la goccia F di quello, che stimola la stilla E a discender obbliquamente.

Per la cagione addotta si conserva perenne la corrente dei Fiumi, attesochè somministrando continuamente le fontane, e le vasche nuovo alimento, l' acqua, che sopraggiugne, carica, ed incalza quella, che precede; laonde le goccie d'una qualsivoglia sezione orizzontale non si rinvengono mai egualmente premute, e di conseguenza stanno in un perpetuo moto, senza mai pervenire all' equilibrio. Tre diversi elementi vanno considerati nel corso dei fiumi, cioè la declività del letto, quella della superficie, che si adatta ad una specie di curva assintotica, e per ultimo la forza della pressione, ai quali fanno contrasto le direzioni irregolari, e vorticose del filone, e le resistenze dell' alveo. Il secondo, e terzo elemento sono sempre in azione, ma non così il primo; perchè massimamente nei fiumi di lunghissimo corso il fondo per tratti orizzontali bene spesso si stende, conforme ci ha resi avvertiti il Guglielmini. Quando fra monti, o in vicinanza d'essi è notabile il pendio del letto, allora i fiumi corrono precipitosi, e con poco corpo d'acqua, e strascicando seco le ghiaje, e i sassi fanno un continuo sforzo per allargarsi. Allo incontro quanto più s' accostano al Mare, tanto camminano più placidi, e più ristretti, ma con maggior profondità, supplendo in tal caso alla mancanza del declive l' accrescimento della pressione.

SCOLIO QUARTO.

M'inoltro ai vasi comunicanti, uno de' quali ci viene rappresentato dalla Figura 134. Il liquore contenuto nel tubo più largo BK conserva un perpetuo commercio con quello del cannello più stretto FG per mezzo del tubo XY. Ora io dico, che ne' predetti vasi i fluidi omogenei, o almeno della specifica gravità stessa si quieteranno ogniqualvolta le due superficie IK, LM si accomoderanno allo stesso piano orizzontale. Seguitiamo per poco i popolari pregiudicj, ed immaginiamoci, che predomini il liquore contenuto nel tubo più grande BK, di modo che l' acqua, a cagion d'esempio, sia ridotta a stato di riposo, mentre nel maggior vase si abbassa fino ad RS, e monta nel minore fino a GH. Si concepisca una qualunque goccia O, e condotta l'orizzontale ON, tagli le verticali QO, PN ne' punti O, N. Egli è manifesto, che la goccia O sarà per l'una parte premuta con una forza proporzionale all' altezza QO, e per l'altra sosterrà una pressione, che corrisponde all' altezza PN; dunque essendo la prima pressione maggiore della seconda, fa di mestieri, che a quella ubbidisca la goccia O. La qual cosa verificandosi di tutte quante le goccie componenti il liquore, dovrà esso necessariamente discendere nel tubo opposto BK, finattantochè qualunque stilla O sia del pari premuta per ogni verso, lo che interviene, quando

do le ſuperficie d'ambo i vaſi s'adattano alla comune orizzontale IK LM.

Ma ſe i liquori ſono differentemente gravi in iſpezie, la ſezione TU divida i due liquori, per modo che di ſopra ad eſſa nel ſito UG ſtia il liquore più leggere, e di ſotto il più grave. Si prenda in queſta ſezione la goccia O. Ognuno facilmente comprende, che s'otterrà l'equilibrio, qualunque volta l'altezza a piombo QO del liquor più leggiero ſopra la goccia ſarà all'altezza PN del liquor più grave in proporzione reciproca del peſo ſpecifico, e non già aſſoluto proprio del fluido GU, al peſo altresì ſpecifico del fluido SBFT. In tali circoſtanze è agevole il dimoſtrare, che la goccia O ſarà egualmente premuta, ſtando le preſſioni in ragion compoſta dell'altezza verticale, e della gravità ſpecifica del liquore.

Poſta poi cotal proporzione reciproca tra le gravità ſpecifiche, e le altezze ſopra il confine TU de' due liquori, io dico che qualunque goccia D ſoſterrà ſempre eguali preſſioni. Imperocchè chiamate G, g le gravità ſpecifiche dei fluidi più, e meno gravi, ſi ha per l'ipoteſi g. QO = G. PN, o ſia g. QD + g. DO = G. PN, ovvero g. QD = G. PN — g. DO: ma g. QD eſprime la preſſione, che la goccia D ſoſtiene in virtù del filo QD, e G. PN — g. DO la repreſſione; dunque è neceſſario, che trovandoſi egualmente premuta, ſtia in equilibrio.

SCOLIO V.

Nella dimoſtrazione ultima s'è per noi tacitamente ſuppoſto, che il confine TU de'due liquori ſia parallelo all'orizzonte, e poſto in uno de' tubi comunicanti. Ci ſiamo così adoperati a diſegno; poichè non è poſſibile, che nel caſo d'equilibrio il predetto confine ſia nel tubo di comunicazione, o ſuor di livello. Fingaſi collocata nel cannello di comunicazione la ſeparazione CE dei fluidi, e ſia queſta qualunque ſuperficie o piana, o curva. Si ſegni la ſtilla A, che in equilibrio ſupponeſi, per la quale paſſi l'orizzontale XY terminata alle verticali PN, QO prodotte. E' manifeſto, che ſaranno le altezze PX, QY reciprocamente come le gravità ſpecifiche G, g. Prendaſi una nuova goccia tra A, E ſtando ferme le gravità ſpecifiche, s'accreſceranno di due quantità eguali le nuove altezze, e per conſeguenza ſarà maggiormente premuta dal liquor più grave, che dal men grave. Tutto all'oppoſto interverrà, mentre ſcelgaſi una goccia poſta tra C, A: dunque dovrà ſeguir moto, inclinandoſi la ſezione AE verſo F, e la ſezione AC verſo X. La medeſima dimoſtrazione avrà luogo, ſe il confine de' fluidi ſia bensì in uno de' tubi comunicanti, ma però obbliquo relativamente all'orizzonte.

Abbiamo un celebre eſempio del bilanciamento dei liquori eterogenei nella coſtruzione dei Barometri. L'argento vivo, che ſtagna nel catino, è del pari aggravato per una parte dal peſo dell'aere, e dalla elaſticità equivalente al peſo medeſimo, e per l'altra dalla colonna di mercurio, che ad una determinata altezza nel cannello ſi ſoſtenta; la-

onde dalle due forze pari, e contrarie si genera l'equilibrio. Ed atteso che mutate le circostanze si altera la gravità dell'aria per que' motivi, che non occorre indagare presentemente; in ordine a ciò anche l'argento vivo contenuto nel tubo si abbassa, e si rialza dentro certi limiti.

Qualora si vede estollersi un fluido sopra il consueto livello, sebbene circondato da un liquore della stessa natura, ed ivi reggersi senza discendere, si dica fuori d'ogni dubbio aver esso per qualche esterno accidente perduta una qualche porzione della sua specifica gravità. Nei tubi capillari l'acqua monta più, e meno, quasi inerpicandosi per la picciola interior cavità del cannello. Se poi debba ciò ascriversi o all' attrazione Newtoniana, cuneo che serve per ogni nodo, o pure a cagioni più semplici, e meccaniche, non è ispezione, dietro cui io voglia presentemente spendere il tempo; avvegnachè uscirci troppo dal mio sentiero, se mi pigliassi la briga di sottoporre all' esame le moltissime sperienze in tal proposito registrate dal Sig. Musschenbroeck, e le oscillazioni, che ne vengon dedotte.

Aggiungo un esempio più manifesto. Se l'acqua del Mare si sostiene alla massima elevazione sotto l'Equatore, e sta sempre più depressa, quanto più ai Poli si va accostando; abbiamo a credere, che il Mare sia composto d'innumerabili fili comunicanti, la specifica gravità de' quali venga passo passo minorata, procedendosi da Settentrione a Mezzogiorno, dallo accrescimento della forza centrifuga.

TEOREMA SECONDO.

Posta la goccia D abbracciata dal fluido, dico che non ostante le pressioni, a cui soggiace, la sua gravità innata sollecita la massa D colla forza consueta, e per la solita direzione verso il centro comune de'gravi. La ragione dipende dall'essere la gravità una forza morta bensì, ma continuamente applicata, e che non cessa mai d'operare: laonde sebbene per qualche tratto di tempo le circostanze portano, ch'ella s'impieghi o nel muovere, o nello ammaccare, o nel premere, e condensare, o che so io, ed in tal guisa generi la forza viva; compiuto però il lavoro, e ridotte le cose alla quiete, come nel caso nostro interviene, torna ad agire come prima, stimolando la goccia D alla discesa, ed aggravando l'ostacolo, che vi si oppone.

ANNOTAZIONE.

In comprovazione della verità posso addurre parecchi esempj, e fra gli altri quello della stadera, in cui la mano, che regge l'uncino, allora solo sostiene interamente il carico dei due pesi attaccati alle braccia, quando fra loro si contrabbilanciano, non entrando in conto la mutua azione, e reazione, per le quali uno impedisce la discesa dell'altro.

Di vantaggio ſia infiſſa nel pavimento orizzontale AB (Fig. 135.) la verga elaſtica CD coſtituita in ſito verticale, a cui s'appoggi il peſo D, che la comprima, e la riduca alla minor lunghezza CE, nel qual luogo dopo varie reciprocazioni il moto ſi eſtingua, e l'azione del peſo ſia bilanciata dal contraſforzo della molla. Sinattantochè la palla D, rannicchiando l'elaſtro da D ſino in E, ſi accoſta al piano ſottopoſto, queſto non riſente ſe non ſe una parte del carico; perchè quella porzione di forza, che ſi ſpende nel moto allo ingiù, non s'impiega ad aggravare, altrimenti la cagione del proprio effetto reſterebbe ſuperata. Ma quando il corpo D ſta in ripoſo nel ſito E, allora tutto il ſuo peſo ſi addoſſa al piano; atteſo che eſercitando eſſo tutto il ſuo vigore contro la molla, la molla ſteſſa in virtù della reazione al pavimento AB lo comunica.

COROLLARIO PRIMO.

Ogni particola elementare del fluido viene ſpinta all'ingiù dal proprio peſo, ſebbene atteſi gl'impedimenti, non ſuccede l'effetto della diſceſa. Ciò che d'una particella ſi afferma, dicaſi generalmente di tutte inſieme. Eſſendo il liquore omogeneo, il peſo di qualunque goccia è proporzionale alla maſſa: quinci attaccato il vaſe pieno d'acqua, di qualunque figura egli ſi ſia, al braccio d'una bilancia, per equilibrarlo, ſi dee porre nella ſcodella oppoſta tanto peſo, che ſia preciſamente uguale a quello del vaſo continente, e dell'acqua contenuta, nulla importando, che l'acqua ſi trovi o ſciolta o gelata.

COROLLARIO SECONDO.

Meſſa la goccia nel fluido ad una data profondità, ſi noti che la forza della natural gravità della ſtilla non è paragonabile coll'energia delle preſſioni, che la predetta goccia tutto all'intorno circondano, e ſtringono. Lo ſforzo di una di queſte preſſioni, che a tutte le altre dà regola, ſi miſura dal peſo del filo verticale: ma un tal peſo ſta a quello della goccia proſſimamente (perchè non ſi dee ſupporre, che tutti gli elementi d'un liquido omogeneo ſieno fra loro con geometrica eſattezza uguali) come il numero delle ſtille contenute nel filo all'unità; dunque ſe la ſtilla ſolitaria è minima almanco ſiſicamente, la ſua gravità, e conſeguentemente la ſua forza a quella del filo premente è in una proporzione, che può aſſumerſi, ſiccome minore di qualſiſia data. E molto più ſi allontana la proporzione, quando ſi mettano in conto tutte le altre preſſioni, che contro la goccia impiegano il loro vigore.

SCOLIO PRIMO.

Quì mi ſi apre l'adito di liberare la Fiſica da un confermato pregiudicio. Parecchi Matematici, che mi ſono capitati alle mani, ſpiegano le azioni dei fluidi contro le pareti, ed i fondi dei vaſi per via delle forze equipollenti. Sia la ſponda CD (Fig. 132.) o curva, o retta ed obbliqua all'orizzonte, alla quale nel punto I ſi appoggi la goccia G. La linea a piombo IL eſprima il peſo del filetto verticale HG, e condotta GK normale a CD, ovvero alla toccante del punto I, dal punto L ſi tiri la LK parallela ad IC, o alla menzionata tangente. Si pretende, che riſolvendoſi la forza IL nelle due collaterali LK, KI, la ſeconda ſia quella, per cui la goccia G preme la ſponda nel punto I, giuſta la direzione IK. Se così è, quanto più l'angolo ottuſo BCD ſi accoſta al retto, tanto più ſi minora la forza premente IK, ſino a diventar nulla, mentre la parete CD è perpendicolare al fondo per eſempio orizzontale BC. In tale incontro la ſponda non ſarebbe in conto alcuno premuta, nè la goccia G ſarebbe nè punto, nè poco ſtimolata ad uſcire dal vaſe con una direzione parallela all'orizzonte: lo che ripugna alle oſſervazioni.

Oltre ciò ſe la ſtilla G eſercitaſſe contro la parete l'azione eſpoſta per la normale IK, dallo impulſo medeſimo ſarebbe ella, almeno ſul principio del moto, ſollecitata a sbucare dal vaſe per il forame aperto in I, ed in conſeguenza la impreſſione accelerante ſtarebbe alla forza del filo premente HG come KI: IL. Non avrebbe dunque la gocciola G nè ſpirito, nè lena baſtante per uſcire dal vaſo colla celerità conveniente alla diſceſa per la ſublimità HG, conforme ci ammoniſce l'eſperienza, e conforme in progreſſo dimoſtrerò.

Non ſi reputi ſtravagante l'aſſerzione, che dalle coſe premeſſe io ſono per dedurre, ed è, che nei corpi fluidi non anno punto che fare le forze compoſte. Non nego già, che adoperandoſi ancora la ſtilla G (Teorema ſecondo) a premere la ſponda nel contatto I colla ſua natia gravità, queſta forza non vada riſoluta nelle due equipollenti IK, KL, mentre il peſo della gocciola ſi eſprima per IL: ma avendo notato (corollario ſecondo del ſuddetto Teorema), ch'ella poſta a confronto con quella delle preſſioni è minima, ed inaſſegnabile, ne ſiegue, che non ſe ne dee far caſo, e che non alterando in modo alcuno gli effetti, non ſolo un Geometra, che la conſidera ſiccome infiniteſima, ma un Fiſico altresì, il quale altronde ſa quanto ſia piccioliſſima, debbono del pari traſcurarla.

Senza il premeſſo avvertimento, io per me penſo, che non ci andaſſe mai fatto di liberarci dall'equivocazione, e conſeguentemente dal paralogiſmo. Ora forata la parte del vaſe nel punto I, ceſſa la reazione del contatto, e ſi toglie di mezzo l'equilibrio.

Prima dunque ad operare ſi è la preſſione direttamente contraria OG, pari, come più fiate ho replicato, al peſo del filo verticale HG,

la

la quale s'impiega con più efficacia di tutte le altre, che ſtringonó per ogni verſo la goccia G; perchè non trova contraſto, che vi ſi opponga, e la quale per la direzione OI perpendicolare alla retta CD, o alla toccante della curva CID nel punto I comincia a ſollecitare al moto la ſtilla G. Qualmente poi ſi continui il movimento, e l'accelerazione, a ſuo luogo m'ingegnerò di ſpiegarlo. (a)

In ordine alle coſe dette abbiaſi la goccia S, che tocchi il fondo BC nel punto N, e la parete AB nel punto M. Eſſa goccia uſcirà dal vaſo con pari velocità, aperto ad arbitrio il foro nel ſito N, ovvero M, colla differenza però, che l'azione principierà da quelle forze prementi, che direttamente ſi equilibrano colla reazione del fondo in N, o della ſponda in M, cioè a dire, ſe il fondo ſarà a livello, e retto l'angolo ABC, o dal filo ſovraincombente a perpendicolo, o dall'orizzontale giuſta la direzione CB.

SCOLIO SECONDO.

Stiamo ben attenti a non confondere il peſo totale d'un fluido colle vicendevoli azioni, e reazioni delle particole elementari, che le compongono; concioſſiachè quantunque gli effetti, che da ambo i principj dipendono, dalla ſola gravità l'origine riconoſcano, ſono però fra loro affatto diſſimili, e regolati con leggi totalmente diverſe, conſiſtendo in ciò principalmente la differenza, che ſi ravviſa fra i corpi ſolidi, e i fluidi. Il peſo aſſoluto è ſempre proporzionale alla quantità della materia, conforme per via delle oſcillazioni dei pendoli ha dimoſtrato l'Ughenio, nè preſcindendo dalla evaporazione punto ſi muta, ogniqualvolta a cagion d'eſempio un pezzo di metallo di ſolido diventa liquido. All' incontro le ſomme delle preſſioni notabilmente ſi diverſificano, quand' anche ſta ſalda la medeſima maſſa, ed il fluido alla medeſima altezza verticale ſi ſoſtiene, purchè ſi muti o la figura del vaſe, o ſemplicemente la poſitura. Queſta verità ſi vuole dimoſtrare in tutta la ſua eſtenſione.

TEOREMA TERZO.

Sieno due vaſi ABC *abc* (Fig.136.) ambo ripieni d'un liquore omogeneo, e ſieno D, *d* i centri di gravità d'amendue le maſſe fluide; dico, che l'aggregato di tutte le preſſioni verticali, a cui ſoggiacciono gli elementi del fluido contenuti nel vaſe ABC all'aggregato di tutte le preſſioni altresì ſofferte dalle particelle compreſe dal vaſo *abc* ſta in proporzione compoſta delle maſſe liquide ABC, *abc*, e delle diſtanze ED, *ed* dei centri di gravità D, *d* dalle ſupreme orizzontali ſuperficie AC, *ac* dei liquori.

La

(a) *Avea intenzione l'Autore, che non ha poi ridotta ad effetto, di aggiungere alla preſente un altra Diſſertazione.*

La massima profondità del fluido ABC si misuri dalla verticale EB, a cui si ponga uguale la retta LM asse della curva, che dee descriversi. Tagliato il solido ad arbitrio colla sezione FIG parallela alla superiore AEC, facciasi BI=MQ, ed assunta la linea Z a piacimento siccome unità, sia il rettangolo Z. QR uguale all'area della sezione FIG. In tal guisa si continui l'operazione in ogni punto dell'asse ML, onde nasca la curva MRN analoga al corpo ABC: egli è certo, che qualunque ordinata QR esporrà il numero delle goccie contenute nella sezione corrispondente FG, e che l'intera superficie mistilinea LMRN dinoterà tutta la materia fluida, la quale empie il vaso ABC. Di più segnato il centro di gravità P dell'area LMRN, atteso che per la costruzione quest'area è analoga al solido ABC, i centri di gravità D, P saranno egualmente lontani, il primo dalla suprema superficie AEC del fluido, ed il secondo dall'ultima ordinata LN, laonde saranno eguali le distanze perpendicolari DE, PS.

Sopra la base LMRN s'intenda alzata una cilindroide retta, la di cui sublimità sia eguale all'asse ML=BE, e questo solido si tagli con un piano, il quale passando per l'ordinata LN, faccia colla sottoposta base LMRN un angolo semiretto. Dal detto piano si divida la cilindroide in due cunei, e pigliando a considerare l'inferiore tagliato da tanti piani normali alla base LMRN, ed insistenti sopra le applicate QR, quante sono le applicate medesime, si scoprirà, che tali sezioni, atteso l'angolo semiretto, saranno altrettanti rettangoli compresi dalle assisse, e dalle respettive ordinate della curva MRN, uno de' quali si è il rettangolo LQ. QR.

In questo mentre il detto rettangolo LQR è proporzionale a tutte le pressioni verticali sofferte dalle goccie, che compongono la sezione FG; perchè l'applicata QR esprime il numero di esse goccie, e l'assissa LQ espone il peso del filo EI, da cui le dette pressioni prendon la norma. E verificandosi ciò in tutti i rettangoli del cuneo, ed in tutte le sezioni analoghe del solido; ne segue, che il menzionato cuneo ci rappresenterà l'aggregato delle pressioni verticali, alle quali le stille, che riempiono il vase ABC foggiacciono in solido.

Questo giro di preparazione, e di discorso si applichi al vase *abc*, relativamente alla superficie mistilinea *lmrn*, ed al cuneo indi nascente, e cavate le conseguenze, cioè, che l'area *lmrn* ci rappresenti la quantità del fluido contenuta nel vase *abc*, che il cuneo denoti l'aggregato delle verticali pressioni, e che sieno eguali le distanze *de*, *ps* determinate dai centri di gravità *d*, *p*, si conchiuda, che come il cuneo sopra la base LMRN all'altro sopra *lmrn*, così la somma delle pressioni verticali del fluido ABC a quella del fluido omogeneo *abc*.

Appresso i Geometri sanno, che per la regola del Guldino i due cunei s'aguagliano respettivamente a due cilindroidi erette sopra le basi LMRN, *lmrn* colle altezze PS, *ps*, per cui distano i centri di gravità P, *p* dei mistilinei LMRN, *lmrn* dalle estreme applicate LN, *ln*; dunque come queste Cilindroidi, così i cunei già descritti, e così gli aggre-

ga-

gati delle preſſioni verticali d'ambo i fluidi ABC, *abc*, i quali aggregati ſaranno di conſeguenza in ragione compoſta delle aree LMRN, *lmrn*, e delle notate diſtanze PS, *ps*.

Quinci ſurrogando in cambio delle diſtanze PS, *ps* le uguali DE, *de*, ed invece delle aree LMRN, *lmrn* le maſſe fluide analoghe ABC, *abc*, ſi ricava, che le ſomme delle menzionate preſſioni ſaranno in ragion compoſta delle maſſe ABC, *abc*, e delle diſtanze DE, *de*: il che dovea dimoſtrarſi.

COROLLARJ.

I. Se le maſſe ſaranno eguali, gli aggregati delle preſſioni perpendicolari ſaranno come le diſtanze dei centri di gravità dalle ſommità dei liquori. E poſte eguali le diſtanze, gli aggregati predetti ſaranno come le maſſe.

II. Che ſe le diſtanze ſi troveranno eſſere in ragione reciproca delle maſſe, le ſomme delle dette preſſioni ſaranno eguali.

III. Nei vaſi ſimili le ſomme delle preſſioni ſerbano la proporzione quadruplicata dei lati omologhi.

IV. Gli aggregati delle preſſioni notabilmente ſi diverſificano, mutata ſolo la poſitura del vaſe. S'empia di vino il bicchiero conico A (Fig.137.), e vi ſi adatti il coperchio; di modo che inclinandolo, non ſi ſpanda il liquore. Capovolto il bicchiero, e collocato nella poſitura B, è facile a dimoſtrarſi, che parlando delle verticali, la ſomma delle preſſioni del fluido in A alla ſomma delle preſſioni dello ſteſſo fluido in B ſta come l'unità al ternario.

V. Riempiaſi il vaſe *abc* (Fig. 136.) d'un liquore più grave, o più leggiero in iſpecie di quello, che cape nel vaſo ABC, tanto e tanto gli aggregati delle preſſioni ſono come il prodotto della maſſa ABC. DE al prodotto della maſſa *abc*. *de*. Da ciò ponno dedurſi varie conſeguenze, che tralaſcio per brevità.

SCOLIO.

Dalle coſe dimoſtrate ſi ha un nuovo uſo dei centri di gravità, i quali concorrono in parte a determinare la miſura degli aggregati delle preſſioni verticali, a cui ſoggiacciono i corpi fluidi. In eſſe va conſiderato non ſolamente il peſo aſſoluto del liquore, che è ſempre proporzionale alla maſſa, ma di più anche il peſo, che ſerba relazione al centro di gravità di qualunque corpo, e chiamaſi reſpettivo; perchè prende norma dalla diverſità delle figure.

SCHE-

SCHEDIASMA XXXVI.

Difesa del Corollario II. della Proposizione XXXVI. del Libro II. dei Principj Matematici della Filosofia naturale del Cavaliere Isacco Newton.

IL Chiarissimo Signor Michelotti nella sua dottissima Opera ultimamente data alle stampe fattosi ad impugnare certa Dimostrazione del Signor Keil fondata sopra il Corollario secondo Proposizion 36°. li-

Le date delle lettere manifestano il tempo della Controversia del C. J., prima col Sig. Pierantonio Michelotti, e poi col Sig. Daniele Bernoulli. Le tre ultime lettere, due dell' Autore, ed una del Sig. Bernoulli si leggono stampate in Venezia l' anno 1724. presso Domenico Loviſa nelle esercitazioni matematiche dello stesso Sig. Bernoulli. Questo insigne Letterato esaminata posteriormente a fondo la materia, e conosciuta la verità del Corollario Newtoniano, con sincerità filosofica così si espresse nella sua Idrodinamica, che uscì l'anno 1737. Sezione 13, §.9.

„ *Licet hic paucis attingere verbis propositionem aliquam* ex Princ. math.
„ Phil. nat. edit.2. Newtoni. *Auctor hic postquam sententiam suam*
„ *de velocitate aquarum effluentium in prima citati Operis editione ex-*
„ *hibitam mutasset, easque si verticaliter sursum ejiciantur ad integram*
„ *superficiei aquæ altitudinem ascendere agnovisset in editione secunda,*
„ *talia subjicit verba in libro secundo, propos.36. coroll.2. Vis, quæ*
„ *totus aquæ exilientis motus generari potest, æqualis est ponderi cy-*
„ *lindricæ columnellæ aquæ, cujus basis & foramen* EF (*vid. fig.*138.),
„ *& cujus altitudo est* 2GI, *vel* 2GK. *Ista sententia a me olim, & ab*
„ *aliis impugnata, ab aliis rursus confirmata. Nunc autem postquam hanc*
„ *aquarum motarum theoriam meditatus sum, lis ita dirimenda mihi*
„ *videtur, ut quum aquæ ad motum uniformem pervenerint, quæ qui-*
„ *dem hypothesis est Newtoni, tunc recte altitudine* 2GI *vis illa defi-*
„ *niatur, sed ab initio fluxus, ubi velocitas adhuc nulla est, vis sim-*
„ *plici altitudini* GI *respondeat, moxque crescente velocitate simul vis*
„ *aquam ad efflux*um *animans crescat, & tandem ad eam magnitu-*
„ *dinem exurgat, quam Newtonus assignavit. Hæc nunc sunt unicui-*
„ *que obvia, quia vis motum aquæ generans, de qua Newtonus lo-*
„ *quitur, non potest non esse æqualis vi repellenti, quam vidimus esse*
„ *æqualem* a + v. *Recte etiam Ill. Riccatus, cum quo mihi de hoc ar-*
„ *gumento res erat, interrogatus;* unde vis illa duplæ aquarum alti-
„ tudini conveniens oriri possit, quum obturato orificio vi simplicis
„ altitudinis urgere manifeste appareat, *respondit, distinguendum esse*
„ *statum quietis a statu motus.*

libro 2°. de' Principj dell'incomparabile Iſacco Nevvton, ha condannata come falſa la Dottrina del predetto Corollario. Avendomi ſopra di ciò richieſta la mia opinione tal quale ſi poſſa eſſere, parmi, dopo aver fatta una più poſata rifleſſione ſopra il paſſo controverſo, che il detto Nevvtoniano ſia conforme alla verità, maſſime nelle circoſtanze, in cui è ſtato proferito; mentre per altro la Propoſizione citata è ſoggetta a varie importanti difficoltà. Ho ſtimato bene comunicare con geometrica libertà il mio ſentimento al Sig. Michelotti medeſimo, acciò o mi cavi d'errore, o pure ſino che la coſa è intera, poſſa prevenire le oppoſizioni, che dal ſuo Antagoniſta gli potrebbono eſſer fatte.

Preſa per mano la figura del Sig. Nevvton (Fig. 138.), e tralaſciate per ora le conſiderazioni ſopra la Propoſizione principale, che nell'ultime edizioni ſi trova corretta, e riformata, nel Corollario primo ſi ſtabiliſce, che l'acqua uſcirà dal vaſo con tanta velocità, quanta ne acquiſterebbe ſcorrendo con moto accelerato principiato dalla quiete lo ſpazio KC, che determina l'altezza, in cui l'acqua viene coſtantemente mantenuta nel vaſo. Sin quì la deduzione è certiſſima, ed è già ſtata dimoſtrata da Sigg. Bernoulli, ed Ermanno, almeno per quello appartiene a' fluidi, che ponno aſſumerſi come compoſti di particelle fiſicamente minime.

Il ſecondo Corollario, ſu cui verſa la conteſa, è concepito ne' ſeguenti termini. *Et vis, qua totus aquæ exilientis motus generari poteſt, æqualis eſt ponderi cylindricæ columnæ aquæ, cujus baſis eſt foramen EF, & altitudo 2GI, vel 2CK.*

Quì ſi parla dell'acqua, ch'eſce dal vaſo preciſamente in tanto tempo, quanto ne conſumerebbe a cadere con moto accelerato per lo ſpazio KC, e la ragione, che ſe ne adduce, chiaramente lo manifeſta. *Nam aqua exiliens quo tempore hanc columnam æquat, pondere ſuo ab altitudine GI cadendo velocitatem ſuam, qua exilit acquirere poteſt*, cioè a dire, che nel tempo medeſimo, in cui l'acqua diſcendendo dal punto K di quiete in forza della ſua natural gravità ſcorrerebbe lo ſpazio KC, uſcirà dal vaſo tanta acqua, che riempirebbe un cilindro, la di cui baſe foſſe il circolo EF del foro, e l'altezza foſſe uguale alla doppia GI, o CK. Si ſpiega più apertamente l'Autore nel Corollario terzo con quelle parole, *& aqua per foramen EF egrediens, quo tempore gutta cadendo ab I deſcribere poteſt altitudinem IG, æqualis erit cylindro, cujus baſis eſt circulus EF, & altitudo eſt 2IG.*

Ora ſu queſta veriſſima aſſerzione io non ci ſo trovare difficoltà; imperocchè eſprima per eſempio la quantità v quella velocità, che una goccia d'acqua cadendo dal punto I, e ſcorrendo lo ſpazio IG s'acquiſterebbe nell'ultimo punto G; egli è manifeſto per le coſe dimoſtrate dal Galileo, che ſe la predetta goccia in tutto il tempo impiegato nella diſceſa IG ſi foſſe moſſa con la velocità coſtante v, avrebbe camminato per uno ſpazio doppio di GI, ed in conſeguenza per la doppia GI poſſiamo determinare la velocità v; atteſo che ne' moti equabili, che ſi fanno in tempo determinato, le velocità ſi miſurano dagli

ſpa-

ſpazj traſcorſi. Ma l'acqua eſce ſenza dubbio dal vaſo con la velocità v, ovvero 2GI, e la quantità dell'acqua, ch'eſce nel tempo di ſopra eſpreſſo, è in ragion compoſta dell'ampiezza del foro EF, e della velocità, o ſia della doppia GI; dunque la quantità ſcaricata dell'acqua ſarà eguale ad un cilindro, la di cui baſe ſi è il foro EF, e l'altezza eguale all'altezza GI preſa due volte: il che dovea dimoſtrarſi.

Ciò dimoſtrato, s'aprirà la ſtrada all'intelligenza della fraſe Nevvtoniana nello ſteſſo Corollario ſecondo *Et vis, qua totus aquæ exilientis motus generari poteſt*, ec. Sotto il nome di forza, che genera un qualche moto, ſecondo il coſtume del noſtro Autore, altro non s'intende, ſe non la forza ſollecitante. Ora poſto il tempo coſtante, la forza è ſempre come la quantità del moto, vale a dire, come la maſſa moltiplicata con la velocità, e ſtabilita anche la velocità coſtante, la forza ſarà ſempre come la maſſa. Si ricavano queſti Teoremi dalla notiſſima formula $ft = mu$, in cui f è una forza ſollecitante, che ſi ſuppone agire uniformemente accelerando il mobile, t ſignifica il tempo, m la maſſa, ed v la velocità. Nel caſo del Sig. Nevvton il tempo ſi determina eguale a quello, che s'impiegherebbe nella diſceſa dall'altezza IG, e può eſprimerſi per la doppia IG, che dinota pure la velocità, con cui l'acqua eſce dal foro, conſervato il fluido nel vaſo alla medeſima altezza IG; dunque la forza generante il moto ſi trova uguale alla maſſa dell'acqua, ch'eſce dal foro nel tempo ſopra determinato: ma queſta maſſa per le coſe dette è uguale ad un cilindro acqueo di baſe EF, e d'altezza 2GI; dunque la forza ſollecitante ſarà uguale al predetto cilindro: il che ec.

S'io voleſſi poi determinare la quantità dello ſcarico, avuto rifleſſo alla contrazione della vena, ed a qualche altra circoſtanza, e maſſime alla diverſa ampiezza de'fori, ed alla varia denſità, con cui li fluidi eſcono da vaſi; ſarebbe d'uopo eſaminare da capo a fondo la citata Propoſizione Nevvtoniana.

Riſpoſta del Sig. Pierantonio Michelotti all' Autore.

Venezia 1. Novembre 1721.

Io aveva ſtabilito di aſpettare la riſpoſta o del Sig. Cav. Nevvtono da me molto ſtimato, o del celebre Sig. Giovanni Keill di Londra prima di riſpondere a V.S. Illuſtriſs. ſopra le coſe, che mi fece avanzare nella carta conſegnatami benignamente da ſua parte dall' Illuſtriſs. Sig. Rizzetti mio riverito Padrone; e la cagione di queſta mia meditata dilazione naſceva dalla curioſità, ch'io aveva di vedere, ſe le coſe, che avrebbero potuto riſpondere li due nominati Geometri, foſſero ſtate le medeſime, che quelle, le quali ingegnoſamente ſeppe ritrovare V.S. Illuſtriſs. Ma prevedendo ora, che il tempo diverrebbe forſe lunghiſſimo, a cagione che in Inghilterra non ſono ancora arri-

vati gli eſemplari della mia Opera colà ſpediti, riſolvo di non tardare d'avanzo a comunicare a Lei tutte quelle ragioni, che mi anno moſſo a credere falſo il conſaputo corollario ſecondo della Propoſizione 36. del libro ſecondo de' Principj Nevvtoniani, ed eſporle in oltre il mio ſentimento intorno al ragionamento ſtimatiſſimo di V. S. Illuſtriſs. col quale ſi è sforzata di moſtrare vero quello ſteſſo corollario dopo aver fatta (come dice) più poſata rifleſſione ſopra il punto controverſo. Certamente la forza generante il moto dell'acqua uſcente per il foro EF altra non può eſſere che quella, la quale proviene dalla preſſione dell'acqua imminente allo ſteſſo foro EF, cioè dal peſo di queſta medeſima acqua: queſto peſo poi al peſo di tutto il licorè contenuto nel vaſo ha quella proporzione, che è fra il cilindro di baſe EF, e di altezza GI, ed il cilindro, la di cui baſe è il circolo CD nella figura dell'Ingegnoſiſs. Sig. Nevvtono, e l'altezza CK uguale a GI. Di queſta coſa parmi, che niuno de' Geometri poſſa dubitare. Immaginiamoci primieramente, che il buco EF ſia chiuſo, ſicchè tutto il fondo del vaſo ſia una baſe continua: dimando ſe il fondo CD ſia premuto da altra coſa, che dal peſo della colonna d'acqua KCDL: certo no. Ma le leggi idroſtatiche c'inſegnano, che ciaſcuna parte EF del fondo CD partecipa di codeſta preſſione totale a miſura della ſua ampiezza, e la preſſione totale, che ſoffre la baſe CD, conſiſte nello sforzo, che fa per ſcendere il peſo di tutta la colonna KCDL, e queſto peſo ſta al peſo della colonnetta, che ha per baſe il cerchiello EF, per altezza la GI, come l'ampiezza del cerchio CD all'ampiezza dello ſteſſo cerchiello EF; dunque la parte EF del fondo CD è premuta da una forza eguale ad un cilindro fluido, la di cui baſe è il cerchiello EF, l'altezza la ſemplice, e non la doppia GI. Se poi ſi apre il foro EF, l'acqua uſcirà ſubito certiſſimamente: ma qual' è la cagione dell'uſcita? Senza dubbio la preſſione, della quale ora parlava. Imperochè ſe l'acqua non foſſe premuta, non uſcirebbe per il peringio più volte menzionato. Ora quella preſſione (come ho dimoſtrato) è uguale al ſemplice peſo del cilindro acqueo, la cui baſe è il cerchiello EF, e l'altezza la linea GI. Per certo io non vedo, che altra forza poſſa aſſegnare l'Illuſtre Signor Nevvtono diverſa da quella, che deeſi al peſo di tutta la colonna imminente a piombo al buco EF; particolarmente perchè a carte 330. della ſua dottiſſima Opera di prima edizione così ſcriſſe. *Unde conſequens eſt, quod motus aquæ totius effluentis is erit, quem pondus aquæ foramini perpendiculariter incumbentis generare poteſt.* Forſe la dottrina del corollario in controverſia, che fin ora ho provata falſa, cavò il Sig. Nevvtono da una falſiſſima concluſione a Lei già nota. Perciocchè dopo aver Egli falſamente contro la ſperienza conchiuſo, che l'acqua uſcente per il buco EF voltandoſi in ſu potrebbe aſcendere alla metà dell'altezza A, ſoggiunſe le coſe ſeguenti (a). *Et propterea quantitas aquæ effluentis quo tempore corpus cadendo deſcribere po-*

(a) *Veda la prima edizione a carte* 331.

poteſt altitudinem $\frac{1}{2}$ *A, æqualis erit columnæ aquæ totius AF foramini per-*
pendiculariter imminentis. Dal che ne ſiegue, che nel tempo, che il grave ſcenderebbe per tutta l'altezza A, ovvero IG nella figura della ſeconda edizione, uſcirebbe dal vaſo per il pertugio EF tanta quantità d'acqua, che riempirebbe un cilindro, la di cui baſe foſſe il cerchiello EF del foro, l'altezza uguale alla doppia GI, o CK. Comunque ſi ſia la coſa, il corollario, del quale parliamo, concepito come io l'intendo, al certo non può eſſere vero. Che ſe l'incomparabile Sig. Nevvtono voleſſe intendere per forza generante tutto il moto dell'acqua uſcente, non quella che proviene, o ch'è nel peſo dell'acqua ſopraſtante al pertugio EF, ma quella che produce l'accelerazione nelle goccie dell'acqua medeſima, e che chiamaſi acceleratrice, come la forza della gravità (il che pare interpretri V.S. Illuſtriſs.) allora malamente comparirebbe una tal forza, per la quale ciaſcuna goccia acquea viene accelerata ad una certa velocità, con qualche peſo. Poichè fra di loro non ſono più comparabili che la linea, e la ſuperficie. Dovrebbe più toſto una forza di codeſta ſorta eſſere paragonata con un'altra forza acceleratrice, che con il peſo, il quale naſce dalla forza eſercitata nella maſſa. Per eſempio dovrebbe compararſi con la forza della gravità ordinaria, con la quale eſſa ha tal proporzione, che con la linea finita la linea infinita; come potrei dimoſtrare faciliſſimamente col mezzo di quelle coſe, che il Sig. Gio Bernoulli facilmente Prencipe (non meno che il Sig. Nevvtono) de' Geometri dell'età noſtra produſſe negli Atti degli Eruditi pubblicati a Lipſia, dove addusſe la ragione, per la quale ſi deve conſiderare l'infima goccia d'acqua vicina al pertugio fatto nel fondo del vaſo come animata da una forza acceleratrice, fra la quale, e la forza della gravità naturale vi ſia quella proporzione, che tengono tra loro l'altezza di tutta l'acqua, e l'altezza della goccia acquoſa, che ſta per uſcire dal vaſo, e che dallo ſteſſo Sig. Bernoulli fu conſiderata come una colonnetta d'altezza infinitamente picciola, come altra volta riſpoſi a V.S. Illuſtriſs., quando voleva impugnare la dimoſtrazione Bernoulliana. Ma perchè la di Lei mente inſigne conoſca con maggiore evidenza quanto ſia aſſurdo un ſimile paragone; aggiungo ciò che ſiegue, e nel medeſimo tempo riſpondo al ragionamento ſottiliſſimo, che ſi degnò farmi preſentare dall'Illuſtriſs. Sig. Rizzetti, che riveriſco con ogni eſtimazione, e ringrazio per l'onore, che mi ha fatto, di provederſi di un eſemplare della mia Opera. Ella rappreſenta, ed in vero beniſſimo, la velocità dell'acqua uſcente dal vaſo per la doppia GI, e dimoſtra pure nobilmente eſſere la quantità dell'acqua uſcita nel tempo, che la goccia d'acqua cominciando il moto dalla quiete nel punto I, percorre lo ſpazio GI, uguale ad un cilindro, la di cui baſe è il cerchiello EF del buco, l'altezza uguale alla doppia GI, o CK. Poi ſoggiugne: per forza, che genera un qualche moto, altro non intende il Sig. Nevvtono, che la forza affrettante; la quale poſti sì il tempo, che la velocità coſtanti, è come la maſſa: indi eſprimendo

do nel caſo del Sig. Nevvtono tanto il tempo, quanto la velocità per la doppia GI, e rappreſentando la maſſa dell'acqua per il cilindro di baſe EF, e di altezza 2GI, conchiude eſſere la forza, che ſi ricerca per generare tutto il moto dell' acqua uſcente, uguale a quel medeſimo cilindro, che ha per baſe il cerchiello EF, per altezza la doppia GI. Ma io con queſto ſuo medeſimo ragionamento potrei dimoſtrare, che la forza ricercata per generare tutto il moto dell' acqua, ch' eſce del vaſo, è uguale non ſolamente al doppio peſo della colonna acquea, ma anche al quadruplo, al ſeſtuplo, all'ottuplo ec. di quella medeſima colonna d' acqua: il che Ella ben vede quanto ſia aſſurdo; perche una coſa, che in ſe ſteſſa è invariabile, e determinata, ſarebbe variabile, ed incoſtante. Potrei per eſempio dimoſtrare, che la forza, della quale più volte ho fatta menzione, è uguale ad una colonna d' acqua, che ſi fa moltiplicando il cerchiello del foro EF per la quadrupla di GI. Concepiſca V. S. Illuſtriſs. nella figura del Sig. Nevvtono la GI prolungata in ſu fino al punto Z, di modo che CZ ſia = 4GI, e s' immagini, che il Sig. Nevvtono abbia poſto il tempo uguale a quello, che impiegherebbe la goccia d' acqua nel caſcare dal punto Z di quiete per l'altezza GZ. Ciò premeſſo, così ragiono alla di Lei maniera. Per forza producente un qualche moto altro non intende il Sig. Nevvtono, che la forza ſollecitante al moto, la quale poſto il tempo coſtante è come la maſſa moltiplicata per la velocità. Nel caſo del Sig. Nevvtono ora ſuppoſto il tempo, che dura l'uſcita dell'acqua, ſi pone uguale, o ſi rappreſenta per 4GI, la velocità, con la quale eſce l'acqua per il foro EF, ſi pone anche ſempre coſtante, cioè come 2GI; dunque poichè sì il tempo, che la velocità ſi pongono immutabili, la forza generante tutto il moto dell'acqua ſarà uguale alla maſſa d' acqua, ch'eſce in quel medeſimo tempo, la quale maſſa, per eſſere il mio tempo doppio di quello pone V. S. Illuſtriſs., ſarà anche doppia della maſſa d'acqua, che uſcirebbe nel tempo da Lei rappreſentato per 2GI; e per conſeguenza ſarà la forza generante tutto il moto dell'acqua uſcente uguale al quadruplo peſo d' un cilindro acqueo, che ha per baſe il cerchiello EF del buco, per altezza la GI. Il che io doveva provare. In ſimil modo, aſſunta la GZ = n . 2GI (n rappreſenta qualſivoglia numero) dimoſtrerò, che la forza ora menzionata è uguale a un cilindro acqueo, che ha per baſe il cerchiello EF, per altezza la linea 2GI moltiplicata per n, cioè uguale a qualſivoglia peſo. Io non dubito punto, ch' Ella eſaminate le coſe fin quì da me eſpoſte con il ſuo acutiſſimo ingegno da me tanto ſtimato, ſia per riconoſcere falſa la dottrina dell'inſigne Geometra Sig. Nevvtono contenuta nel ſecondo Corollario della propoſizione 36. del ſecondo libro degli ſuoi Principj Matematici di Filoſofia naturale da me per altro conſideratiſſimi.

Del reſto la prego conſervarmi la di Lei conſideratiſſima grazia, ed aſſicurarſi, ch'io ho una ſomma eſtimazione per il ſuo raro talento.

Con-

Contrarriſpoſta dell' Autore al Sig. Pierantonio Michelotti.

Da qualche tempo io ſono debitore a V. S. Illuſtriſs. della riſpoſta ad una ſua gentiliſſima lettera, ed avrei prima d' ora adempito a miei doveri, ſe varie diſtrazioni non m' aveſſero impedito di prendere nuovamente per mano la materia controverſa, nella quale io bramerei, che la ragione ſteſſe più dal ſuo canto, che dal mio; mentre ha Ella aſſunto con la ſtampa un pubblico ingegno, ed io ho eſpoſto la mia opinione in una privata ſcrittura. Potrei dunque ſenza roſſore confeſſare l'inganno, s'aveſſi ſaputo ſcoprirlo: e per parlare con tutta la ſincerità, quantunque ſia ſtato da Lei detto tutto quello può dirſi in favore della ſua ſentenza; non oſtante ciò parmi, che non reſti in parte alcuna ſnervata la forza della mia prima dimoſtrazione. Abbia la bontà di ſoffrire un altro poco di tedio, per vedere, ſe mi rieſce di collocare in tutto il ſuo lume la verità, che io con buona fede, e ſenza preoccupazione prendo a difendere.

Avanti d'entrare nel fondo della controverſia ſtimo bene il premettere primieramente, che ricevo per bella, e per buona la dimoſtrazione dell' incomparabile Sig. Gio. Bernoulli intorno la velocità, con cui eſcono i fluidi da' vaſi per fori di determinata grandezza; perchè le mie difficoltà cadono ſul modo di dimoſtrare, non ſulla concluſione, che è veriſſima, e già mi ſono propoſto di conſultare queſto illuſtre Geometra ſopra una circoſtanza, che non mi laſcia penetrarne interiormente il midollo. Secondariamente io non aſſumo la difeſa di ciò, che poſſa aver detto il Sig. Nevvton nella prima edizione de' ſuoi Principj alla pag. 331. Mi è noto il ſuo errore, e nello ſteſſo tempo mi è nota la ſua lodevole correzione: anzi non mi prendo nè meno la briga di fare l'apologia di tutto ciò, che produce nella Propoſizione 36. dell'ultima edizione. Quella ſua Cateratta è ſoggetta a varie importantiſſime oppoſizioni, molte delle quali oſſervo da Lei ottimamente ſpiegate nella ſua bell'Opera, ed alcune altre mi ſono venute in mente, che m'ingegnerò di ſpiegare con miglior occaſione. La diſputa verſa ſemplicemente ſul ſecondo Corollario, che da Lei ſi giudica falſo, e da me conforme alla verità.

Vis, qua totus aquæ exilientis motus generari poteſt, æqualis eſt ponderi cylindricæ columnæ aquæ, cujus baſis foramen EF, & altitudo 2GI, cioè a dire, *quo tempore aqua pondere ſuo ab altitudine* GI *cadendo, velocitatem ſuam, qua exilit, acquirere poteſt.* Queſti ſono i proprj termini Nevvtoniani nel Corollario in quiſtione; veggiamo, ſe la dimoſtrazione ſi poſſa formare con i principj, anzi con le ſteſſe parole tolte ad impreſtito da V. S. Illuſtriſs, e adattate ſolamente alla mia figura.

Vis pellens eſt, ut effectus ipſius, hoc eſt ut quantitas motus, qui ab ipſa dato tempore generatur: eſt autem quantitas motus dato tempore generata in ratione compoſita fluidi dato tempore per orificium EF *effluentis, &*

ve-

velocitatis, cum qua fluidum ipſum ex dicto orificio erumpit. Ella già riconoſce per ſua sì fatta eſpreſſione, eſſendo levata di peſo dal ſuo libro pag.78. Aggiungaſi la ſeconda preſa dalla pag.177. *atqui eodem tempore grave percurrere poteſt motu uniformi ſpatium* 2GI *ea cum velocitate, quam ex caſu per altitudinem* IG *acquirit*. Dunque ella ne cavi le conſeguenze, che certamente non ſaranno diverſe da quelle, ch'io anderò deducendo; dunque la forza, che caccia l'acqua fuori del vaſo KD per il foro EF in tempo dato, e come ſopra determinato, non potrà eſprimerſi, fuorchè per la quantità del moto in detto tempo generata. *Vis pellens eſt ut effectus ipſius, hoc eſt, ut quantitas motus, qui ab ipſa dato tempore generatur*, cioè per la mole dell'acqua, ch'eſce nel tempo medeſimo moltiplicata nella ſua velocità: *eſt autem quantitas motus dato tempore generata in ratione compoſita fluidi dato tempore per orificium* EF *effluentis, & velocitatis, cum quam fluidum ipſum ex dicto orificio erumpit:* o pure nel noſtro caſo per la ſola mole dell'acqua, che nel tempo aſſegnato ſi ſcarica; atteſo che la velocità dello ſfogo è ſempre coſtante: ma la quantità dell'acqua, ch'eſce nell'accennato tempo, è tanta nè più nè meno, ch'empirebbe il doppio cilindro, la cui baſe è il foro EF, e l'altezza IG, *atqui eodem tempore grave percurrere poteſt motu uniformi ſpatium* 2GI, *ea cum velocitate, quam ex caſu per altitudinem* IG *acquirit;* dunque la forza predetta altrimenti non può eſprimerſi, che per la quantità d'acqua contenuta nel doppio cilindro ſoprannominato, o per il ſuo peſo; il che dovea dimoſtrarſi.

Eſaminata per tutti i verſi l'addotta dimoſtrazione, non ci ho ſaputo vedere nè pure un'ombra di paralogiſmo, e ciò ſpiccherà maggiormente dalla riſpoſta, ch'io ſono per dare alle ſue obbiezioni; ſuppoſto però, che ſeguitando le ſue veſtigia ſi preſcinda dalle reſiſtenze, dalla contrazione della vena indicata dal Sig. Newton, e confermata dal Sig. Marcheſe Poleni con replicate ſperienze, ed in oltre da qualche altra circoſtanza ſinora da Matematici non avvertita, e che ſi conſidererà in altro tempo.

La prima è di maggior peſo; mentre per quanto vedo non ſolo dalla ſua lettera, ma anche da ciò, che dice alla pag.112. del ſuo libro, è quella, ſu cui principalmente ſi fonda, ed è come la radice dell'equivocazione. *Immaginiamoci*, ſono ſue parole, *che il buco* EF *ſia chiuſo; ſicchè tutto il fondo del vaſo ſia una baſe continua: dimando, ſe il fondo* CD *ſia premuto da altra coſa, che dal peſo della colonna* KCDL: *certo no. Ma le leggi Idroſtatiche c'inſegnano, che ciaſcheduna parte* EF *del fondo partecipa di coteſta preſſione totale a miſura della ſua ampiezza, e la preſſione totale, che ſoffre la baſe* CD, *conſiſte nello ſforzo, che fa per ſcendere il peſo di tutta la colonna* KCDL, *e queſto peſo ſta al peſo della colonnetta, che ha per baſe il cerchiello* EF, *e per altezza la* GI, *come l'ampiezza del cerchio* CD *all'ampiezza dello ſteſſo cerchiello* EF; *dunque la parte* EF *del fondo* CB *è premuta da una forza eguale ad un cilindro fluido, la di cui baſe è il cerchiello* EF, *e l'altezza la ſemplice, e non la doppia* GI.

Sin

Sin quì ottimamente: ma quand' Ella fa un ſalto dallo ſtato di quiete a quello di moto, e ſoggiunge. *Se poi s' apre il foro, l' acqua uſcirà ſubito certiſſimamente: ma quale è la cagione dell' uſcita? ſenza dubbio la preſſione, della quale ora parlava; imperocchè ſe l' acqua non foſſe premuta, non uſcirebbe ec.* Senz'alcun fallo, ſe io non prendo inganno, ella incorre in un manifeſto paralogiſmo: e la ragione ſi è; perchè ſe nel tempo determinato come ſopra, ch'io per brevità chiamerò *t*, cioè in quel tempo, che ſpenderebbe un grave cadendo dall'altezza IG, non uſciſſe altra acqua, che quella contenuta nel cilindro, la di cui baſe è il cerchio EF, e l'altezza GI, avrebbe V. S. Illuſtriſs. tutte le ragioni del mondo. Il punto ſta, che in detto tempo eſce una dopia quantità d'acqua, e ſu queſto particolare ſiamo d'accordo; dunque ſe per la ſua dottrina la preſſione del fluido contenuto nel cilindro ultimamente nominato è quella, che mette in moto la mole d'acqua, che riempie lo ſteſſo cilindro; per mettere in moto due volte tanta, ci vorrà una doppia preſſione. Ed in fatti la coſa ſta pur così; giacchè per fare, che per il foro EF ſi ſcarichi nel tempo *t* una doppia quantità d'acqua di quella, che occupava in iſtato di quiete lo ſpazio EF. GI, è neceſſario, che l' acqua ci confluiſca dalle parti laterali, ed entrando nel filone accreſca la quantità dello ſcarico ſino al doppio. Ora queſt'acqua è ſpinta da qualche forza, cioè dalla preſſione laterale della reſtante acqua contenuta nel vaſo KD ſotto la coſtante altezza GI, e così chi vorrà tener conto di queſta forza laterale, che fa un effetto pari a quello cagionato dalla perpendicolare, biſognerà dire, che unite inſieme non altrimenti poſſano eſprimerſi, che per l'effetto da eſſe prodotto, cioè per la quantità dell'acqua, che cacciano fuori del vaſo nel dato tempo *t*, o ſia per il peſo del fluido EF. GI moltiplicato nel binario.

Dimando, nel tempo *t* quant'acqua eſce per il foro EF? Ella mi riſponderà certamente il doppio di quella, che occupava lo ſpazio EF. GI. Nel tempo ſteſſo quant' acqua ſi dee infondere per le parti ſuperiori, acciò il fluſſo ſi conſervi in iſtato manente, e non s'alzi, o ſi deprima il livello KL? replicherà Ella altrettanta, ed io ripiglierò tutta l'acqua, che ſucceſſivamente nell'accennato tempo s'aggiunge, forſe non preme, forſe non è quella, che ſerve a mantenere il corſo perenne? certo che sì. La forza generante queſto moto non è ella proporzionale alla quantità d'acqua, che nel tempo ſteſſo per le parti ſuperiori viene equabilmente ſomminiſtrata? chi ne dubita? dunque conchiuderò: la predetta forza neceſſariamente s'eſprime per la copia d'acqua, ch'eſce al di ſotto, per quella, che s'infonde al di ſopra, vale a dire, per una quantità doppia di quella, che ſi contiene nel cilindro, che ha per baſe il cerchietto EF, e per altezza la linea GI.

Io non mi ſo perſuadere, che V. S. Illuſtriſs. ſia per negarmi, che l'acqua laterale, cioè quella, che non ſovraſta a piombo al foro EF, reſti obbligata dalla preſſione obbliqua ad entrare nella vena, e ad aumentare la quantità dello ſfogo; mentre queſta è la ſua ſteſſa dottrina regiſtrata alla pag. 127. *Cum nulla ſit ſoliditas in parietibus* AME, BNF

(applico le ſue parole alla mia figura) *non video quid citra miraculum obſtet, quin aquæ in partibus S ſeſe commiſceat cum aqua delabente per cataractam*, dirò io, *per cilindrum* EF. GI. Alla pag. 128. oſſervo una bella ſperienza da Lei recata in prova del detto. *Tingantur nimirum partes quædam aquæ circa S immiſſo illuc aliquo colore, mox obſervabitur tincturam brevi communicatum iri cum aqua in ſpatio* AMEFNB *contenta.*

Per procedere più rigoroſamente, prendo un pezzo di ghiaccio eguale preciſamente in peſo a tanta mole d'acqua, quanta potrebbe capire due volte nello ſpazio cilindrico EF. GI, e chiamo la ſua maſſa *m*. Faccio, che queſto ghiaccio cadendo dal punto di quiete I ſcorra con moto accelerato la linea IG, giunto che ſia al ſito G abbia acquiſtata la velocità *u*, e vi abbia impiegato il tempo *t*; la ſua quantità di moto ſarà $=mu$, ch'è il prodotto della ſua maſſa, e della ſua velocità: ma nel medeſimo tempo *t* ſi sfoga per il foro EF una quantità d'acqua eguale all'accennato ſolido di ghiaccio, e tutta eſce con la velocità *u*; dunque per l'una, e per l'altra parte ſi faranno in tempo egual generate due quantità di moto eguali con queſta ſola differenza, che nel primo caſo ſta coſtante la maſſa, e variabile la velocità; nel ſecondo è variabile la maſſa, e la velocità coſtante.

Una ſola iſtanza potrebb'Ella farmi, che foſſe di qualche conſiderazione, e ſarebbe, per qual motivo il Sig. Newton abbia fiſſato per coſtante il tempo *t*, cioè quello, ch'impiegherebbe un grave a diſcendere per lo ſpazio IG, piuttoſto che qualſivoglia altro tempo maggiore, o minore, come per eſempio *nt*, nel qual caſo verrebbe ad alterarſi l'eſpreſſione della forza, che ſpinge l'acqua fuori del vaſo. Per ſoddisfarla anche ſu queſto punto, rifletto, che ſiccome la gravità, che accelera il ghiaccio, di cui abbiamo fatta menzione, cadente nel vuoto, ſecondo la Teorica del Galileo opera ſempre uniformemente, ed in tempi eguali va generando nel predetto mobile gradi di velocità eguali, ſtando coſtante la maſſa; così la forza eſpellente l'acqua fuori del vaſo agiſce anch'eſſa uniformemente, ed in tempi eguali mette in moto quantità d'acqua eguali, ſtando coſtante l'altezza dell'acqua, e conſeguentemente la velocità.

Nel primo caſo avremo l'equazione differenziale $fdt=mdu$, e nel ſecondo $FdT=UdM$, le quali ſommate ci danno $ft=mu$, $FT=UM$: ma nella prima la forza ſollecitante *f* ſi miſura dalla maſſa ſollecitata *m*, onde $f=m$; dunque $t=u$. Nella ſeconda poi la forza F, che per quello s'è detto, opera in ogni iſtante uniformemente, non può mai farſi eguale alla maſſa variabile M, fuori che nell'unico caſo, che ſia $T=U$, vale a dire che il tempo, e la velocità ſieno eguali. Ora la velocità U è coſtante, uſcendo l'acqua ſoſtentata nel vaſo all'altezza coſtante IG per il foro EF con un grado determinato, ed inalterabile di velocità; dunque reſta fiſſato anche il tempo T: ma per acquiſtare la velocità U dovrebbe il ghiaccio ſcendere per lo ſpazio IG, ed impiegare nella caduta il tempo T; dunque nella formula $ft=mu$, poſta $u=U$, ſarà $t=T$, cioè a dire $T=U$, ed in conſeguenza nella ſeconda formula $FT=UM$, $F=M$.

Si

Si vede per tanto la ragione, che ci obbliga a prendere come costante il solo tempo t fra gl' infiniti tempi possibili: ed in fatti tutte le circostanze cospirano a rendere necessaria l'elezione; imperocchè in tal caso la velocità, con cui l'acqua si sfoga, è uguale al tempo, che ci avrebbe speso il ghiaccio naturalmente cadente per acquistarla, e siccome avrebbe esso nel detto tempo scorso lo spazio IG; così l'acqua dee sostentarsi nel vaso alla medesima altezza, e finalmente in questa unica supposizione la forza è uguale alla quantità del moto, e per essere costante la velocità, la forza stessa è uguale alla quantità dell'acqua, che nell'assegnato tempo si scarica.

Rispondendo in tanto ad un'altra obbiezione, facciasi com'Ella comanda, e si cerchi la forza, che opera in ogni momento di tempo per espeller l'acqua dal vaso. Stante l'equazione differenziale $FdT = Ud\mathrm{M}$, avremo il valore della forza $F = \frac{Ud\mathrm{M}}{dT}$. Pongasi $dT = nT$, e per n si esprima una quantità infinitamente piccola; e perchè la quantità del fluido scaricato è sempre proporzionale al tempo dello scarico, sarà $T : \mathrm{M} :: dT = nT : n\mathrm{M} = d\mathrm{M}$. Sostituiti questi valori, avrassi la forza $F = \frac{Un\mathrm{M}}{nT} = \frac{U\mathrm{M}}{T}$: ma per le cose dimostrate $U = T$; dunque $F = \mathrm{M}$: il che ec.

La forza dunque sollecitante in qualsivoglia istante l'uscita dell'acqua, s'esprime ottimamente per la massa dell'acqua stessa, che capisce nel doppio cilindro EF. GI. Passiamo ora a considerare ciò, che nasce dalla sua ipotesi. Secondo Lei dobbiamo rappresentare questa forza F per l'acqua contenuta nel cilindro EF. GI, cioè per la metà di quella, che si sfoga nell'assegnato tempo T; dunque $F = \frac{\mathrm{M}}{2}$, ed in conseguenza $\frac{\mathrm{M}d\mathrm{T}}{2} = Ud\mathrm{M}$, o pure $\frac{\mathrm{M}n\mathrm{T}}{2} = Un\mathrm{M}$: ma $U = T$; dunque $\frac{\mathrm{M}}{2} = \mathrm{M}$, il che è assurdo.

Ripigliſi l'espressione $FnT = Un\mathrm{M}$, e l' infinitesima n vada crescendo fino a diventare una grandezza finita uguale all'unità: in tale ipotesi, ch'è quella considerata dal Sig. Nevvton, avremo $FT = U\mathrm{M}$: ma $T = U$ (stante che il tempo speso da un grave nello scorrere lo spazio IG, come più volte s'è detto, è uguale alla velocità acquistata nel fine di esso tempo); dunque $F = \mathrm{M}$, cioè la forza eguale alla mole dell'acqua, che in detto tempo si scarica.

Che se poi alterato ad arbitrio il tempo dello sfogo, si considera la forza, o per parlare più giusto la somma delle forze espellenti l'acqua fuori del vaso; s'esprimeranno queste per la massa dell'acqua M

moltiplicata nel tempo *n*T, o ch'è lo ſteſſo, per l'acqua, ch'eſce nel tempo aſſegnato, cioè a dire per *n*M, o per la quantità del moto *n*MU: nè io ſo comprendere, che aſſurdo ſe ne poſſa dedurre, e ſvaniſce il preteſo inconveniente, per cui Ella penſava, che la predetta forza poteſſe rappreſentarſi per una quantità d'acqua non ſolo doppia, ma multipla in qualſivoglia modo di quella, che ſi contiene nel cilindro EF. GI. Che meraviglia è, che a generare una maggiore, o minore quantità di moto ci voglia più, o meno forza, e che la ſteſſa forza coſtante F eſpreſſa ottimamente, come s'è dimoſtrato, per la maſſa M produca più, o meno quantità di moto, quando ſia obbligata ad agire per un tempo più lungo, o più breve?

Ma queſta difficoltà preme ugualmente il Sig. Nevvton, e V. S. Illuſtriſs. La forza che ſpinge l'acqua fuori del vaſo nel tempo T tante volte ricordato, e che dal Sig. Nevvton reſta eſpreſſa col peſo del doppio cilindro acqueo EF. GI, da Lei viene eſpoſta col detto ſemplice cilindro Si legge alla pag. 112. *Evidens eſt, vim illam, per quam fluidum ex orificio alicujus canalis effluens certam velocitatem acquirit, eam nempe, quam grave acquireret ex altitudine IG dilapſum, eſſe æqualem ponderi cylindri ejuſdem fluidi, cujus baſis æqualis eſt orificio, per quod fluidum egreditur, altitudo vero æqualis ipſi ſimplæ IG, non autem duplæ, quemadmodum exiſtimat Clariſs. Keillius nimis fidenter eminentem Geometram Is. Nevvtonum ſequutus.*

Ora dirò io, aumentando, o ſminuendo il tempo T, ſtarà ſalda queſta forza da Lei eſpoſta per il cilindro acqueo EF. GI? certamente no; altrimenti ne ſeguirebbe, che prendendo io due tempi uno infinitamente breve, e l'altro infinitamente lungo, onde nel primo uſciſſe una minima, e nel ſecondo una maſſima copia di fluido, la forza, o la ſomma delle forze, che genera una quantità di moto infinita, non ſarebbe maggiore di quella, che ne genera una infiniteſima: il che è veramente aſſurdo, nè credo, che poſſa mai eſſere da Lei adottato.

Le parole citate ſervono a togliere di mezzo un'altra ſua obbiezione. Ella accuſa il Sig. Nevvton, che paragoni una forza acceleratrice, o per meglio eſprimermi, e per levar di mezzo ogni ambiguità, un aggregato di forze acceleranti, prementi, eſpellenti, o che ſo io, con un qualche peſo; poichè tra di loro non ſono più comparabili, che la linea con la ſuperficie. Riſpondo in due parole, che in tali eſpreſſioni non ſi guarda un vero paragone d'uguaglianza, ma un paragone di rapporto, o di relazione, in quanto l'una, e l'altra grandezza, ſebbene di diverſo genere, ſi può, e ſi debbe eſprimere per lo ſteſſo ſegno, cioè a dire, o per la ſteſſa ſpezie analitica, o per la ſteſſa quantità geometrica. E' forſe nuova ne' Geometri queſta licenza? ma come nuova, ſe nelle parole addotte di ſopra Ella ſteſſa ſe ne vale? La ſteſſa forza dal Nevvton vien paragonata al peſo del doppio cilindro acqueo EF. GI, e da Lei al peſo del ſimplo. Sin quì la coſa cammina del pari. Tutta la difficoltà conſiſte in vedere qual paragone ſia più giuſto, e ſopra di ciò parmi aver detto quanto baſta in difeſa della ſentenza Nevvtoniana.

Re-

Reſta, che V.S. Illuſtriſſima prenda in buona parte la libertà, ch' io mi arrogo per ſemplice amore della verità, e raſſegnandole i miei riſpetti inalterabilmente mi proteſto.

Ad Illuſtriſſimum, & doctiſſimum Com. Riccatum

Daniel Bernoullius.

14. Febbruarij 1724.

Semper mihi paradoxum fuit coroll. 2. prop. 36. l. 2. princip. phil. Cel. Newt. edit. poſt. atque viſum jure ab Cl. Michelotto impugnatum. Avide proin perlegi litteras Ill. C. Riccati ad Cl. Michelottum datas, & mecum ante 15. circiter dies communicatas, in quibus ſe demonſtrationem prædicti Coroll. dediſſe mihi dixerat; ſed, quod inſignis illius Mathematici pace dixerim, multa in demonſtratione ipſius excipienda inter legendum occurrerunt. Certiorem autem velim Virum laudatum non contradicendi pruritu, ſed ſolo veritatis amore agitatum hæc a me ſcribi. Reperiet me Vir acutiſſimus (cujus ſublimem in omni ſcientiarum genere cum primis vero in ſtudiis Mathematicis doctrinam ſemper & agnovi, & admiratus ſim) proclivioremad ſententiam ſuam complectendam, quam ad meam mordaciter defendendam. Verba Corollarii ita ſonant: *Vis, qua totus aquæ exilientis motus generari poteſt, æqualis eſt ponderi cylindricæ columnæ aqueæ, cujus baſis eſt foramen EF* (Fig. 138.), *& altitudo 2GI, vel 2CK*. Manifeſtum eſt, quod foramine EF digito clauſo, digitus tantam preſſionem ſit percepturus, quanta eſt columnæ aqueæ, cuius baſis foramen EF, & altitudo ſimplex GI: digito autem remoto, eſſe guttulam foramini adſtantem, quæ hanc preſſionem recipiat, mihi quidem clarum eſt, nullum diſcrimen eſſentiale inter ſtatus quietis, & motus videnti; id quod manifeſtius fiet, ſi fluidum non vi gravitatis ſuæ, qua illud carere ſupponam, ſed elaſticitate ſollicitatum ex vaſe ſuperius clauſo per foramen EF exilire intelligatur. Hæc ratio in contrarium multo validior mihi videtur, quam illa Newtoni, qua corollarium ſuum ſtabilire contendit, dicens: *nam aqua exiliens, quo tempore hanc columnam æquat pondere ſuo ab altitudine GI cadendo velocitatem, qua exilit, acquirere poteſt*; huic rationi Cel. Newtonus amplum ratiocinium in 3. Coroll. ſubnectit, quod non ſatis intelligo, cui tamen illud Nobiliſs. Riccati conforme eſſe video. Hujus demonſtratio duobus principiis innititur 1°. *quod vis, qua aqua ad exiliendum urgetur, ſit æqualis maſſæ, quæ effluxit uniformi velocitate intra tempus conſtans, quod æquale ponit tempori, quo gutta per altitudinem IG cadit*. Hic demonſtrandum fuiſſet, tempus conſtans æquale ponendum eſſe tempori definito. Hæc ſuppoſitio mihi precaria videtur, nec patet cur non tempus illud conſtans eadem ratione cuicumque alio tempori æquale poni queat. Ad hoc reſpondebit forſan Doctiſs. Riccatus, *aqua*

ea

ea exilit velocitate, quam grave cadens ex altitudine IG acquirit, adeoque pro tempore conſtante ſumendum eſt illud, quod grave lapſu per eandem altitudinem IG impendit. Sed oſtendat, cur non eadem ratione quis dicere poſſet, *aqua ea exilit velocitate, quam grave cadens ex altitudine IG acquirit, adeoque pro tempore conſtante ſumendum eſt illud, quod grave lapſu per duplicem* v. g. *altitudinem IG impendit.*

Secundum Doctiſs. Riccati principium eſt, *quod eo tempore, quo grave per altitudinem IG cadit, exeat aquæ quantitas, quæ contineretur in cylindrulo, cujus baſis eſt foramen EF, & altitudo 2GI.* Sed nec hoc omni exceptione majus eſt; priuſquam vero dubitandi rationem exponam, examinandus venit modus, quo Ill. C. Riccatus illud demonſtrare contendit. Conſtat ex Galilæi demonſtratis grave delapſum ab altitudine IG eam acquirere velocitatem, qua uniformiter currendo tempore, quod lapſu impendit, abſolvere queat ſpatium 2GI: ſed ſimul ſecundum Patris demonſtrata aqua per foramen EF ea exilit velocitate, quam acquireret grave cadendo per altitudinem IG; ergo dicto tempore egredietur uniformi velocitate filum aqueum longitudinis 2IG duplum proin cylindruli aquei, cujus baſis eſt foramen EF, & altitudo GI. Ultima hæc conſequentia non tam manifeſte vera eſt, ac prima fronte videtur. Rationem paulo altius petam. Vas ACDEB (Fig. 139.) aqua repletum tribus foraminibus æqualibus C, D, E, per quæ aqua exilit, perforatum eſt; per foramen C aqua horizontaliter, per foramen D vertiealiter deorſum, & per E verticaliter ſurſum effluit. His poſitis, apparet eandem quantitatem aquæ per quodlibet foramen eſſe effluxuram, ſi nimirum foramina ſint in eodem plano horizontali; etenim aqua per unumquodque foramen æquali vi urgetur; hoc quidem de foraminibus C, & D clarum eſt, minus autem liquet de foramine E, ideo quod aqua in columella ER gravitare videri poſſet in guttam jam jam e foramine E egreſſuram, hancque impedire, ne eadem celeritate effluat, qua aqua fluit per reliqua foramioa C, & D. At ſi attentius res perpenditur, apparet, columellam aqueam ER non impedire, quo minus gutta in E eadem celeritate exiliat, ac per foramen C, vel D, quia guttulæ duæ vicinæ ſemper eadem celeritate aſcendere cenſeri poſſunt, adeo ut guttula præcedens numquam ſubſequenti reſiſtat; hocque experientia confirmatur, conſtat enim jactum ERS parabolam infinite acutam formantem conſtantis permanere altitudinis, id quod non fieret, ſi prima gutta majori quam ſubſequentes velocitate exiliret; patet ergo eandem quantitatem aquæ per quodlibet foramen eſſe effluxuram; quibus prænotatis ulterius obſervo, tempore *t*, (quo ſcilicet grave cadit per altitudinem FC) egredi per foramen E filum ſeu cylindrulum aqueum, cujus baſis eſt foramen E, & altitudo ER=FC; eodemque tempore *t* egredietur per foramen C filum aqueum, cujus longitudo ſit =2FC, atque per foramen D dicto tempore *t* effluet filum aqueum longitudinis 3FC, id patet ex celeritate, qua guttulas ex foraminibus exilire dixi; ergo cum omnia hæc fila aquea inter ſe ſint æqualia, neceſſe eſt ut craſſities ſuas longitudinibus habeant reci-

pro-

proce proportionales, adeoque diametros ſuas habeant in ratione 1, $\sqrt{\frac{1}{2}}$ & $\sqrt{\frac{1}{3}}$. Atque hactenus probavi neceſſitatem filorum aqueorum extenuationis; reſtat extenuatio illa pro majori dictorum confirmatione phyſice explicanda.

Sit filum aquæ *a*R (Fig. 140.) continue verticaliter deſcendentis; intelligatur filum *a*R a tubo in iſtanti exorto, & ab R verſus S fluente redigi in momento in filum parabolicum *a* S ejuſdem cum *a*R capacitatis, ſed longius; quod ſi aqua eſſet infinite fluida, id eſt ſi revera eſſet diviſa in particulas infinite parvas, liquet tunc particulas infiniteſimas 2*b*, 2*c*, 2*d*, 2*e*, &c. a ſe invicem fore diſceſſuras, & hiatus infinite parvos 2*b*2*c*, 2*c*2*d*, 2*d*2*e*, &c. inter ſe relicturas, qui hiatus majores erunt, vel minores pro ratione diſtantiæ puncti S a puncto R. Sed cum aqua non ſit revera in particulas infinite parvas diviſa, fiet ut guttulæ 2*b*, 2*c*, 2*d*, 2*e*, &c. diviſioni reſiſtant, atque unitæ permaneant, contra vero elongentur, hocque modo forment filum continuum AC, ſed tenuiorem quam eſt AB, uti id melius per figuras T, & U exprimitur. Ex hiſce jam Illuſtriſs. C. Riccatus facile videt, quid in ſecundo ſuo principio excipiam, nempe filum cylindricum aquæ ex foramine EF (Fig. 138.) exiliens, etſi longitudinis 2GI, non eſſe propterea duplicis capacitatis cylindruli, cujus baſis eſt foramen EF, & altitudo GI, ſed ipſis intercedere æqualitatem ob reciprocam baſes inter, & craſſities proportionem.

In confirmatione totius ratiocinii experientia indagari poſſet, an ex vaſe ſupra deſcripto per quodlibet foramen æqualis quantitas aquæ effluat, dein an non fila aquea eo tenuiora fiant quo magis ad filum verticaliter deſcendens accedunt. Ultima hæc experientia iam ex parte a Viro Clariſs. Poleni (ni fallor) inſtituta fuit, obſervante filum aqueum horizontaliter ex vaſe effluens ſubito præ foramine attenuari, ubi hic videre eſt (Fig. 141.)

Hæc omnia acutiſſimo Riccati judicio ſubmiſſa ſunto.

Venetiis a. d. 14. Feb. 1724.

Com. Jacobi Riccati ad Doctiſſimum Virum Danielem Bernoullium.

EPISTOLA.

Obſtupui, Eruditiſſime Vir, quod cum tu pro Clariſs. Michelotto arma ſumpſeris, & difficultates illas, quas ipſi communicaveram, diluendas ſuſceperis, in illum non autem in me tela conjeceris. Puto egregium illum Medicum, & Geometram deſeri potius, quam ſic defendi maluiſſe. Ego principia, quibus eſt uſus, ultro, & libenter admiſi, unicam ejus concluſionem tamquam principiis minus cohærentem erroris arguiſſe contentus: tu vero fundamenta ſuccutis, & dum de principiorum certitudine dubitas, totum opus radicitus evertis. Duplici vindicis, & adverſarii munere fungar, & modo contra Michelottum, modo pro me ipſo decertans, me non niſi veritatis cauſam agere demonſtrabo.

In laudato Auctore ſequens pronunciatum invenies pag. 78. *Vis pellens eſt ut effectus ipſius, hoc eſt, ut quantitas motus, qui ab ipſa dato tempore generatur: eſt autem quantitas motus dato tempore generata in ratione compoſita fluidi dato tempore per orificium effluentis, & velocitatis, cum qua fluidum ipſum ex dicto orificio erumpit.*

Adde alterum deſumptum ex pag. 177. *Grave eodem tempore percurrere poteſt ſpatium duplum motu uniformi ea cum velocitate, quam ex caſu per datam altitudinem acquirit.*

Quid ex his ſequatur vides. Quod aqua ea velocitate per foramen exiliat, quam acquirit gutta cadens ſpatium conficiendo æquale altitudini aquæ in vaſe ſuſtentatæ, Theorema Bernoullianum eſt; igitur ſi velocitate acquiſita fertur per id temporis, quod in deſcenſum impendit, duplum dicti ſpatii percurrit, ideoque aſſignato tempore quantitas aquæ pleno oſtio exeuntis dupla eſt ejus quantitatis, quam continet cylindrus orificio circulari ſuperincumbens. Vis itaque eo tempore pellens eſt, ut quantitas motus generata, hoc eſt, ut aqua effluens ſub coſtante velocitate juxta Michelotti principia.

Verum tu vim illationis non infirmas, ſed principia ipſa laceſſis; quæ cum tam Nevvtono, & Michelotto, quam mihi, ſi lubet, communia ſint, me cum Nevvtono conjungis, Michelottum ab utroque ſeparas, nimis fortaſſe de Amico ſollicitus.

Circa quantitatem aquæ fluentis venæ contractionem, & fluidi tenacitatem opponis; ſed hæc Michelottum urgent, apud quem de his altum ubique ſilentium. Ego, dum ipſi morem gererem, non diſſimulavi ejus propoſitionem non niſi quibuſdam limitationibus adhibitis admittendam eſſe. Hæc verba mea ſunt. *Suppoſto però, che ſeguitando le ſue veſtigia, ſi preſcinda dalle reſiſtenze della contrazione della vena...., e da qualche altra circoſtanza ec.* Cur animadverſionem meam tam claris verbis expoſitam in me convertas ignoro.

Quod

Quod ſi ab iſtis circumſtantiis abſtrahére recuſas, mē repugnantem non habebis. Cum vim expellentem aliter metiri non poſſimus, quam per quantitatem motus dato tempore genitam, tunc minuenda erit vis in ea proportione, qua minuitur copia fluidi erumpentis. Experimenta me docuerunt, aquam tempore jam a Nevvtono definito ex vaſe effluentem, ſi conferatur cum ea, quæ implet cavitatem cylindri orificio normaliter inſiſtentis, ſimpla longe majorem eſſe, ad duplam nunquam pertingere; in aliquibus tamen caſibus, quos videre eſt apud Clariſs. Polenum, ita ad duplam accedere, ut differentia parum ſacienda ſit.

Ut primam Michelotti propoſitionem evertas, aſſeris, demonſtrari debuiſſe, tempus conſtans neceſſario æquale ponendum eſſe tempori a Nevvtono definito; nam eadem ratione quodcumque aliud tempus tamquam conſtans deſignari potuiſſe, & præſertim illud, quod grave ex dupla altitudine deſcendit. Huic difficultati in litteris ad Clariſs Micheloitum datis diligenter occurri. Cum nulla exceptione, quæ dicta a me ſunt, elidantur, quid ultra reponam non habeo. Licuit profecto Michelotto loco citato pag. 78. tempus aliquod determinare pro conſtante, ut Theorema ſubiectæ materiæ applicaret; hoc idem mihi, & Nevvtono non licebit? Non ne vides, quod ſi alicujus momenti ſit obiectio, effatum illud, quod vis ſe habeat ut quantitas motus dato tempore genita, inutile ſit, & e manibus Mathematicorum excutitur? Semper enim ex infinitis temporibus, cur unum potius, quam aliud pro conſtante uſurpatum ſit, quærere poſſem, & hac ſubdola interrogatione demonſtrationem quamcumque eludere.

Tranſeo ad aliam majoris ponderis oppoſitionem, quam ſic expo: nis. *Manifeſtum eſt, quod foramine EF* (fig. 138.) *digito clauſo, digitus tantam preſſionem ſit percepturus, quanta eſt columnæ aqueæ, cujus baſis foramen EF, & altitudo ſimplex GI: digito autem remoto, eſſe guttulam foramini adſtantem, quæ hanc preſſionem recipiat, mihi quidem clarum eſt, nullum diſcrimen eſſentiale inter ſtatus quietis, & motus videnti; id quod manifeſtius fiet, ſi fluidum non vi gravitatis ſuæ, qua illud carere ſupponam, ſed elaſticitate ſollicitatum ex vaſe ſuperius clauſo per foramen EF exilire intelligatur.*

Quid de fluidis elaſticis ſentiendum ſit, non eſt hujus loci inquirere: certum eſt, eorum leges toto cælo differre a legibus fluidorum non elaſticorum. Reſpondi jam Clariſs. Michelotto, qui ſententiam ſuam eodem argumento defenderat, ſtatum quietis cum ſtatu motus confundendum non eſſe: in primo ſolam vim verticalem agere, in ſecundo ad majorem effectum producendum vim obliquam, & lateralem cum verticali conjungi; quam obſervationem cum ejus auctoritate, tum ejus experimento pag. 128. munivi. Tu rurſus cum Amico pugnans, dum ejus opinionem tutaris, fidem enervas. Ego aſſertionem meam ita demonſtro.

Tempore a Nevvtono definito ſuprema ſuperficies aquæ foramini imminens uſque ad vaſis fundum deſcendet; ergo ſi nulla eſſet vis lateralis, tota actio eſſet illius quantitatis aquæ, quæ implet columnam

foramini normaliter insistentem; igitur dicto tempore hæc quantitas sola per orificium transiret: sed plus aquæ, docente experientia, dicto tempore erogatur; igitur plus aquæ in motu ponitur, ut per foramen exeat; ergo actioni aquæ verticalis addenda est etiam actio obliqua aquæ lateralis. Q. E. D.

Id pariter evinci posset ex aquæ copia superius dicto tempore infundenda, quæ quantitati aquæ erumpentis æqualis est, ut fluxus in statu manente perseveret: aqua autem super infusa tota agit (nulla enim afferri potest ratio, cur pars sit otiosa, & pars in actione posita) ergo necesse est, ut major copia aquæ agat, quam quæ in dicto cylindro continetur, cujus superficies superior dicto tempore majus spatium conficere nequit, quam sit altitudo aquæ in vase stagnantis.

Utrum autem tu conjecturæ innixus, qua putas, discrimen essentiale non intercedere inter statum quietis, & motus, corollarium Newtonianum pro paradoxo habere debueris, tibi judicandum relinquo, præcipue cum ab Illustr. Anglo contractio venæ observata sit.

Cum te contrariam sententiam propugnare audivissem, existimabam te saltem argumentum prolaturum petitum ex tubis, in quibus cavitas vasis æqualis est aperto foramini. In his vis lateralis, & obliqua locum non invenit. Ab hac difficultate expedire me non potui, nisi experientiam consulendo, quam cum Theoria Newtoniana egregie consspirantem inveni. Sed nimis longum esset totam aquarum effluentium materiam pro dignitate tractare. Hanc spartam adornandam sumpsit summus Vir Bernardinus Zendrinus.

Vbi venæ contractionem explicas, ingenium laudo; in eam enim hypothesim incidisti, quam olim invenit Borellus, & exposuit in libro de motibus a naturali gravitate pendentibus. Hanc enucleandis phænomenis a Poleno observatis sufficientem non existimo. Hoc unum te moneo, filum aqueum non attenuari, ut figuram frusti conici acquirat, quæ sententia tua est, & ex assumpta hypothesi sequitur. Postquam vena seu verticalis, seu horizontalis in parva a foramine distantia ad maximam constrictionem, quam pro circumstantiarum varietate pati potest, reducta est, rursus, eodem Poleno observante, dilatatur, atque dispergitur. Displicet me aliis curis distractum his illustrandis satis ocii suppeditare non posse; quæ raptim, & ex tempore a me scripta sunt, ut humaniter excipias rogo.

Danielis Bernoulli ad Clariſs. Com. Jacobum Riccatum.

EPISTOLA.

Quod Objectiones meas contra demonſtrationem tuam Coroll. Nevvtoniani reſponſione dignari volueris, illud pergratum fuit; nollem autem ſeram diu reciprocare; videtur enim quæſtio talis, ut qui perſuaderi nolit, ſemper ampliſſimum excipiendi campum reperiat. Secunda hac reſponſione tibi, Vir Doctiſſime, moleſtus non fuiſſem, niſi monenda quædam habuiſſem ad Clariſs. Michelottum pertinentia. Scias itaque, me neutiquam arma ſumpſiſſe pro Viro illo Celeberrimo propriæ ſuæ cauſæ defendendæ abunde ſufficienti: nec ille defenſore opus habet, nec ſi habuiſſet, mihi longe inferiori provinciam hanc demandaturus fuiſſet. Non aliud mihi propoſui, quam demonſtrationem tuam dicti Corollarii accuratius perpendere, illud ſolum libertate philoſophica uſus (addere debuiſſem, a te ipſo rogatus) in præcedenti meo ſcripto agere contendi. Nunc autem ulterius dicam, me nondum videre, quanam in re principia a Clariſs. Michelotto adhibita adverſentur iis, quæ a me dicta ſunt.

Ex prineipiis Viri modo laudati ſequitur, quod eo tempore, quo grave cadit ex altitudine FC (Fig. 139.) exeat filum aqueum motu uniformi, & horizontali longitudinis 2FC; & ego hoc concedo; ſed filum iſtud eſſe propterea duplo majus cylindro FC. C, tua eſt conſequentia, de qua dubitandi rationem prolixis verbis expoſui, ad quam nondum mihi reſponſum fuit, niſi allegatione experientiæ, contra quam poſtmodum excipiam.

Certe aut ponendum eſt, ſolam directionem foraminis efficere poſſe, ut eodem tempore, plus minuſvæ aquæ effluat, aut concedendum, conſequentiam tuam falſam eſſe, medium non datur.

(Hoc ut intelligatur ſciendum eſt, me pro majori explicatione fili contractionis conſideraſſe tubum diverſis foraminibus æqualibus, & a ſuprema aquæ ſuperficie æquediſtantibus, ſed diverſe inclinatis, perforatum; per quæ foramina eodem tempore æquales quantitates aquæ fluere, manifeſtum eſt; erunt autem fila aquæ emanantis eo longiora, ac conſequenter eo tenuiora, quo magis accedunt ad lineam verticalem.)

Sed hæc alternativa facili experientia decidetur: ſi poſterius, demonſtrationem tuam erroneo inniti principio ipſe vides: ſi prius, hac quidem in parte procedere poſſe videtur, ſed pro integra ipſius perfectione demonſtrandum eſt, pro tempore conſtanti ſumendum eſſe illud, quod grave lapſu per altitudinem FC impendit; ſufficientem enim rationem in litteris tuis ad Cl. Michelottum datis nondum vidi. Aſſeris, Vir Clariſſime, ipſum Michelottum idem alia occaſione feciſſe; locum reperire non potui, nec adeoque ſcio, an paritas exempli ſit concedenda; ſed hoc poſito, non auctoritatem, rationem peto. Videtur aliam afferi non poſſe,

niſi illam a Nevvtono allatam, *quod dicto tempore grave lapſu ſuo eam acquirit velocitatem, qua aqua exilit*. Hanc vero rationem nullam eſſe ita demonſtro: ponamus Theorema circa velocitatem aquæ effluentis ita fuiſſe enunciatum; *velocitas, qua aqua exilit, æqualis eſt duplæ velocitati, quam grave acquirit cadendo ex altitudine* $\frac{1}{4}$ *FC*. Hic velocitatem aquæ expri-

mendi modus, quamvis minus concinnus, non propterea minus verus fuiſſet; jam vero ipſiſſimis tuis verbis, paucis ſolum mutatis, probabo, preſſionem, qua aqua ad egrediendum ſollicitatur, non eſſe duplam, ſed ſimplam cylindri aquei FC. C. In Nevvtoni caſu tempus ponitur æquale duplici tempori, quod ſuſumeret grave cadendo per altitudinem $\frac{1}{4}$ FC;

velocitas, qua aqua exilit, etiam ponitur ſemper eadem; igitur vis motum aquæ generans æqualis eſt ponderi aquæ, quæ eodem illo tempore exit ex foramine C; ſed moles aquæ dicto illo tempore egreſſæ eſt æqualis cylindro aqueo, cujus baſis foramen C, & altitudo FC (quod facile demonſtratur, poſito nimirum falſam eſſe conjecturam meam de fili contractione) quare etiam vis, quæ totum aquæ exilientis motum generat, æqualis eſt cylindro aqueo, cujus baſis foramen C, & altitudo FC. Q. E. D.

Vides, Vir Doctiſſime, demonſtrationem tuam hactenus nil eſſe ni luſum verborum.

Quæ dixi, ut probarem, preſſionem eſſe æqualem ſimplici preſſioni cylindri aquei foramini ad perpendiculum imminentis, quæque tu titulo oppoſitionis majoris ponderis honorare voluiſti, tanquam non dicta per me conſiderare licebit, utpote ſcopo meo minus convenientia; non enim Theorema, uti a Doctiſs. Michelotto enunciatum fuit, demonſtrare, ſed demonſtrationem tuam Corollarii Nevvtoniani ponderare, animus fuit; poſſem tamen, ſi hanc digreſſionem facere vellem, argumenta proferre haud rejicula pro demonſtrando, motum aquæ in vaſe etſi obliquum (quod tamen nondum conſtat) ad cylindrum verticalem ſupra foramen D, nihil contribuere ad preſſionem guttæ foramini adſtantis; ſed hæc forent extra propoſitum.

Neſcio, an experientia doceat, tempore lapſus gravis per ſpatium FC egredi majorem quantitatem aquæ, quam contineret cylindrus foramini inſiſtens ad perpendiculum: certe ratio contrarium ſuadere videtur: necdum video, quid in ratiocinio ſupra expoſito deſiderari poſſit. Forſitan tempus illud experientia non recte definitum eſt, & juſto majus ſumptum fuit, nimirum non conſiderando aerem lapſui reſiſtere.

Vis, qua aqua effluit ex tubo, cujus cavitas æqualis eſt foramini, non comparari poteſt cum vi, qua eadem erumpit ex vaſe, cujus foramen ſupponitur infinite parvum, non magis ac punctum cum linea. Hujuſmodi difficultatem nunquam me urgere potuiſſe, libenter fateor.

Si experientia circa extenuationem fili ſe habet, ut dicis, fateor illam nihil conferre pro ſententiæ meæ confirmatione, ſed & nihil ipſi derogare dico.

Eo-

Locum in Borello, quem ejuſdem ſententiæ eſſe aſſeris, libenter ex te diſcerem.

Multa haberem addenda, ſed nolo leviuſculis hujuſmodi dubiis pretioſiſſima tua tempora diutius morari: hæc & præcedentia maturius per otium examinare, ſi examine tuo digna cenſes, poteris

Interim mente, & corpore Vale.

Com. Jacobi Riccati ad Virum Clariſſimum Danielem Bernoullium

EPISTOLA ALTERA.

Ab his objectionibus, quas tuo nomine, Eruditiſſime Vir, paucis ab hinc diebus accepi, facile me expedire poſſem, niſi prius nonnulla animadvertenda eſſent, quæ æquivocationem omnem de medio tollant, & oſtendant te Clariſs. Michelotti ſententiam eum mea confundere; neque adhuc ſcopum deſignaſſe, in quem tua ſpicula dirigeres.

Non aliud tibi propoſuiſti, ut aſſeris, quam demonſtrationem meam Corollarii Newtoniani accuratius perpendere: atque ulterius addis, te nondum videre qua in re principia a Michelotto adhibita adverſentur his, quæ a te ſcripta ſunt. Hoc profecto non vides, quia ejus librum qua par erat attentione nunquam legiſti, & (pace tua ſit dictum) quid impugnes, aut quid tuteris prorſus ignoras. Tali pacto ſeras quamdiu libuerit reciprocabis. Pergis porro: *Ex principiis Viri modo laudati ſequitur, quod eo tempore, quo grave cadit ex altitudine* FC (Fig. 139.), *exeat filum aqueum motu uniformi, & horizontali longitudinis* 2FC, *& ego hoc concedo; ſed filum iſtud eſſe propterea duplo majus cylindro foramini* D=C *normaliter inſiſtente, tua eſt conſequentia, de qua dubitandi rationem expoſui.*

Hæc, Doctiſſime Bernoulli, mea conſequentia non eſt, ſed citati Michelotti; nam quantitatem liquoris in fluxu manente conſtituti, dato tempore, per datum foramen, ſub data velocitate exeuntis aliter ipſe non metitur, quam aream foraminis in velocitatem ducendo; neque aliam quam ſequentem formulam uſurpat $q=tuo$, in qua ſub litteris initialibus exprimuntur fluidi quantitas, tempus, velocitas, & area orificii. Lege, ſi placet, ejus Operis pag.75,, & ſequentes, una cum Corollario pag.120, & Scholio pag.121, 122, 123, & rurſus quod ſcribit pag.169, & quid ſequatur intelliges.

Quæro abs te, cur filum horizontale longitudinis 2FC duplam aquæ quantitatem non continet, ſi cum ea conferatur, quæ in cylindro FC. C continetur? Reſpondebis ob venæ contractionem, aliaſque circumſtantias: ſed de his apud Michelottum ne verbum quidem. Iccirco admonui, conſequentiam illam ex ejus principiis ſponte fluentem admittendam nullo modo eſſe, niſi quibuſdam limitationibus adhibitis. Pudet me, quæ ſemel, atque iterum dixi, tertio inculcare.

Eſa-

Eſaminata per tutti i verſi l' addotta dimoſtrazione, non ci ho ſaputo vedere nè pure un ombra di paralogiſmo, e ciò ſpiccherà maggiormente dalle riſpoſte, ch' io ſono per dare alle ſue obbiezioni (Michelotti videlicet). *Suppoſto però, che ſeguitando le ſue veſtigia ſi preſcinda dalle reſiſtenze, dalla contrazione della vena indicata dal Sig. Nevvton, e confermata con replicate ſperienze dal Sig. Poleni, ed in oltre da qualche altra circoſtanza fin ora da Matematici non avvertita, e che ſi conſidererà in altro tempo.*

En verba mea ex litteris ad Clariſs. Michelottum datis excerpta luce meridiana clariora. Quid tu ad hæc? Diſſimulatione uteris, & eandem ſemper cantionem canis, dum Michelotti lapſum, quem ego notavi, in me transferre conaris invitis Diis, hominibuſque. Quæſtio erat, an ex hujus Auctoris principiis demonſtrari poſſet aſſertio Corollarii Nevvtoniani, non qualis revera eſt, ſed qualis ab ipſo fingitur, qua de re ſuo loco redibit ſermo: hoc ni fallor clariſſime præſtiti. Præſcinde ab his, quæ vel Michelotto in mentem non venerunt, vel a quibus præſcindere voluit, & demonſtrationis meæ vitium detege. Tunc eris mihi magnus Apollo. Ulterius progreſſus ſum, principiorumque a me mutuo ſumptorum defectum non diſſimulavi; correctionem, quam adhibere oportet, inſinuavi; quid ultra facere debuerim, ut doceas, flagito.

Sed his miſſis, cum Achille tuo, hoc eſt cum argumento illo, quod in ſecunda ſcriptura iterum urges, congrediendum eſt. Putas ex mea ſententia ſequi, vim expellentem modo per duplam GI (Fig. 138.), modo per ſimplam, aut per quamcumque aliam proportionem exponi debere. Id autem ratiocinatione probas, quæ mera cavillatio eſt. Quid nomine vis intelligas non ſatis percipio. Si de vi ſollicitante loqueris, hæc conſtans profecto eſt, & nulli mutationi obnoxia, uſquequo omnia in eodem ſtatu permanent, ut ſupponimus; & aliter exprimi nequit, quam per maſſam aquæ, quæ, nullis obſiſtentibus reſiſtentiis, ex vaſe effluere deberet, tempore a Nevvtono definito. In hoc Theoremate noſtræ diſputationis cardo vertitur. Vel igitur illud admittis, vel falſum putas; nihil enim eſt medium. Si primum, mecum conſentis, Michelotti ſententiam, immo paternam deſeris, uno verbo, Nevvtonianus es. Si ſecundum, illud invictiſſime demonſtrabo. Quodlibet elige, & te cauſa cecidiſſe convincam. Tergiverſationi locus non eſt. Quod ſi nomine vis intelligis effectum a vi ſollicitante productum (non enim de vocabulo quæſtio movenda eſt) tunc vis in hoc ſenſu accepta erit variabilis. Vim ſollicitantem, quæ uniformiter agit, pro tempore actionis ſuæ majorem, aut minorem effectum gignere, quis indubium vocet? Hoc ſatis gravitatis exemplo probatur.

Quantitatem aquæ aſſignato tempore erumpentem, quam abſtrahendo a reſiſtentiis, vi ſollicitanti æqualem invenimus, tantam eſſe, ut implere queat duplam columnam foramini EF ad lineam inſiſtentem, illorum ſententia fuit, qui effluxum metiuntur per factum ex velocitate in tempus, & in aream foraminis. Hos inter recenſeo Gulielminum, Hermannum, Varignonium, Hughenium, quibus adde, ſi placet, & Michelottum. Verum iſti Auctores exceſſu peccant.

Cau-

Cautius procedit magnus Nevvtonus; hæc enim habet Propoſitione 36. caſu primo, poſtquam obliquos motus particularum effluentium, & venæ contractionem conſideravit. *Per experimenta, inquit, conſtat, quod quantitas aquæ, quæ per foramen circulare in fundo vaſis factum effluit, ea eſt, quæ pro diametro venæ cum velocitate prædicta effluere debet.* Ut autem experimenta Teoriæ congruerent, aquæ exilientis velocitatem pauliſper auget; & cum certum ſit aquam ſuperius infundi ſine aliquo motu non poſſe, aquæ velocitatem in circulo AB talem ſupponit, ac ſi aqua cecidiſſet ex puncto quietis I, & ſpatium IH motu accelerato conſeciſſet. Lineam IH poſtea determinat Coroll. primo, ut ſit AK: CK in duplicata ratione areæ foraminis (per foramen EF venam contractam intelligit) ad aream circuli AB. Quam longe a mente Nevvtoni tu cum tuo Michelotto receſſeris, ex dictis patet. Nevvtoniana recito fide hiſtorica, non in omnibus probo; nam ſcio ſummum Virum in ſua cataracta ſubſtruenda aliquid humani paſſum eſſe; quamquam ſi cum aliis comparetur, omnes longo intervallo poſt ſe relinquat.

Sententiam tuam, Eruditiſſime Vir, libenter ex te diſcerem; nam fere in omnibus tibi aqua hæret, & Scepticorum more aliorum opinionem laceſſis, tuam manifeſtare reformidas. Ais te neſcire, an experientia doceat tempore lapſus gravis per ſpatium IG egredi majorem quantitatem aquæ, quam contineret cylindrus foramini inſiſtens verticaliter. Certe ratio, ut putas, contrarium perſuadere videtur, nec dum vides, quid in ratiocinio tuo deſiderari poſſit. Calculum ſubducere debueras, & ab hac ambiguitate te liberare. Cum experimenta contrarium evincant, ratio tua cum experientia, & cum Natura pugnabit. Sed quænam eſt hæc ratio? vereor enim, ne nubem pro Junone amplectaris. Verba tua audiamus. *Poſſem argumenta proferre pro demonſtrando, motum aquæ in vaſe, etſi obliquum (quod tamen nondum conſtat) ad cylindrum verticalem ſupra foramen* EF, *nihil contribuere ad preſſionem guttæ foramini adſtantis.* Sic paulatim de loco pelleris: in prima ſcriptura motum obliquum repudiabas, in ſecunda de eo dubitas, in utraque ſtatum motus cum ſtatu quietis pro more tuo confundis. Dum particulæ aquæ in vaſe contentæ quieſcunt, tunc fundum æqualiter premunt; at dum aperto oſtio effluunt, vis obliqua actionem ſuam exercet, & aquæ exeuntis copiam auget. Utrumque ita evidenter conſtat, ut non *argumenta haud rejicienda*, ſed demonſtrationes omni exceptione majores in medium afferre poſſem, ſi per otium liceret. Verum rationibus opus non eſt, ubi experientia clamat.

Interim finge plus aquæ non exonerari tempore a Nevvtono aſſignato, quam tu velles, ut tuam ſententiam tueri valeas; ſequitur vim ſollicitantem optime a Clariſs. Michelotto definitam per maſſam, ſeu quantitatem aquæ, quæ impleret cylindrum foramini ad lineam imminentem, ſecluſis tamen reſiſtentiis. Quid tu, negas ne, an affirmas? Hic rurſus tibi hæret aqua; nam de Theoremate Michelotti dubitas, & quæ de preſſione ſcripſiſti tamquam non dicta conſideras. Meminiſſe debueras, hanc eſſe eximii Patris tui doctrinam potius quam Michelotti, ut Ill. iſte

Me-

Medicus ſatetur pag.112. Vereris fortaſſe, ne argumentum illud tuum; quod tanti facis, & cui ſupra reſpondi, in te retorqueam? Quid, ſi conſequentiam circa effluxum aquæ admittis, qua poſita, Michelotti Theorema nullo negotio demonſtratur?

Et quoniam tota quæſtio, te ipſo ſatente, ad obſervationes traducta eſt, ſi Polenum, quem tibi laudavi, conſulere recuſas, ſi Mariottum, quem laudo, non probas, extat celebre Gulielmini experimentum circa finem Tractatus de menſura aquarum fluentium octies repetitum; quod in ſuos uſus tranſtulit conterraneus tuus Hermanous Phoronomiæ lib.2. Prop.37. Shol.I. Hoc ſi ad computum reducere non pigeat, quod magni laboris non eſt, te longe a veritate abeſſe deprehendes.

Ut igitur tua ſtet demonſtratio, vel dicendum Viros accuratiſſimos in capiendis experimentis dormitaſſe, vel Lectoribus impoſuiſſe, vel Naturam ipſam in paralogiſmum incidiſſe. Vide quas in anguſtias te conjicias. Excipe nunc, quod tempus illud experientia non recte definitum, & juſto majus ſumptum ſuit, nimirum non conſiderando aerem lapſui reſiſtere. Exceptione tua nihil aliud facis, quam argumento ab experientia deſumpto pondus addere; nam ſi effluxus obſervatus major eſt, quam cum opinione tua conciliari queat, quamquam aer reſiſtit, hoc impedimento ſublato, augeri debet, non minui.

Reliqua in ſcriptura tua, quæ ut fateris, minus ad rem faciunt, conſulto omitto. Quod dicis de foramine infinite parvo nova hypotheſis eſt. In vaſe Nevvtoniano diameter foraminis ad vaſis diametrum aſſignabilem habet rationem, nec video quid abſurdi ſequatur, ſi tota aqua in glaciem concreſcat, ea excepta, quæ orificio normaliter imminet, & ſi aqua per cylindrum medium tranſeunte in effluxu perenni, & manente conſtituta, hujus motus leges inquirantur.

Quod ambigis an vena contracta rurſus diſpergatur, ut dubitationem exuas, citatum Polenum conſule. Hoc phænomenum pro ſententiæ tuæ confirmatione nihil conferre, ſed & nihil ipſi derogare affirmas. Putabam hæc inter ſe conciliari vix poſſe. Interea locum Joh. Alphonſi Borelli contractionem venæ tenacitati aquæ tribuentis invenies in libro de motibus naturalibus a gravitate pendentibus prop.226. Borellum deceptum ſcio; ob id conciliationem tuam falſæ ſuppoſitioni innixam, licet non viderim, probare tamen non poſſum.

Habes, Eruditiſſime Vir, ſententiam meam indicatam potius, quam explicatam: ſed tibi pauca. Quod ſi patientia tua diutius abuſus ſum, id humanitati tuæ tribue, & vale.

Caſtriſranci die 20. Martii 1724.

ANNO

ANNOTAZIONE DELL' EDITORE.

Per mettere in un pieniſſimo lume la verità del Corollario Newtoniano ſoſtenuta dal noſtro Autore nel preſente Schediaſma, farò ricorſo al metodo inſallibile delle azioni, cioè a dire delle forze applicate agli ſpazj, illuſtrato dal Padre Vincenzo Riccati nel ſuo Dialogo delle forze vive, e della azione delle forze morte.

Sia ACDB (Fig.142.) un vaſo cilindrico ripieno d'acqua, e nel centro del ſuo ſondo CD ſia aperto un menomo foro EF, per cui l'acqua trovi l'uſcita. C'inſegnano i canoni idrodinamici, che le velocità del fluido dentro, e ſuori del vaſo ſtanno nella ragione inverſa del ſondo CD al foro EF; di modo che la prima è piccioliſſima in paragone della ſeconda. Dovendoſi paſſare per tutti i gradi dall'una all'altra velocità, la Natura forma in vicinanza del foro EF il gorgo SMEFNT, che trae l'origine dal girare la figura SMEGZ intorno l'aſſe GZ, che paſſa per il centro G comune al buco EF, ed al ſondo CD del vaſo. Rimane immobile l'acqua nei ſiti SMEC, TNFD, quaſi che foſſe ſolida, e l'acqua contenuta nel gorgo ſi va accelerando, a miſura che ſa tranſito per ſezioni più riſtrette MN.

Suppongaſi, che la ſuperficie AB del fluido ſia calata abbaſſo per lo ſpazio minimo HQ, di modo che ſia ſcaturita pel foro EF la quantità d'acqua AR. L'azione della gravità dell'acqua ſi ſarà impiegata in tre effetti, cioè a dire nell'imprimere forza viva all'acqua contenuta nel cilindro PT, a quella contenuta nel gorgo SMEFNT, ed all'altra parimente, eguale al cilindro AR, ch'è ſcappata ſuori dal vaſo. Quanto più picciola quantità di fluido riempie il gorgo, tanto minore d'eſſo fluido è la forza viva, e quanto minore è una tal forza viva, altrettanto maggiore ſi è quella, e dell'acqua PT dentro il vaſo, e dell'acqua pari di mole al cilindro AR ſpicciata ſuori pel buco. Quindi l'eſito del liquore è più veloce, e più copioſo, ed una azione più grande viene in pari tempo eſercitata dalla gravità dell'acqua dentro il vaſo rinchiuſa. Egli è ſuori d'ogni dubbio, che il peſo dell'acqua, malgrado l'impedimento del vaſo, tenta di effettuare la poſſibile maſſima azione. A tal oggetto dunque la Natura determina il gorgo SMEFNT di così picciola altezza ZG, che la forza viva dell'acqua, ch'eſſo comprende, poſſa traſcurarſi fiſicamente. Paſſando dal fiſico al geometrico, ſi ſupporrà da noi matematicamente minima la detta forza viva, e tale, che relativamente alla forza viva dell'acqua PT ſia permeſſo traſandarla nei computi. A norma di tale ſuppoſizione m'innoltro allo ſcioglimento del ſeguente

PROBLEMA I.

Determinare la velocità, colla quale esce l'acqua da un vaso cilindrico per un foro minimo circolare aperto nel fondo del vaso stesso.

Nel primo istante del moto sia l'altezza dell'acqua HG $= a$, la base del vaso CD $= b$, il foro EF $= c$. Cominci l'acqua a scaturire dal foro, ed essendosi abbassata per lo spazietto HQ $= s$, sia uscita dal vaso la porzione di fluido AR $= bs = m$. Chiamisi U la velocità del corpo d'acqua PT, il quale s'adegua al cilindro AD $= ab$, ed u la velocità della massa infinitesima bs uscita pel buco c.

Ricorrendo al nominato metodo delle azioni, e fatta la riflessione, che mentre il fluido ab è discesо per lo spazio s, la sua gravità ha esercitata l'azione abs, e supponendosi trascurabile la forza viva dell'acqua, che riempie il gorgo, avremo per le note formole $abs = \frac{abU^2 + bsu^2}{2}$ (1): ma come abbiamo di sopra notato, le velocità U, u serbano la ragione inversa delle sezioni b, c; dunque si verifica l'equazione $\frac{cu}{b} = U$, e sostituendo questo valore nella nostra formola, ci si presenta $abs = \frac{\overline{ac^2 + b^2}\,S \cdot u^2}{2b}$.

La massa liquida ab s'è mossa per lo spazio s, e l'acqua bs, che che spicca dal foro, s'è conformata in un cilindro, la cui base c, e la lunghezza $\frac{bs}{c}$, che da noi ponesi $= z$. Giacchè $\frac{bs}{c} = z$, ne risulta $bs = cz = m$ (2), ed $abs = acz$. Si cavi la conseguenza importante, che all'azione abs, che segue in Natura, può con un gioco di metodo sostituirsi l'eguale acz, e in cambio d'essa usarsi sicuramente. Surrogato in luogo di bs il suo valore cz, la nuova formula $az = \frac{\overline{ac + bz} \cdot u^2}{2b}$ (3), o sia $\frac{\sqrt{2abz}}{\sqrt{ac + bz}} = u$ (4) esprimerà la relazione fra le velocità, e gli spazj scorsi dall'acqua cz, ch'esce dal vaso: il che &c.

CO-

COROLLARIO I.

Nel principio del moto abbia corſo l'acqua, che ſpicca dal foro, uno ſpazio z talmente minimo, che ſia la quantità bz infinitamente minore di ac. In queſta ipoteſi la formola (4) ſi riduce alla ſeguente $\sqrt{2a \cdot \frac{bz}{ac}} = u$, ed eguagliandoſi la frazione $\frac{bz}{ac}$ ad una grandezza immenſamente picciola, manifeſtamente ſi ſcopre, che la velocità u pareggia una parte inaſſegnabile di quella celerità $\sqrt{2a}$, che viene in progreſſo dal fluido acquiſtata. La velocità per altro $\sqrt{2a \cdot \frac{bz}{ac}}$ conceputa dall'acqua cz uſcita dal vaſo è infinitamente maggiore di quella $\sqrt{2z}$, che avrebbe cagionata nell'acqua cz la ſua gravità, eſſendo $\sqrt{2a \cdot \frac{bz}{ac}} : \sqrt{2z} :: \sqrt{b} : \sqrt{c}$. Queſta rifleſſione ci fa toccare con mano, che la forza viva, ond'è fornita la maſſa cz, procede da un'azione incomparabilmente più grande di quella, che per lo ſpazio z verrebbe eſercitata dalla gravità di eſſa maſſa.

COROLLARIO II.

Inoltriamoci alla ſuppoſizione, che le grandezze ac, bz, e conſeguentemente anche le due c, z (ſupponendoſi finite le quantità a, b) ſi corriſpondano in proporzione finita, e la formola (4) $\sqrt{2a \cdot \frac{bz}{ac+bz}} = u$ ci addita, che eſſendo $\frac{bz}{ac+bz}$ quantità finita minore dell'unità, è parimente finito il valore della velocità u; ma però ſempre più picciolo di $\sqrt{2a}$, al qual valore ſi va vie più accoſtando, a miſura che s'aumenta la grandezza bz relativamente ad ac. In queſto incontro la forza viva dell'acqua uſcita cz ſi eguaglia ad $acz \cdot \frac{bz}{ac+bz}$, e giacchè, conforme abbiamo notato, è finita la grandezza $\frac{bz}{ac+bz}$, ed una finita relazione paſſa fra le quantità c, z, la predetta forza ſerberà una ragione finita col quadrato c^2.

COROLLARIO III.

Ma quando bz è divenuta infinita in riguardo ad ac, il che può succedere, anche mentre bz è grandezza minima, purchè s' eguali ad $\overline{ac}^{n}$, e sia l'esponente n positivo, e minore dell'unità, in tal caso avremo $u = \sqrt{2a \cdot \frac{bz}{ac+bz}} = \sqrt{2a}$, e questo è il massimo valore, a cui può pervenire la detta velocità.

Si osservi potersi asserire con verità, che lo spazio z, quantunque menomo, sia stato passato con equabile velocità dall'acqua scaturita dal foro. Sia per esempio $z = \frac{\overline{ac}^{\frac{1}{3}}}{b}$: egli è manifesto per le cose dette, che mentre era $z = \frac{\overline{ac}^{\frac{2}{3}}}{b}$, la velocità u s'eguagliava a $\sqrt{2a}$; dunque lo spazio $\frac{\overline{ac}^{\frac{1}{3}} - \overline{ac}^{\frac{2}{3}}}{b}$ s'è scorso con velocità equabile: ma per adequazione $\frac{\overline{ac}^{\frac{1}{3}} - \overline{ac}^{\frac{2}{3}}}{b} = \frac{\overline{ac}^{\frac{1}{3}}}{b} = z$; dunque l'acqua si è mossa per lo spazio z con equabile celerità.

La forza viva dell acqua cz scappata fuori, cioè a dire $acz \cdot \frac{bz}{ac+bz} = acz$, la scopriremo infinita relativamente a quella, onde è fornita l'acqua, che si muove con velocità finita, ma non per anche ridotta equabile, la quale nel precedente Corollario abbiamo avvertito riferirsi a c^2 in proporzione finita.

SCOLIO I.

Nella formola (4) $\frac{\sqrt{2abz}}{\sqrt{ac+bz}} = u$ non abbiamo messa a computo l'azione della gravità dell'acqua, dopo ch'è uscita dal vaso. Egli è d'uopo adunque fingere o che l'acqua scaturita resti priva di quantità, o pure

o pure che l'acqua, toſto che è ſcappata fuori pel buco, ſia obbligata à voltar cammino lungo un canale orizzontale ſenza patire reſiſtenza veruna.

SCOLIO II.

Preſe le differenze nella formola (1) $abs = \frac{abU^2 + bsu^2}{2}$, dopo aver in eſſa ſoſtituito in cambio di *bs* il ſuo valore *cz*, ci ſi preſenterà $acdz = abUdU + czudu + \frac{cdzu^2}{2}$. L'azione adunque elementare *acdz* cagiona tre effetti, accreſcendo la forza viva nelle due maſſe *ab*, *cz*, ed imprimendo la forza viva $\frac{cdzu^2}{2}$ nella maſſa menomiſſima *cdz*, che durante la infinitesima azione *acdz* ſpiccia novellamente pel foro. Quando il fluido è pervenuto ad una equabile velocità, i due primi effetti ſi annullano, eſſendo in tal circoſtanza tanto *dU*, quanto $du = 0$, e per conſeguenza adempieſi l'equazione $acdz = \frac{cdzu^2}{2}$. Quindi nella detta ipoteſi l'azione minima *acdz* s'impiega tutta nel generare la forza viva nell'incremento *cdz* della maſſa fluida *cz* uſcita dal vaſo. Anzi verificandoſi nella noſtra ſuppoſizione la formola $acz = \frac{czu^2}{2}$, ſi può aſſerire con geometrica adequazione, che mentre la velocità del fluido ſia divenuta equabile, l'intera azione $acz = abs$ s'è ſpeſa nella forza viva della porzione d'acqua *cz* ſcaturita dal vaſo.

Dalle coſe dette raccoglieſi, che ſe ci proporremo di ritrovare una forza *f*, che agendo liberamente per uno ſpazio elementare cagioni l'effetto $\frac{cdzu^2}{2}$, la totale azione di queſta forza, quando l'acqua equabilmente ſi muove, pareggierà $acz = \frac{czu^2}{2}$; di modo che all'azione di eſſa forza ſi potrà attribuire tutto il moto dell'acqua uſcita. Supponendo il Cavalier Nevvton equabile la velocità del liquore, egli è fuor di dubbio, che quelle parole del famoſo ſuo Corollario, *Vis, qua totus aquæ exilientis motus generari poteſt &c.* alludono alla forza, di cui parliamo. Deve poi eſſer libera la detta forza; perchè potendo venir prodotta la forza viva $\frac{czu^2}{2}$ da infinite forze, ciaſcuna delle quali eſerciti una azione eguale alla *acz*, e dicendo aſſolutamente il Sig. Nevvton, *Vis, qua totus*

aqua

aquæ exilientis motus generari poteſt, fra tutte le mentovate forze ſi dee intendere certamente quell'unica libera, e non impedita, la cui azione elementare cagiona la forza viva $\frac{cdzu^2}{2}$ nella maſſa infinitesima cdz, non altrimenti che la gravità in un corpo, che diſcende per la linea del piombo.

PROBLEMA II.

Determinare la forza, che agendo liberamente, cagiona la forza viva nell'elemento d'acqua, che nuovamente ſcaturiſce da un vaſo per un foro minimo in tempo infinitesimo.

Concioſſiachè $\frac{abz}{ac+bz} = \frac{u^2}{2}$, moltiplicando per le quantità eguali cdz, dm, avremo $\frac{acbzdz}{ac+bz} = \frac{dmu^2}{2}$. Lo ſpazio, pel quale agiſce una forza coſtante libera, s'eguaglia alla metà di quello, che nel tempo della durata dell'azione ſi ſcorre dalla maſſa dm colla velocità μ acquiſtata in vigore di detta azione. Agendo per uno ſpazio minimo la forza, che noi cerchiamo, ſi può conſiderare come coſtante, e giacchè la maſſa $dm = cdz$ nel tempo, in cui ſegue l'azione, ſcorre lo ſpazio dz, la predetta forza a norma delle coſe dette agiſce per lo ſpazio $\frac{1}{2} dz$.

Dividendo adunque per $\frac{1}{2} dz$ l'azione $\frac{acbzdz}{ac+bz}$, ne riſulterà la forza continuamente applicata, che da noi ſi nomina $f = \frac{2acbz}{ac+bz}$ (5): il che ec.

COROLLARIO I.

Se nel cominciamento del moto è bz infinitamente minore di ac, ci ſi preſenta la forza $f = 2bz$. In tale incontro l'azione $\frac{fdz}{2} = bzdz$, che genera la forza viva $\frac{dmu^2}{2}$; è una parte minima della azione elementare $abds = acdz$, impiegandoſi il rimanente, cioè per adequazione tutta l'azione $acdz$ nel compleſſo dei due effetti nominati nel premeſſo

Sco-

Scolio II. $abvdv + czudu = \frac{\overline{ac+bz}\cdot bvdv}{c}$, o per meglio dire nel ſolo incremento $abvdv$ della forza viva del corpo d' acqua ab, eſſendo relativamente nullo l'altro effetto $czudu$.

COROLLARIO II.

Sia lo ſpazio z creſciuto sì fattamente, che le quantità ac, bz ſi riferiſcano in proporzione finita, ed interverrà, che l' azione $\frac{fdz}{2} = \frac{acbdz}{\overline{ac+bz}}$ ſerbi coll'azione elementare della gravità dell' acqua ab, cioè a dire con $abds = acdz$ la finita relazione, che paſſa fra le grandezze bz, $ac+bz$. Conſeguentemente nel doppio effetto $abvdv + czudu = \overline{ac+bz}\cdot\frac{bvdv}{c} = \overline{ac+bz}\cdot\frac{cudu}{b}$ ſi ſpenderà l'azione $\frac{a^2c^2dz}{ac+bz}$. Mentre per eſempio foſſe $ac = bz$, ſi troverebbe $f = ac$, $\frac{fdz}{2} = \frac{acdz}{2}$, e ciaſcuno degli effetti $abvdv$, $czudu$, che in queſta ipoteſi ſarebbero eguali, richiederebbe l'azione $\frac{acdz}{4}$. La velocità u dell'acqua uſcita dal vaſo s' eguaglierebbe a $\sqrt{a}$.

COROLLARIO III.

Finalmente quando è bz infinita relativamente ad ac, il che può verificarſi ſtando ancora bz dentro i confini delle quantità infinitesime, conforme abbiamo notato nel Corollario III. del Problema I; ſcopriremo $f = 2ac$. In tale circoſtanza la velocità u, colla quale l'acqua ſcaturiſce dal buco, è divenuta equabile, e s' eguaglia a $\sqrt{2a}$, ſiccome appunto ſuppone l'incomparabile, Sig. Nevvton. Or ecco adunque, che nella ſuppoſizione del grande Ingleſe la forza f pareggia la grandezza $2ac$ a norma della eſpreſſione del tanto dibattuto ſuo Corollario: *Vis, quæ totus aquæ exilientis motus generari poteſt, æqualis eſt ponderi cilindricæ columellæ aquæ, cujus baſis eſt foramen EF* (Fig. 138.), *& cujus altitudo eſt* $2GI$, *vel* $2CK$. Si aſſeriſce in oltre con verità, che queſta forza può generar tutto il moto nell'acqua, ch'eſce dal vaſo; imperciocchè eſſendo nella ipoteſi di $u = \sqrt{2a}$ lo ſpazio ſcorſo z infinito relativamente

lativamente a quello paſſato dall'acqua, mentre era u minore di $\sqrt{2a}$ per una quantità finita minima a piacimento, l'azione acz s'adegua a $\int \frac{fdz}{2}$, e rettamente si afferma, che la forza $2ac$ agendo per lo spazio $\frac{1}{2}z$ ha prodotto nella massa cz la forza viva $cz.\frac{u^2}{2} = cz.c$.

Impiegandosi tutta l'azione elementare del peso dell'acqua ab, vale a dire $abds = acdz$ nell'unico effetto $cdz.\frac{u^2}{2} = cdz.a$, chiara si scopre la nullità degli alti due effetti $abvdv$, $czudu$. E così in fatti dee intervenire, perchè essendo la velocità v, u divenute equabili, s'eguagliano a nulla i loro incrementi dv, du.

Per intero compimento della materia aggiungo la soluzione del seguente

PROBLEMA III.

Determinare la relazione fra gli spazj scorsi dall'acqua, che scaturisce da un vaso per un foro minimo, e i tempi impiegati a percorrerli.

Si nomini t il tempo consumato dal primo elemento di fluido uscito dal vaso a passare lo spazio z, ed essendo $\frac{dz}{u} = dt$, e per l'equazione (4) $\frac{\sqrt{2abz}}{\sqrt{ac+bz}} = u$, scopriremo $\frac{dz\sqrt{ac+bz}}{\sqrt{2abz}} = dt$ (6), e moltiplicando, e dividendo per $\sqrt{ac+bz}$, $\frac{acdz+bzdz}{\sqrt{2ab.\overline{acz+bz^2}}} =$

$\frac{\frac{1}{2}acdz+bzdz}{\sqrt{2ab.\overline{acz+bz^2}}} + \frac{\frac{1}{2}acdz}{\sqrt{2ab.\overline{acz+bz^2}}} = dt$. L'integrale del termine

$\frac{\frac{1}{2}\,acdz + bzdz}{\sqrt{2ab \cdot acz + bz^2}}$ s' eguaglia a $\frac{\sqrt{acz + bz^2}}{\sqrt{2ab}}$, e quello del termine

$\frac{\frac{1}{2}\,acdz}{\sqrt{2ab \cdot acz + bz^2}}$ pareggia la quantità $\frac{ac}{2\sqrt{2ab^2}} \int \frac{2}{\sqrt{\frac{ac+bz}{bz}} - 1}$,

dovendosi prendere i logaritmi nella logistica della sottangente = 1;

Sarà pertanto $\frac{\sqrt{acz + bz^2}}{\sqrt{2ab}} + \frac{ac}{2\sqrt{2ab^2}} \int \frac{2}{\sqrt{\frac{ac+bz}{bz}} - 1} = t$ (7);

formola, che dinota la proporzione fra lo spazio z scorso dall' acqua, che spiccia dal buco c, ed il tempo t impiegato a percorrerlo: il che ec.

COROLLARIO I.

Mentre nel cominciamento del moto la grandezza bz è infinitamente minore di ac, la formola (7) prende l'aspetto

$\frac{\sqrt{acz}}{\sqrt{2ab}} + \frac{ac}{2\sqrt{2ab^2}} \int \frac{2\sqrt{bz}}{\sqrt{ac}} = t$. Ma eguagliandosi

$\frac{2\sqrt{bz}}{\sqrt{ac}}$ ad una grandezza menoma, abbiamo nella logistica della

Suttangente $= 1 \int \frac{2\sqrt{bz}}{\sqrt{ac}} = \frac{2\sqrt{bz}}{\sqrt{ac}}$; dunque effettuati i

necessarj calcoli, $\frac{\sqrt{2cz}}{b} = t$. Questa stessa formola si può agevolmente

dedurre dalla equazione differenziale (6) $\frac{dz\sqrt{ac+bz}}{\sqrt{2avz}} = dt$, cancellando nel numeratore il termine incomparabile bz, ed indi passando alla integrazione. Non lasciamo d'avvertire, che il tempo $\sqrt{\frac{2cz}{b}}$, oltre all' essere infinitesimo si scopre ancora menomo relativamente al tempo $\sqrt{2z}$, in cui la massa cz stimolata dalla sua gravità avrebbe camminato per lo spazio z.

COROLLARIO II.

Sia cresciuto lo spazio z sì fattamente, che fra le grandezze ac, bz passi una proporzione finita, e dalla attenta considerazione della formola (7) $\frac{\sqrt{acz+bz^2}}{\sqrt{2ab}} + \frac{ac}{\sqrt{2ab^2}}\int\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\frac{ac+bz}{bz}}-1}} = t$ ricaveremo essere infinitesimo il tempo, in cui l'acqua uscita dal vaso è pervenuta ad una velocità, la quale per il Corollario III. del Problema I. è finita, ma però sempre minore di $\sqrt{2a}$. E vaglia il vero, il primo dei due termini, ai quali s'eguaglia il tempo t, cioè a dire $\frac{\sqrt{acz+bz^2}}{\sqrt{2ab}}$ è chiaramente minimo. Lo stesso pure si verifica del secondo termine $\frac{ac}{2\sqrt{2ab^2}}\int\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\frac{ac+bz}{bz}}-1}}$; imperciocchè $\sqrt{\frac{ac+bz}{bz}}$ eccede l'unità per una quantità finita, e perciò $\sqrt{\frac{ac+bz}{bz}} - 1$ s'eguaglia ad una grandezza finita positiva, laonde

$1+\frac{2}{\sqrt{\frac{ac+bz}{bz}}-1}$ è maggiore dell'unità, e ſta dentro i limiti del finito la differenza, con cui la ſupera. Quindi $\int\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{\frac{ac+bz}{bz}}-1}}$ pareggia una quantità finita, e per conſeguenza è infiniteſimo anche il termine $\frac{ac}{2\sqrt{2ab^2}}\int\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{\frac{ac+bz}{bz}}-1}}$.

COROLLARIO III.

Mentre la grandezza bz paragonata con ac è relativamente infinita, la formola (7) ſi trasforma così: $\frac{z}{2\sqrt{2a}}+\frac{ac}{\sqrt{2ab^2}}\sqrt{\frac{4.bz}{ac}}=t$.

Si ſcoprirà poterſi traſcurare il ſecondo termine, riflettendo, che ſe $\int\frac{4.bz}{ac}$ foſſe eguale a $\frac{4bz}{ac}$, allora il detto ſecondo termine s' eguaglierebbe a $\frac{2z}{\sqrt{2a}}$, e ſerberebbe col primo una determinata proporzione: ma $\int\frac{4.bz}{ac}$ è infinitamente minore di $\frac{4.bz}{ac}$; dunque il ſecondo termine è inaſſegnabile in riguardo al primo, e può cancellarſi nella equazione, onde s' abbia $\frac{z}{\sqrt{2a}}=t$. Abbiamo veduto nel corollario III. del Problema I, che quando bz è immenſamente maggiore di ac, il che interviene, prima che lo ſpazio z giunga ad eſſere finito, la velocità del fluido ſcaturito dal vaſo s' eguaglia a $\sqrt{2a}$. Si cavi la con-

ſeguenza, che eſſendo $t = \frac{z}{\sqrt{2a}}$, eſſo fluido ſa acquiſto della velocità $\sqrt{2a}$ in tempo infiniteſimo, e quindi egli è vero adequatamente, che l'acqua eſce dal vaſo con quella velocità, che un grave guadagna cadendo dall'altezza a. S'è parimenti avvertito nel mentovato Corollario, che lo ſpazio z ſi corre con equabile velocità. Viene ciò confermato dalla noſtra equazione $t = \frac{z}{\sqrt{2a}}$; imperciocchè la velocità è coſtante, quando i tempi ſtanno come gli ſpazj. Poſto $z = 2a$ ſcopreſi $t = \sqrt{2a}$, ch' è quello ſteſſo tempo ſpeſo da un grave a diſcendere dalla ſublimità a, principiando dalla quiete. In ſatti colla velocità, che un corpo acquiſta cadendo dall'altezza a, in pari tempo ſi paſſa un doppio ſpazio $z = 2a$.

S C O L I O I.

Eſſendo $\frac{fdz}{2} = \frac{dmu^2}{2}$, o ſia $fdz = dmu^2$, e ſcorrendoſi dalla maſſa $dm = edz$ nel tempo dt lo ſpazio dz colla velocità u, di modo che ſi verifica eſſere $dz = udt$, ſoſtituito in cambio di dz un tal valore nella formola $fdz = dmu^2$, ci ſi preſenterà $fdt = dmu$. Si verifica nel preſente incontro, non ſolo la formola Leibniziana $\frac{fdz}{2} = \frac{dmu^2}{2}$, ma ancora la Carteſiana $fdt = dmu$, perchè la forza f agiſce in qualità di coſtante per la metà di quello ſpazio dz, che nel tempo dt impiegato nell'azione viene ſcorſo dalla maſſa dm colla velocità u acquiſtata in vigore dell'azione medeſima. Quando la velocità u è divenuta equabile, ed eguale a $\sqrt{2a}$, è parimente coſtante la ſorza $f = 2ac$. Potremo adunque integrare l'equazione $fdt = dmu$, onde ſi abbia $ft = mu$. Queſta ſormola s'adatta perſettamente al ſopra citato paſſo del Signor Nevvton, *Vis, qua totus aquæ exilientis motus generari poteſt, æqualis eſt ponderi cilindricæ columellæ aquæ, cujus baſis eſt foramen EF* (Fig. 138.), *& cujus altitudo eſt 2GI, vel 2CK*, moſtrandoci a dito, che ſe ſi vuol trovare la giuſta quantità di moto mu, di cui è ſornita l'acqua $m = cz$ ſcaturita dal vaſo, biſogna moltiplicare per il tempo t impiegato nell'acquiſtare eſſo moto, la ſorza f, o ſia il doppio peſo della colonna ac, onde s'abbia $ft = mu$.

SCO-

S C O L I O II.

Se per procedere con maggiore esattezza, volesse taluno mettere a computo la forza viva dell'acqua contenuta nel gorgo, bisognerebbe, che prima determinasse la figura del gorgo, ed indi si facesse ad indagare la forza viva del fluido nell'atto, che passa pel gorgo.

Per istabilire la figura del gorgo, ponghiamo in opera il seguente metodo. Suppongasi la forza f divenuta eguale a $2ac$, e sia IG (Fig. 142.) quello spazio, pel quale agendo una forza costante, che determineremo in progresso, sia capace d'imprimere allo strato acqueo compreso fra i due circoli orizzontali SZT, KIL la velocità $u = \sqrt{2a}$. Ne segue, che esercitando azione la detta forza per lo spazio IZ, è atta a cagionare nello strato KT la velocità v, di cui è fornita l'acqua prima d'insinuarsi nel gorgo SMEFNT, e che di più essendo v minima relativamente ad u, lo spazio IZ è una parte infinitesima dello spazio IG. Ora per noi s'afferma, che quando tutta l'acqua KSMEFNTL è scaturita pel foro EF, è seguito un effetto tale, come se tutto il nominato liquore fosse passato dalla velocità nulla alla velocità u. S'intenda diviso il gorgo in un numero infinito n di strati, ciascuno eguale di massa allo strato KT, e tagliata $IX = n \cdot IZ$, e condotto per X il piano circolare orizzontale UXY, immaginiamoci distribuita l'acqua UKLY in un numero di strati, ognuno eguale allo strato KT. Chiare fluiscono le conseguenze, che le quantità d'acqua UKLY, KSMEFNTL s'eguagliano, e che nell'istante, che questa ha terminato d'uscire dal vaso, è discesa quella ad occupare il sito in abbandono lasciato. Siano eF, kL due dei nominati strati, e si chiami eF ultimo strato inferiore, kL ultimo strato superiore. Premessa la suppozione, che la forza costante da determinarsi abbia facoltà d'agire solamente dentro del gorgo, o sia per lo spazio IG, e non più, si osservi, che nel momento, che l'acqua KSMEFNTL ha finito di scaturire dal foro, la superficie ef dello strato eF ha scorso dentro del gorgo lo spazio gG, e la superficie corrispondente kl dello strato kL ha scorso dentro del gorgo lo spazio Ig, e che la somma di questi spazj s'eguaglia ad IG. Egli è dunque lo stesso, come se un solo strato fosse stato sollecitato per lo spazio IG. Non altrimenti eguale ad IG sarà l'aggregato degli spazj passati dentro del gorgo dalle coppie degli strati penultimo inferiore, penultimo superiore; antepenultimo inferiore, antepenultimo superiore, e così di seguito; di modo che quando è uscita tutta l'acqua, che dianzi occupava il gorgo, tanti strati, quanti compongono il gorgo stesso, sono stati stimolati da altrettante forze eguali per lo spazio IG, ed an fatto acquisto della velocità $u = \sqrt{2a}$; intervenendo lo stesso effetto, come se tutta l'acqua del gorgo avesse fatto transito dalla velocità nulla alla velocità $= u$.

Giac-

Giacchè la forza costante, di cui si va in traccia agendo per gli spazj IG, IZ cagiona nello strato KT le velocità u, v, serberanno queste la ragione $\sqrt{IG} : \sqrt{IZ}$; ma le dette velocità stanno come $b : c$: dunque ponendo $IG = g$ avremo $b : c :: \sqrt{g} : \sqrt{IZ}$, e conseguentemente $IZ = \frac{gc^2}{b^2}$. Eguagliandosi a b la sezione ST, agevolmente si scopre essere la massa dello strato $KT = \frac{gc^2}{b}$. Si chiami p la forza cercata, che operando per lo spazio $IG = g$, imprime nello strato $KT = \frac{gc^2}{b}$ la velocità $u = \sqrt{2a}$, e dalla nota formola $pg = \frac{gc^2}{b}$. a ricaveremo il valore della forza $p = \frac{ac^2}{b}$.

Sia lo strato KT giunto nel sito MN, e chiamata l'ascissa $IO = x$, e la sezione $MN = y$, saranno le velocità in MN, EF come $\sqrt{x} : \sqrt{g}$: ma le stesse velocità si devono riferire nella ragione inversa delle sezioni $MN = y$, $EF = c$, dunque $\sqrt{x} : \sqrt{g} :: \frac{1}{y} : \frac{1}{c}$ analogia, che ci somministra l'equazione $y = \frac{c\sqrt{g}}{\sqrt{x}}$, da cui resta determinata la figura del gorgo.

Cerchiamo ora la quantità della massa fluida, dalla quale il gorgo è riempiuto. L'elemento della massa contenuta nella porzione di gorgo SMNT è $ydx = \frac{cdx\sqrt{g}}{\sqrt{x}}$. Quindi integrando avremo la massa SMNT $= \int ydx = 2c\sqrt{gx} - A$. Si determina la costante A riflettendo, che quando $x = \frac{gc^2}{b^2} = IZ$, è SMNT $= \int ydz = 0$. Questa condizione ci dà $A = \frac{2gc^2}{b}$, e conseguentemente SMNT $= 2c\sqrt{gx} - \frac{2gc^2}{b}$

ma

ma la massa KSTL $= \frac{gc^2}{b}$; dunque KSMNTL $= 2c\sqrt{gx} - \frac{2gc^2}{b}$. e quando $x = g =$ IG. sarà l' intera massa contenuta nel gorgo KSME FNTL $= 2cg - \frac{gc^2}{b}$, o sia adequatamente $= 2cg$.

Si è per noi fatta la riflessione, che mentre è spicciata pel foro tutta l'acqua $2cg$, che capisce nel gorgo, è seguito lo stesso effetto, come se tutti gli strati componenti il gorgo, ognuno stimolato per lo spazio g dalla forza $\frac{ac^2}{b}$, avessero fatto acquisto della velocità $u = \sqrt{2a}$.

Abbiamo scoperta la somma dei predetti strati $= 2cg$. L'aggregato delle forze degli strati medesimi si rende manifesto coll'avvertire, che se uno strato, la cui massa $\frac{gc^2}{b}$, è animato dalla forza $\frac{ac^2}{b}$, il complesso di tutti gli strati, cioè a dire la massa $2gc$, verrà sollecitato dalla forza $2ac$, la quale agendo per lo spazio g cagionerà la forza viva $2gc \cdot \frac{u^2}{2} = 2gc \cdot a$, ed imprimerà nella massa $2gc$ la velocità $u = \sqrt{2a}$.

Deducendosi dalla stabilita figura del gorgo quella stessa forza $f = 2ac$, che nel Problema II. indipendentemente dalla figura stessa abbiamo determinata con altro metodo, chiaramente si scopre, che la figura da noi assegnata al gorgo si è quella, che viene effettuata dalla Natura.

Dalla formola $fg = 2cg \cdot \frac{u^2}{2}$ si ricava l' altra $f \cdot \frac{g}{n} = \frac{2gc}{n} \cdot \frac{u^2}{2}$, la quale ha luogo anche quando la velocità u non è divenuta equabile, dovendosi considerare come costante la forza f, mentre agisce per uno spazio minimo $= \frac{g}{n}$. In virtù dell' azione d'essa forza adequatamente costante deve passare l'acqua $\frac{2gc}{n}$ dalla velocità nulla alla velocità u colla legge d'un grave cadente, il che necessariamente richiede la figura del gorgo da noi scoperta. S'osservi, che eguagliandosi f ad una funzione dell'incognita z, il suo valore è costante, fino a tanto che non si varia la grandezza di z: ma uscendo pel foro la infinitesima quantità d'acqua $\frac{2gc}{n}$, la z persiste adequatamente invariabile; dunque mentre esce il

flui-

fluido $\frac{2gc}{n}$, la forza f si può considerare come costante. A norma di ciò s'adempie la formola $\frac{f}{n} \cdot g = \frac{2gc}{n} \cdot \frac{u^2}{2}$, e segue lo stesso effetto, come se la forza costante $\frac{f}{n}$ stimolasse la massa, che spiccia nuovamente dal foro, per lo spazio g, e generasse in essa massa $\frac{2gc}{n}$ la forza viva $\frac{2gc}{n} \cdot \frac{u^2}{2}$. Le cose dette di sopra ci fanno toccar con mano, che se conforme alla natura d'una forza costante le velocità anno da stare come le radici degli spazj, a cui s'applica la forza stessa, il gorgo deve avere quella figura, che abbiamo determinata.

SCOLIO III.

La forza viva dell' acqua contenuta nel gorgo agevolmente si deduce dalla figura del gorgo medesimo. La forza viva dello strato $kT = \frac{gc^2}{b}$, il quale si muove colla velocità $U = \frac{cu}{b}$, s' eguaglia a $\frac{gc^4}{b^3} \cdot \frac{u^2}{2}$. Nel sito MN la velocità dello strato ydx pareggia la quantità $\frac{cu}{y}$, e quindi ne risulta la forza viva dello strato suddetto $= ydx \cdot \frac{c^2u^2}{2y^2} = \frac{c^2dx}{y} \cdot \frac{u^2}{2}$. Si sostituisca in vece di y il suo valore suggeritoci dalla equazione $y = \frac{c\sqrt{g}}{\sqrt{x}}$, da cui resta determinata la figura del gorgo, e ci si presenterà la detta forza viva $= \frac{cx^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{g}} \cdot \frac{u^2}{2}$. Passando alla integrazione, scopriremo la forza viva dell'acqua $KSMNTL = \int \frac{cx^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{g}} \cdot \frac{u^2}{2} = \frac{\frac{2}{3}cx^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{g}} \cdot \frac{u^2}{2}$

+ B. Si noti, che la velocità u va considerata come costante, cercandosi la forza viva dell'acqua contenuta nel gorgo, mentre la velocità u nel sito EF in quel tal momento è di determinata misura. Ritrovasi il valore della costante B riflettendo, che quando $x = \frac{gc^2}{b^2} = IZ$, la

for-

forza viva dello ſtrato KT s'eguaglia a $\frac{gc^4}{b^3} \cdot \frac{u^2}{2}$. Avremo per tanto in

detta circoſtanza $\frac{\frac{2}{3}cg^{\frac{3}{2}}c^3}{g^{\frac{1}{2}}b^3} \cdot \frac{u^2}{2} + B = \frac{gc^4}{b^3} \cdot \frac{u^2}{2}$, e per conſeguenza

$B = \frac{\frac{1}{3}gc^4 \cdot u^2}{b^3} \cdot \frac{}{2}$. Sarà adunque la forza viva dell'acqua KSMNTL $=$

$\int \frac{cx^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{g}} \cdot \frac{u^2}{2} = \frac{\frac{2}{3}cx^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{g}} + \frac{\frac{1}{3}gc^4 \cdot u^2}{b^3} \cdot \frac{}{2}$, e poſta $x = g$, ſcopriremo la

forza viva dell'acqua, che capiſce nel gorgo, $= \frac{\frac{2}{3}cg + \frac{1}{3}gc^4}{b^3} \cdot \frac{u^2}{2}$;

cioè eguale adequatamente a $\frac{2}{3}cg \cdot \frac{u^2}{2}$:

S C O L I O IV.

Prima d'indagare la velocità, colla quale l'acqua ſcaturiſce pel foro EF, mettendo a computo la forza viva dell'acqua contenuta nel gorgo, egli è d'uopo dimoſtrare, che quantunque la Natura formi nel fondo del vaſo il gorgo KSMEFNTL, ciò non oſtante quando la ſuperficie ſuperiore dell'acqua è diſceſa per lo ſpazio minimo HQ $= s$, la gravità dell'acqua infuſa entro il vaſo ha eſercitata l'azione $abs = acz$. Egli è chiaro, che l'azione dell'acqua AL s'eguaglia ad $abs - gbs$. Reſta adunque da provarſi, che l'azione della gravità del fluido, che riempie il gorgo, pareggia la quantità gbs. L'acqua $=$ AR $= bs$ uſcita dal vaſo ſi conforma nel ſito MN in un volume, la lui altezza $= \frac{bs}{y}$, e quindi ſcaturita che ſia pel foro l'acqua ſuddetta, lo ſtrato ydx è diſceſo per lo ſpazio $\frac{bs}{y}$, e la ſua gravità ha effettuata l'azione

$= ydx \cdot \frac{bs}{y} = dx \cdot bs$, la quale ſi ſcopre eguale alla maſſa liquida bs

ſcappata fuori dal vaſo moltiplicata nell' altezza dx dello ſtrato ydx. Verificandoſi ciò delle azioni di tutti gli ſtrati, che formano il gorgo, rendeſi manifeſto, che la ſomma delle predette azioni s' eguaglia alla grandezza bs moltiplicata nella ſomma delle altezze d'eſſi ſtrati, ch' è quanto a dire nell'altezza g del gorgo, onde s' abbia l'azione della gravità dell'acqua occupante il gorgo $= gbs$, conſeguentemente l' azione dell'acqua tutta contenuta nel vaſo $= abs = acz$.

COROLLARIO

Qualunque ſia la figura d'un vaſo KSMEFNTL ripieno di fluido, l'azione della ſua gravità è ſempre eguale al prodotto gbs, e ſerba la ragione compoſta dell'altezza verticale g del liquore, della ſua ſuperficie ſuperiore b, e dello ſpazietto parimente verticale s, pel quale la mentovata ſuperficie è calata abbaſſo. Queſto curioſo Teorema rende facilisſima la dimoſtrazione, che infuſa dell'acqua in due vaſi comunicanti di qualſivoglia figura, ſi formerà l'equilibrio, quando le due ſuperficie ſuperiori dell'acqua nell'uno, e nell'altro vaſo s'adatteranno allo ſteſſo piano parallelo all'orizzonte. S'eſprimano per b, B le nominate ſuperficie, che ſtanno fra loro a livello, e ſe pur è poſſibile, la ſuperficie b diſcenda per lo ſpazietto s, onde nel primo vaſo ſegua l'azione poſitiva gbs. Egli è chiaro, che da un tal vaſo è uſcita l'acqua bs, e che eſſendoſi alzato il livello del liquore nel vaſo ſecondo per una quantità d'acqua $= bs$, ha preſo queſta la forma d'un volume, la cui altezza $= \frac{bs}{B}$. A norma di ciò la gravità dell' acqua contenuta nel ſecondo vaſo è ſtata obbligata ad eſercitare l' azione negativa $gB \cdot \frac{bs}{B} = gbs$. Eſſendo pertanto eguali, e contrarie le due azioni, che ſuccedono ne' due vaſi comunicanti, l'una impediſce l'altra, nè ſegue alcun moto; perchè quanta forza viva genererebbe l'azione poſitiva, altrettanta ne eſtinguerebbe l'azione eguale negativa.

SCOLIO V.

Ora rieſce agevoliſſimo il determinare la velocità, colla quale l'acqua zampilla fuori del vaſo, ſenza traſcurare la forza viva dell' acqua, che capiſce nel gorgo. Avremo pertanto $abs = acz = \overline{ab - bs - bg} \cdot \frac{U^2}{2} + \overline{\frac{2cg}{3} + cz} \cdot \frac{u^2}{2}$, e ſoſtituendo in vece di U^2 il ſuo valore $\frac{c^2u^2}{b^2}$, ed eſ-

ſet-

fettuate le dovute operazioni $\frac{\sqrt{2abz}}{\sqrt{ac-cs-gc+\frac{2bg}{3}+bz}} = u$, e cancellati i termini cs, gc incomparabili, l'uno con ac, l'altro con $\frac{2}{3}$. bg, $\frac{\sqrt{2abz}}{\sqrt{ac+\frac{2}{3}bg+bz}} = u$.

COROLLARIO I.

Se la quantità bg è infinitamente minore di ac, si verificano tutte le conseguenze contenute nei Corollarj del Problema I.

COROLLARIO II.

Suppongasi, che bg corrisponda ad ac in proporzione finita, e nel principio del moto, quando bz è minima in paragone di ac, ci si presenterà $u = \frac{\sqrt{2abz}}{\sqrt{ac+\frac{2}{3}bg}}$, la quale velocità sta a quella, che abbiamo determinata nel Corollario I. del Problema I., come $\sqrt{ac} : \sqrt{ac+\frac{2}{3}bg}$.

Se essendo cresciuto lo spazio z, le grandezze ac, bg, bz avranno fra loro una relazione finita, si scoprirà altresì finita la velocità $u = \frac{\sqrt{2abz}}{\sqrt{ac+\frac{2}{3}bg+bz}}$; ma però minore di quella, che sta espressa nel Corollario II. del Problema I. nella proporzione di $\sqrt{ac+b} : \sqrt{ac+\frac{2}{3}bg+bz}$.

Finalmente quando bz sarà infinita relativamente ad ac, e per conseguenza ancora relativamente a bg, il che può verificarsi mentre bz è minima, troveremo, come nel Corollario III. del citato Problema, $u = \sqrt{2a}$.

COROLLARIO III.

Sia bg minima, e nello ſteſſo tempo infinita in confronto di ac, e ſul cominciare del movimento, quando bz può traſcurarſi reſpettivamente ad ac, ſarà $u = \frac{\sqrt{2abz}}{\sqrt{\frac{2}{3}bg}} = \frac{\sqrt{3az}}{g}$, cioè a dire infinitamente minore della celerità $= \frac{\sqrt{2abz}}{\sqrt{ac}}$, che ſupponendo poterſi negligere la forza viva dell'acqua contenuta nel gorgo, abbiamo ſcoperta nel Corollario I. del Problema I. La velocità per altro del preſente Corollario è maggiore di quella $= \sqrt{2z}$, che acquiſterebbe la maſſa cz ſollecitata per lo ſpazio z dalla ſua gravità.

Seguiterà altresì ad eſſer minima la velocità $u = \frac{\sqrt{2abz}}{\sqrt{\frac{2}{3}bg}}$, quando bz ſerba relazione finita con ac, e perchè divenga finita eſſa velocità, biſognerà, che bz riguardi bg con proporzione finita, onde s'abbia $u = \frac{\sqrt{2abz}}{\sqrt{\frac{2}{3}bg + bz}}$.

Divenuta poi che ſia la quantità bz infinita reſpettivamente a bg, il che interviene ſtando ancora dentro i confini delle grandezze minime lo ſpazio z, ne riſulterà, come nel Corollario III. del Problema I., $u = \sqrt{2a}$.

COROLLARIO IV.

Fingaſi finita l'altezza g del gorgo e finattantochè ſarà infinitesimo lo ſpazio z, avremo $u = \frac{\sqrt{2abz}}{\sqrt{\frac{2}{3}bg}}$, e l'acqua uſcita cz ſi muoverà con una minima velocità.

Ac-

Acciocchè la celerità del liquore giunga ad un valore finito, egli è d'uopo, che ſia parimente finito lo ſpazio z, ed in tal circoſtanza ci accorgeremo eſſere $u = \frac{\sqrt{2abz}}{\sqrt{\frac{2bg}{3}+bz}}$ ſempre minore di $\sqrt{2a}$:

Solamente quando foſſe $z = \infty$, avrebbe l'acqua ſcaturita cz fatto acquiſto dopo un tempo infinito della velocità equabile $= \sqrt{2a}$.

SCOLIO VI.

Oſſervandoſi, che l'acqua, che zampilla fuori d'un vaſo per un foro picciolo, perviene così preſto alla equabile celerità, che il ſenſo non ſene accorge; egli è evidente, che la Natura determina minima l'altezza g del gorgo, ricavandoſi dai ſovrappoſti Corollarj, che l'acqua guadagna la velocità equabile $\sqrt{2a}$, dopo aver corſo uno ſpazio inaſſegnabile in tempo infinitesimo, purchè non eſca dai limiti delle quantità immenſamente picciole l'altezza g del gorgo ſuddetto.

SCOLIO VII.

Siccome nell'indagare le leggi delle vibrazioni delle corde ſonore ſi ſuppone minima matematica la forza, che le ſtimola al moto, e le conſeguenze geometriche, che ſi deducono, s'adempiono poi fiſicamente, quando alla forza infinitesima ſi ſoſtituiſce la forza minima fiſica; non altrimenti le proprietà, che ſi ſono ſcoperte, fingendo infinitamente piccioli il foro aperto nel fondo del vaſo, e l'altezza del gorgo, ſi verificheranno fiſicamente, ſe il foro c ſarà aſſai riſtretto relativamente alla capacità del vaſo, e l'altezza g del gorgo aſſai picciola.

Collo ſteſſo metodo delle azioni ſi può trattare il caſo, quando il foro c, e la baſe b del vaſo cilindrico ſi riguardano in proporzione finita: ma con ciò ſi ſorpaſſerebbero quei confini, dai quali la preſente Annotazione vien circonſcritta.

SCHEDIASMA XXXVII.

De' fochi primarj, e ſecondarj delle lenti ſferiche.

LETTERA I.,

Che ſervì di riſpoſta ad una del celebre Sig. Marcheſe Giovanni Poleni, ſcritta all' Autore li 28. Settembre dell' anno 1716.

PEr ſoddisfare pienamente al deſiderio di VS. Illuſtriſſima ſarebbe neceſſario riformare in gran parte la Diottrica, ſcienza non per anche ridotta all'intiera ſua perfezione. Sin ora non ſono ſtati conſiderati, ſe non i fochi principali nelle lenti ſferiche, mentre le paraboliche, l'iperboliche, e le elettriche, ſopra di cui tanto e ſtato ſcritto, ſono bensì le migliori, quando l'oggetto ſia un punto indiviſibile; ma qualor ſi ſupponga di certa determinata grandezza, diventano aſſai peggiori dell'ordinarie. Il celebre Criſtiano Ughenio è ſtato il primo, che ſi ſia meſſo a conſiderare i fochi chiamati da me ſecondarj, ed a miſurare l'aberrazione de' raggi, che naſce dalla figura ſferica, ma non è credibile quanto le ſue concluſioni ſieno dalla verità lontane, non perche le ſue dimoſtrazioni geometriche odorino di paralogiſmo; ma perchè vinto dalla difficoltà della materia, fonda il ſuo diſcorſo ſopra una falſa ſuppoſizione, che debba cioè conſiderarſi come nulla, ovvero infinitamente piccola la groſſezza della lente.

Suppoſta una faciliſſima maniera di trovare i fochi principali, e ſecondarj, non è credibile quante verità importanti ci ſi preſentino, e quanti errori ſi dileguino per queſta ſtrada: ſebbene molto più mi reſta da ſcoprire di quello ho ſcoperto, e molti Teoremi ſono così ardui, che ſin ora non ho potuto ſuperarli nè per via d' Analiſi, nè col mezzo della Geometria.

E per dar un ſaggio della premeſſa dottrina, m'ingegnerò d'applicarla al noſtro propoſito, ſe non con tutta l'eſattezza Geometrica, almeno con tanta, che potrà ſupplire al biſogno, riſtringendomi ad una ſola refrazione, eſſendo facile l'eſtenderla a' caſi più compoſti.

Sia dunque la linea circolare GF (Fig. 143.) quella, che divide due mezzi, uno più raro, l'altro più denſo. Sia BC l'oggetto eſpreſſo da una linea, in cui debbano conſiderarſi varj punti. In primo luogo conſidero il punto di mezzo A, e tirato il raggio ADQ, che paſſa per il centro D del ſegmento GF, non ſarà eſſo ſoggetto a qualſiſia refrazione.

Immaginiamoci due raggi da una parte, e dall'altra dell' aſſe AD allo ſteſſo infinitamente proſſimi; s'uniranno eſſi all'aſſe nel punto Q, che ſarà il foco principale del punto A.

Si-

Similmente fatta riflessione al punto C, è tirata la retta CDP, che passerà per il centro D irrefratta, i raggi, che si partono dal punto C, infinitamente prossimi all'asse GL, s'uniranno in P foco principale del punto C; e così quelli del punto B s'uniranno in R: onde dovendosi dir lo stesso di tutti gli altri punti dell'oggetto BC, la curva PQR sarà la curva de'fochi principali.

COROLLARIO I.

Se le distanze DA, DB, DC saranno o eguali, o quasi eguali, come accade quando l'oggetto è lontanissimo dal centro della superficie refringente GF, la curva PR sarà un arco di cerchio, com'è facile a dimostrarsi. Nelle altre ipotesi dipenderà dalla figura dell'oggetto BAC.

COROLLARIO II.

Considero di bel nuovo il punto medio A, e perchè oltre a'raggi, che diffonde infinitamente prossimi all'asse, illumina anche tutta la curva GF, vediamo cosa succede ne'due raggi estremi AF, AG. Questi per le leggi della refrazione si congiungeranno in un punto di mezzo tra D, e Q, per esempio nel punto O, e li raggi refratti saranno GO, FO, e tutti i raggi, che cadono dal punto A nelle porzioni di curve GE, EF, verranno ad unirsi con l'asse principale ne'punti di mezzo tra O, e Q, così che la retta OQ sarà l'ampiezza di foco del punto A, che raggia sopra tutta la curva GEF, o sia l'aberrazione de'raggi per causa della figura.

Passo ora al punto estremo C, il di cui asse è CLDP. Tirato il raggio estremo CF, prendo l'arco LH uguale all'arco LF, e li due raggi CH, CF si uniscano nel punto M. Egli è certo, che li raggi incidenti dal punto C nell'arco HLF s'uniranno a due a due con l'asse CP ne'punti di mezzo tra M, P, e parimente quelli del punto B ne' punti di mezzo tra N, R.

Resterebbero da considerarsi i raggi, che dal punto C cadono nella porzion della curva GH, come sarebbe il raggio CG, che rifratto verrebbe a congiungersi con l'asse CP nel punto *e*; ma perchè questo raggio, come altresì tutti gli altri tra G, ed H, è solo, e non ha il raggio corrispondente dalla parte opposta, così non può egli dipingere immagine, e non serve che a turbare la pittura, quando s'inoltra da *e* sino in *y*.

COROLLARIO III.

Li fochi M, O, N sono chiamati da me secondarj: e perchè al punto A corrisponde il foco O del raggio estremo AF refratto in FO,

ed

ed alli punti C, B li ſochi M, N; corriſponderannō altresì a tutti i punti dell'oggetto BC i loro ſochi ſecondarj, che ſaranno tutti nella curva MON.

Queſta curva viene rappreſentata ottimamente dalla figura, ed è compoſta di due parti MO, ON, che formano un angolo curvilineo nel punto O; e la ragione ſi è, che l'ampiezza del ſoco QO appartenente al punto A è la maſſima, giacchè maſſima è l'apertura della lente EF; e per la ſteſſa cauſa, come che l'apertura LF, LH del punto eſtremo C è la minima, così alla ſteſſa riſponde la minima ampiezza di ſoco MP. Non ſarà frattanto difficile l'indagare la natura della curva MON.

Lo ſpazio compreſo tra le due curve PQR, MON, e le due rette MP, NR è quello, che circoſcrive li ſochi di tutti li punti dell'oggetto BAC, in maniera che preſo in detto ſpazio un punto ad arbitrio, ſarà facile il determinare quale ſia il punto dell'oggetto, e quali li due punti corriſpondenti della lente egualmente diſtanti dal loro aſſe, a cui il punto del ſoco appartiene.

Per eſempio il punto *d* è il ſoco de' due raggi, che uſcendo dal punto C dell'oggetto, vanno ad incontrare la lente ne' due punti egualmente diſtanti dall'aſſe CL ſituati fra L, F, ed L, H.

A queſto paſſo ci ſi fa innanzi una quiſtione non men curioſa, che aſtruſa, e conſiſte nel determinare in qual ſito ſi formi l'immagine più diſtinta. L'eſperienza c'inſegna non eſſere il ſuo luogo in PQR, e molto meno in MON, ma piuttoſto in un ſito di mezzo fra le dette due curve, come *dcg*. In fatti ricevuta in carta l'immagine, dov'è più chiara, e diſtinta, per eſempio in *c*, ſe a poco a poco ſi accoſta la carta alla lente, o da eſſa ſi allontana, non ſi ſcancella tutta in una volta l'immagine, ma ſi conſerva per qualche ſpazio, quantunque ſempre più confuſa; ſegno evidente, che la più diſtinta immagine non è nè in Q, nè in O. Eſſendo certo, che nel ſito inferiore al punto Q, e nel ſuperiore al punto O non ſi può formare immagine, perchè non ſi fa interſezione de' raggi ſimili; ne ſegue, che principiandoſi a dipingere l'oggetto in MON, e terminandoſi la pittura in PQR, ne' ſiti predetti l'immagine ſarà confuſa, e la maggior diſtinzione ſarà in un punto medio, come *c*, ſebbene poi rieſce difficiliſſimo il determinarlo geometricamente.

Da ciò ſi rende manifeſta l'imperfezione delle noſtre lenti, nelle quali i ſochi principali reſtano turbati da ſecondarj, ed i ſecondarj da principali. Per eſempio li due raggi BG, BI, che refratti in GN, IN formano il ſoco ſecondario N, prodotti che ſieno, il primo viene a cadere in S fuori dell'immagine PR, il ſecondo in *a* dentro l'immagine ſteſſa; onde il primo fa, che l'immagine non ſia ben terminata, il ſecondo, che ſia confuſa.

Le premeſſe meditazioni ſervono mirabilmente a dimoſtrare la mia aſſerzione, che ogni punto della retina riceve più forte impreſſione dal Sole in parte eccliſſato; ſebbene poi è minore la parte, che riceve l'impreſſione.

Sia

Sia per tanto BC il diametro del Sole, ed HI l'apertura della lente, PQR la linea de' fochi principali, *dcg* quella de' ſecondarj, riſpondendo l'ampiezza di foco *c*Q all'apertura HI. Figuriamoci, che s'eccliſſi parte dell'oggetto BC, di modo che s'impiccioliſca la linea luminoſa BC, altro non accaderà, ſe non che ſi ſcancellino da una parte, e dall'altra i fochi contenuti a cagion d'eſempio da' due miſtilinei *Pdku*, *Rgib*; onde lo ſpazio, che comprende tutti i fochi nella preſente ipoteſi, ſarà *Ukib*. Nel rimanente ſtarà ferma l'ampiezza di foco *c*Q, e le curve *Ub*, *Ki*, come pure tutte l'altre, che compongono il prenominato ſpazio, riceveranno dai raggi quaſi la ſteſſa impreſſione di prima; mentre lo ſcancellarſi una parte dell'immagine non leva la forza a' raggi, che dipingono l'altra parte, che ſi conſerva. Ho detto quaſi, perchè ſo, che reſterebbero tolti di mezzo alcuni raggi di poco momento appartenenti a' punti lucidi eccliſſati, e che obbliquamente venivano a cadere nello ſpazio *vkib*, almeno nelle lenti ordinarie, perchè nell'occhio ciò non accade, come toccheremo in progreſſo. Sarà dunque minore lo ſpazio delle immagini, ma non minore l'impreſſione: il che ec.

Di più ſtando pure l'oggetto BC, come ſopra, in parte eccliſſato, ſi faccia maggiore l'apertura della lente da H ſino in G, e da I ſino in F; ed in queſto caſo non diventerà più grande l'immagine *vb*, come nè meno la *ki*, ma ſolo creſcerà l'ampiezza de' fochi, come per eſempio il punto lucido A in cambio dell'ampiezza di foco Q*c*, avrà l'ampiezza QO, e così tutti gli altri proporzionatamente: onde lo ſpazio de' fochi non ſarà più *vkib*, ma UMNB, ed in conſeguenza la linea PR, oltre l'antica impreſſione, verrà a ricevere tutti que' raggi, che refratti dalle curve GH, IF vengono a congiungerſi nello ſpazio fra le curve MON, *kci*, ed indi di nuovo ſeparati feriſcono la curva *Ub*: ſarà dunque maggiore l'impreſſione, ſuppoſto l'oggetto in parte eccliſſato, mentre ſi ammette, che in queſto caſo ſia maggiore l'apertura della lente, e della pupilla: il che ec.

Queſt'aſſerzione tanto più trova luogo nell'occhio, quanto che la Natura corregge con una mirabile ſagacità i difetti delle lenti ordinarie con levare l'ampiezza de' fochi, e renderla nulla. Tutti i raggi dunque, che partono da tutti i punti dell'oggetto, e cadono ſopra la curva GF, i di cui fochi reſpettivamenre nelle lenti di vetro vengono a formare lo ſpazio PMNR, dalla Natura vengono obbligati ad unirſi nella linea *dcg*, o almeno in uno ſpazio indefinitamente picciolo, così che quanto più aperta ſarà la pupilla, reſterà introdotta maggior quantità di raggi, ed in conſeguenza la retina *dcg*, in cui tutti i fochi vengono a finire, riceverà una maggior impreſſione. Non è maraviglia dunque, ſe nell'occhio è ſempre diſtinta, e ben terminata l'immagine; mentre il punto A dell'oggetto in vece di ſtendere tutti i ſuoi fochi per la linea QO, li reſtringe nel ſolo punto *c*, con che ſi toglie la confuſione, perchè ogni punto della retina altri raggi non riceve, ſe non quelli, che partono da un ſolo punto dell'oggetto.

Come poi la Natura ottenga l'intento, non è difficile da ſpiegarſi con i Canoni della Diottrica, ſuppoſti nuovi Teoremi, che io andrò indicando; mentre ſarebbe troppo proliſſa la dimoſtrazione.

Primo ſia una lente conveſſo-conveſſa compoſta di due archi di cerchio dello ſteſſo diametro ACBD (Fig. 144.) dico, che ſe ſi allontaneranno le due porzioni ACB, ADB, di maniera che ſi formi la figura ACBFDE tutta ſolida, e della ſteſſa materia refringente, quanto più ſi diſcoſteranno fra loro li due archi ACB, EDF, tanto minore ſarà l'ampiezza de' fochi, ſino ad un certo ſegno però, mentre avremo la minima aberrazione, quando l'aſſe CD ſarà eguale a due ſemidiametri, e le due porzioni ACB, EDF ſieno parti oppoſte d'una ſfera. Che ſe ſi faceſſe ancora maggiore la diſtanza, e l'aſſe CD foſſe più grande del diametro della ſfera ſuddetta, l'ampiezza de' fochi tornerebbe a creſcere: onde ſi ſcopre manifeſtamente la ragione, per cui la Natura ha dato la figura ſferica, e non lenticulare a tutto il compleſſo degli umori dell'occhio.

In ſecondo luogo la varietà delle refrazioni, per cui ſi paſſa prima dall'aria all'umor acqueo, indi al più denſo, ch'è il criſtallino, e di nuovo al più raro, cioè al vitreo, cagiona due maravigliosi effetti; primo, che ſi abbrevia in maniera l'aberrazione, che diventa quaſi nulla, o almeno minima; ſecondo, che la linea de' fochi, in cui ſi dipinge l'immagine, s'accoſta tanto alla ſuperficie interiore dell'occhio, che quaſi s'unisce con la conveſſità del diafano, e termina nella retina, che viene a veſtire l'umor vitreo; altrimente ſarebbe ſtata obbligata la Natura ad allontanare la retina dall'occhio, e formarci due tubi in capo con grave incomodo dell'organizzazione. Si aggiunga, che l'umore di mezzo, vale a dire il criſtallino, nè ben ſolido, nè ben fluido, è diſpoſto a diverſi ſtrati d'inegual denſità, più rari verſo la ſuperficie, e più denſi verſo il centro, come ſi ſcopre, quando ſi ſciolga a poco a poco nell'acqua; onde il raggio viene a patire innumerabili refrazioni, e con ciò la Natura ottiene tanto più facilmente i diviſati effetti, maſſime avendo formata la lente del criſtallino in maniera, che la parte più ottuſa è voltata verſo gli oggetti, e la più acuta verſo la retina. Con queſti principj non ſenza difficoltà dimoſtrati per via di Geometria ordinaria, avendo ſperimentata inutile l'analiſi, io ſono venuto in cognizione della vera teoria della viſione, e ſolo mi reſta da conſiderare con qual artifizio la Natura corregga il difetto, che naſce dall'aberrazione Newtoniana, ſopra di che non ho ſaputo per anco ſoddisfare a me ſteſſo.

Con l'occaſione, che mi ſi è preſentata, ho ſtimato bene d'indicare a V.S. Illuſtriſſima le verità da me ritrovate, affine di ſentire il ſuo prudentiſſimo parere.

Nell'eſtratto, che ho per le mani, della grand'Opera del Sig. Ermanno io ci trovo più difficoltà di quello io ſupponeva, per mettere in tutto il ſuo lume, e con la dovuta brevità non ſolo i gran principj, di cui è feconda, ma inoltre la mirabile induſtria, con la quale

adat-

adatta i principj a' Problemi particolari; tanto più che i Teoremi sono espressi in una forma sì sublime, e sì generale, che non si poteva attendere, se non da un soggetto tanto versato nell' interior Geometria.

Avrà finalmente VS. Illustrissima la bontà di compatire il lungo tedio, che con le presenti le reco, e di credermi a tutta prova.

LETTERA II.,

Colla quale l' Autore rispose ad una lettera del Sig. Marchese Poleni in data de' 18. Marzo dell' anno 1717.

Non aveva V. S. Illustrissima alcun motivo di replicare alla mia lunga, e pur troppo nojosa lettera; sì perchè in essa altro non si conteneva, che una semplice risposta ad una sua antecedente; come pure perchè mi sono abbastanza note le sue dotte occupazioni: ond' io non pretendo mai di frastornarla da' suoi studj più serj, acciò perda il tempo, e l'opera intorno le mie speculazioni da me conosciute, e confessate per debolissime. Gli uffici di scusa per tanto, che Ella per sua bontà passa meco in questo incontro, sono effetti della sua benignità, e non di qual si sia obbligazione.

Osservo nel tempo stesso la difficoltà, che da Lei s'incontra nelle materie diottriche. Ella pensa, che le curve, in cui si terminano i fochi, sieno più rimote dalla pupilla, che non è la retina, e che non ostante ciò l'immagine paja distinta, perchè sia quasi la stessa l'azione de' raggi, o urtino questi nella retina nel punto preciso della loro congiunzione, o poco prima, o poco dopo, e di ciò aversene esperienza nella Camera oscura, ove l'immagine, che sembra la più perfetta, non apparisce in un punto indivisibile, ma in qualche sensibile distanza. Soggiunge poi, che sminuita la grandezza d'un oggetto luminoso, minor copia di raggi viene a ferir l'occhio; ma che quelli, che pur vi giungono, non mutano natura a causa di quelli, che si perdono.

Già sa V. S. Illustriss., che quando geometricamente si parla, si tocca il preciso, e quando poi si fa passaggio dalla Geometria alla Fisica, il preciso si cambia in prossimo. Le sue osservazioni sono verissime, ed io non sono persuaso, che l' occhio sia una struttura così perfetta, di modo che in esso non abbia a notarsi qualunque minimo difetto: dirò bensì, che le mancanze sono insensibili, e corrette a bello studio dalla Natura con un'arte impareggiabile; onde chi si prende la briga di contemplarlo più da presso, dee prescindere da queste piccole imperfezioni, ed indagarne la conformazione in tutto il rigore di Geometria, giacchè scoperto per questa strada l'artifizio inimitabile, con cui è stato organizzato dalla Natura, dall'occhio puramente ideale può far passaggio al reale, e considerare, che non ostante la contumacia della materia fisica, la visione è così perfetta, che poco più sincera si sperimenterebbe in un occhio lavorato da una scrupolosa Geometria.

Per cagion d'esempio sia vera l' ipotesi di V. S. Illustrissima, che i raggi non vanno ad urtare nella retina nel punto preciso della loro unione: sarà frattanto necessario, ch'Ella confessi, che la loro unione si faccia in un sito così prossimo alla retina, che fra un punto, e l'altro non ci sia distanza sensibile, e che un punto possa prendersi per l'altro fisicamente; altrimenti come potrebbe spiegarsi il difetto de' Presbiti, e de' Miopi, ne' quali si sa, che i raggi o troppo tardi, o troppo presto si uniscono, e dee in conseguenza esser corretto con le lenti convesse, o concave.

Nella Camera oscura non è maraviglia, che si osservi l'immagine con quasi egual distinzione in qualche spazio sensibile. Le lenti di vetro, che anno una grande ampiezza di foco sono la cagione di questo effetto; conciossiachè li raggi, che vengono da varj punti dell' oggetto, e si rifrangono da varj punti della lente, si uniscono in diverse distanze, onde nello sparire d'un foco, alterandosi la distanza, suppliſce l'altro, ma pure l'immagine s'osserva mal terminata: non così nell'occhio, in cui dalla Natura resta corretta qualsisia aberrazione soggetta a' sensi.

In prova di ciò debbo notare essere la Natura più delicata nelle sue operazioni di quello c'immaginiamo. Sin quì la Diottrica non ha messo in uso, se non lenti imperfette; mentre le caustiche del Cartesio, quand'anche potessero ridursi alla pratica, il che mi sembra impossibile, riuscirebbero peggiori dell altre, supposto che l' oggetto non fosse un punto. Dopo dunque d'aver esaminate le lenti circolari di vetro, e scoperte le loro mancanze, mi sono avanzato a considerare quelle, che sono composte di due diafani, cioè di vetro, e d'acqua ricordate dall'incomparabile Sig. Newton. Applicata ad esse la mia Teoria, ho scoperte alcune loro ammirabili proprietà, che mi sembrano degne della sua erudita curiosità.

Sieno due pezzi di vetro lavorati, come nella Fig. 145., eguali, o ineguali, poco importa, purchè sieno soggetti ad una certa geometrica determinazione li semidiametri delle circonferenze tanto esterne, quanto interne, che compongono le accennate lunule, ed in oltre possano perfettamente unirsi li due vetri a formare una lente intiera, in cui la cavità, che verrebbe a restar vuota nel mezzo, da me si suppone riempiuta d'acqua. Sia la retta AB asse della lente, ed il raggio infinitamente prossimo, e parallelo ad AB si congiunga con l'asse stesso nel punto E. Prendo una data apertura DB, che sarà sempre la medesima anche ne' seguenti casi, e condotto il raggio CD parallelo ad AB, ho scoperto col calcolo, e con l'assezione geometrica, che questo dopo quattro refrazioni verrà ad unirsi con l'asse in F, e la distanza FG sarà maggiore di EG; così che EF sarà l'aberrazione corrispondente all'apertura BD nella nostra ipotesi, che io chiamerò negativa; perchè il raggio estremo CD si unisce con l'arte in maggior distanza dall'infinitamente vicino. Fra li due vetri immaginiamoci frapposto un tubo cilindrico vuoto nel mezzo HH, come nella figura 146., e se sarà E il foco del raggio infinitamente prossimo, F sarà il foco del raggio estremo

mo CD; onde eſſendo la diſtanza FG minore di EG, tutto al riverſo del caſo antecedente, chiamerò poſitiva l'aberrazione EF.

Comprenda V. S. Illuſtriſſima, che paſſandoſi ne' predetti due caſi dall'aberrazione negativa all'affermativa, egli è neceſſario, che ſi dia un terzo caſo, e che in una determinata altezza del tubo HH, che non è difficile a ritrovarſi per via d'Analiſi, o di Geometria, i due raggi, uno infinitamente proſſimo all'aſſe, e l'altro CD, da' quali viene determinata l'apertura BD della lente, s'uniſcano nel medeſimo punto, ed i due punti F, E ſi confondano, ed in conſeguenza l'aberrazione diventi nulla. Ho detto nulla, non perchè io creda, che la predetta coſtituzione di lente acqueo-vitrea ſia perfettamente cauſtica, eſſendo che i raggi paralleli, che vengono ad urtar nella lente fra due punti B, D, non an preciſamente il loro foco nel punto medeſimo, in cui concorrono i due raggi proſſimo, ed eſtremo, ma non oſtante ciò deviano così poco, che ſe il punto dell'unione di tutti i raggi non è lo ſteſſo geometricamente, almeno può prenderſi per tale fiſicamente. Nelle lenti comuni di vetro a miſura dell'apertura della lente creſce l'aberrazione; onde all'arco BD corriſponde maggior ampiezza di foco, di quella riſponde all'arco minore BI: ma nelle noſtre ſino al punto I va creſcendo l'aberrazione, e da I in D torna a decreſcere, di modo che come abbiamo detto, i due punti B, D anno lo ſteſſo foco. Aggiungaſi, che nelle lenti acqueo-vitree l'aberrazione è aſſai minore, che nelle volgari, e ſpeſſe fiate, ſe il calcolo non m'inganna, in eguali circoſtanze, e in proporzione come uno a dieci, onde per tutti i capi ſi manifeſta la perfezione delle noſtre lenti.

Reſtava ſolo a vederſi, ſe l'eſperienza corriſpondeva alla Teorica, tanto più che io ſoſpettava, che non veniſſe a turbare il tutto quella ſorte di aberrazione, che dal ſuo Autore chiamaſi Newtoniana, e che non dipende dalla figura, ma dalla varia refrangibilità. Il Sig. Giovanni Rizzetti ne preſe ſopra di ſe il carico, e fabbricati i vetri, trovò il modo d'adattarli, che poteſſero facilmente ricever l'acqua nel loro vano, e diſcoſtarſi uno dall'altro a miſura del biſogno.

Per quello poi mi aſſicura V. S. Illuſtriſs., che il Sig. Niccolò Bernoulli, che degnamente occupa la cattedra delle Matematiche in coteſta Univerſità, ha qualche ſtima particolare della mia debolezza, ciò è tutta corteſia del mentovato Sig., a cui per una sì buona diſpoſizione io rendo le dovute grazie. Per conto mio la piccola conteſa avuta ſeco non ha punto alterato il concetto, che di già aveva dentro me ſteſſo formato dalla ſua abilità; ed incontrerò volentieri l'occaſione di ſervirlo, tanto più, quanto per ora è fatto de' noſtri.

Io ſono dietro alla ſoluzione d'un arduo Problema ſfuggito alla perſpicacia de' Sig. Newton, ed Ermanno, che ci anno penſato ſopra, ma non ne ſono venuti a capo, forſe per non aver eſſi nelle mani un metodo di ſeparar le variabili, che poteſſe eſtenderſi alla ſeguente queſtione. Poſto, ch'un pendolo ſi vibri in una cicloide, e che la reſiſtenza del mezzo ſia come la velocità del mobile, determinare in ogni punto del-

della curva la velocità del pendolo ſteſſo. Quando la cicloide ſi finga ſteſa in una linea retta, la curva delle reſiſtenze è ſtata creduta dal Sig. Nevvton proſſimamente una ellifſi, e dal Sig. Ermanno una curva traſcendente ſin ora ignota, come dallo Scolio pag. 338. Ambidue ſi ſono ingannati; mentre variandoſi la ragione della reſiſtenza alla velocità attuale del mobile, che ſebbene ſi pone coſtante, può però prenderſi in qualunque data ragione a miſura della maggiore, o minore tenacità del fluido, ſi varia anche la curva delle velocità, e delle reſiſtenze; onde infinite curve parte Algebraiche, e parte traſcendenti, ponno ſatisfare al quiſito. Per due diverſe ſtrade ſono pervenuto alla bramata ſoluzione, di cui mi ſono invaghito, avendo ſcoperte alcune coſe ſin ora ignote a' Geometri, fra le quali il ſeguente Teorema, che le curve per eſempio paraboliche, il di cui eſponente è immaginario, dipendono nella lor coſtruzione dalla quadratura del cerchio, e non ſono curve immaginarie, come tal uno ſi ſarebbe dato a credere. Se V. S. Illuſtriſſima parteciperà queſto Problema al Sig. Bernoulli, ed avrà la bontà di ſarmi ſapere il ſuo ſentimento, l' aſcriverò a ſommo favore, e ſe mi verrà da Lei comandato, le traſmetterò, ſe non altro l'analiſi, con la quale ſi può facilmente far paſſaggio all'affezione Geometrica.

E' pregata finalmente V.S. Illuſtriſſima a darmi notizia di qualche novità letteraria, come altresì di ciò, che da Lei ſi va meditando; mentre io col ſolito oſſequio mi proteſto.

SCHEDIASMA XXXVIII.

Omnes radii paralleli in ſphæram incidentes duplicem refractionem patiuntur.

SIt ſphæra AC (Fig. 147.) cujus axis ACD tranſiens per centrum B: dico omnes radios axi parallelos, qui veniunt ex medio rariori, & incidunt in ſuperficiem ſphæræ denſioris, geminam refractionem pati, ita ut nullus reflectatur, quacumque poſita proportione refractionis.

Sit diameter FBK normalis ad axem, & radius EF infinite proximus rectæ tangenti circulum in puncto F ſit poſtremus ex incidentibus, qui inflexus a prima refractione perveniat ad punctum D, ſecetque in puncto G inferiorem circuli peripheriam, & cum FD ad DB ſit in ratione refractionis, quæcumque poſſit eſſe hæc ratio, dico

Primo prædictum radium refractum FG in puncto G novam pati refractionem.

Secundo, quod ſervata eadem refractionis lege, ſi radius ex puncto F incidat in quodcumque punctum arcus FG, inter F, & G, refractionem pati.

Ad utramque aſſertionem demonſtrandam per centrum B, & per punctum G agatur recta BGH, & ex puncto D ad rectam BH demittatur per-

perpendicularis DH: dico GD ad DH esse in proportione refractionis FD ad DB. Producta GB usque ad peripheriam in I, ducatur FI. In triangulo DFB angulus ad punctum F, seu angulus GFK insistit arcui circulari GK, & in triangulo FGI angulus FGI insistit arcui FI: sed prædicti arcus GK, FI sunt æquales, anguli enim GBK, FBI oppositi ad verticem sunt æquales; ergo angulus BFD est æqualis angulo FGI: rursus in iisdem triangulis DBF, IFG anguli ad puncta B, & F sunt æquales, utpote recti, primus ex constructione, secundus, quia est in semicirculo; ergo triangula DBF, IFG sunt similia: sed triangulo IFG est simile etiam triangulum DHG ob æquales angulos ad punctum G, & insuper angulos rectos ad puncta F, & H; ergo triangulum GDH simile est FDB; ergo FD : DB : : GD : DH. Hinc si per punctum G ducatur GL parallela ipsi HD, erit GL radius refractus puncti G.

Cum autem linea DH sit normalis ad BH, evidens est, facta eadem constructione, radium GL esse ultimum refractum: quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

Poterat etiam demonstrari eadem propositio ex mirabili circuli proprietate, scilicet, quod sumpto ad libitum puncto G, & ducta FGD, rectangulum DFG semper est constans, & æquale duplo quadrato FB. Hoc autem patet ex sequenti analisi.

Sit $BC = a$, $CD = x$, rectangulum $ADC = 2ax + x^2$: sed rectangulum ADC = rectangulo FDG; ergo $FDG = 2ax + x^2$, sed quadratum FD æquale duobus quadratis FB, DB, hoc est $2a^2 + 2ax + x^2$; subtrahe rectangulum $FGD = 2ax + x^2$, remanet rectangulum $DFG = 2a^2$: quod erat demonstrandum.

SCHEDIASMA XXXIX.

Dell' analogia fra i suoni, ed i colori, e del vero metodo di filosofare in Fisica.

LETTERA I.

Del Padre D. Gio: Bernardo Tisenti C. R. S. all' Autore.

HO scorsa ultimamente l'Ottica del Sig. Nevvton, in cui bisogna certamente ammirare la scelta delle sperienze così ingegnose, che vi si trovano, così connesse, così cospiranti ad uno scopo, e cotanto circostanziate. Mi par in oltre di poter dire, riguardo ad alcune cose, ciò che del Descartes dicea Leibnizio, ch'ella c'introduce nell'Anticamera della verità: in fatti o non potiamo noi del tutto entrare in quest'anticamera, o non vi è altra porta da penetrarvi, che per i Feno-

nomeni, e per la Geometria. Ma un Fiſico, credo io, deve andare più lungi, col fabbricar qualche Teoria ſopra i Fenomeni, e particolarizzare le idee aſtratte della Geometria. Per avventura Deſcartes ha inteſo queſto più del Sig. Nevvton, e attaccatoſi fortemente al ſuo gran Principio dell' Idee chiare, e diſtinte, che ſi prendono unicamente da una meccanica ſoggetta ai ſenſi, ſi abbandonò troppo alle Ipoteſi, e alle analogie dei moti ſenſibili. Ma ſe la natura ſi poteſſe per queſta via di una intelligibil meccanica ſeguitare, io non vedo perchè non doveſſe coltivarſi il ſuo metodo. Il Sig. Nevvton medeſimo nelle Quiſtioni dopo l'Ottica pare più pender a queſto metodo, che ad altro, quando vuol rendere ragioni fiſiche di qualche Fenomeno. Lo vediamo ſupporre ora un Fluido etereo per eſplicar la Gravità, e l'azione de' corpi sù la Luce, con una certa gradazione di denſità nelle parti di eſſo fluido, ora effluvj intorno la calamita, ec. Può eſſere, che io intraprenda a ſpiegar la ſua ottica più fiſicamente di quello egli ha fatto. Io ſtabiliſco per Principio, che i Fluidi Naturali ſono eterogenei, che un tal fluido è la Luce, le cui parti varian perciò in groſſezza, e forza, o vibrazione. Un certo tremore nel timpano, o nei nervi dell' Udito porta il ſenſo di un certo ſuono, e ſe vi è un certo accordo nelle vibrazioni delle corde ſonore, queſto ci cagiona un grato ſentimento. Perchè non potrebbe eſſere altrettanto de' Nervi Ottici percoſſi dai raggi con un certo grado di forza, o ſeparatamente, o più inſieme? E certo ſi ſente un qualche accordo di colori, che diletta, come uno di ſuoni, ch'è grato. Se a V. S. Illuſtriſſima non riuſciſſe di troppo incomodo, ardirei pregarla di qualche ſuo ſaggio sù l'analogia dell' impreſſioni del fluido aereo sù l'orecchio coll' impreſſioni del fluido luminoſo sù l'occhio, ed in oltre, ch'Ella ſi prendeſſe la pena di eſaminar due luoghi del ſuddetto Libro del Sig. Nevvton, che ſono conſimili; uno nell'Ottica ſteſſa (1); l'altro nelle Quiſtioni (2), ove ſi parla dell'alternativa del Lume nel rifletterſi, e nel traſmetterſi delle lamette traſparenti. Puoſſi intendere ciò, che dice l'Autore, del Fluido etereo elaſtico, colle cui vibrazioni ora coſpiri, ora no il moto dei raggi? ovvero ha V. S. Illuſtriſſima qualche nuova ſpiegazione d'un fatto così ſorprendente? Egli mi pare la coſa più ſtrana del mondo, e il Fenomeno più difficile di tutta l'Ottica. Come la ſteſſa lametta o aerea, o di acqua, o d'altro ſottil mezzo, ſolo perchè a tutte le parti della ſua ſuperfizie non corriſponde la ſteſſa groſſezza, haſſi da tingere quì d'un colore, là d'un altro con l'ordine, e ſucceſſione, che ſi dice nella ſperienza? E ſe vi cada ſopra un ſolo lume omogeneo, per eſem-

(1) *Pag.* 279. (*io mi ſervo dell'edizione latina di Londra* 1719.) *dopo alcune coſe: cumque radius aliquis ſit in ea vibrationis parte, quæ cum motu ſuo conſpiret, tum eum per ſuperficiem refringentem facile tranſmitti, &c. Opt. Lib.* 2. *Part.* 3. *Prop* 12.

(2) *Quæſt.* 29. *pag.* 376. *Ad hæc, quòd radii luminis* alternas *habeant facilioris reflexionis; & facilioris tranſmiſſus* vices, *&c.*

eſempio, roſſo, o violetto; perchè ſi fanno un sì, un nò quelli annelli roſſi, o violetti, reſtando in mezzo a loro que' vuoti, per cui paſſano gli ſteſſi colori, che vanno a dipingere ſopra una ſuperfizie bianca poſta di dietro altri annelli pure roſſi, o violetti oppoſti a que' vuoti rimaſti fra i primi della lametta? Anzi perchè quella parte della lametta, che traſmette il lume di un colore, riflette un altro? ed altre maraviglie. Io le confeſſo, che mi ſembra quì la Natura affettare ſe mai la maſſima oſcurità, e bizzarrìa di condotta. Ho cercata, e dimandata ad altri ſempre inutilmente qualche meccanica ragione, (io voglio dire ſciolta dalla cortina di qualità occulte, come ſarebbe un' attrazione, di cui non ſi ha idea) in ſomma qualche ragione appoggiata ad idee di corpo, e di moto, non ad idee indefinite di Geometrìa, come ſono x, od y nell' Analiſi, prima che ſi abbiano determinate. Se ſi può ſpiegare meccanicamente la rifleſſione, e la riſrazione del Lume, perchè non ſi può rendere ragione di un Fenomeno, ch'è ſolo un accidente di quelle? E' pure un accidente di quelle proprietà, che il lume con una certa incidenza ſopra il mezzo differente rifrangaſi, e con un' altra più obbliqua riflettaſi. Ma queſto ancora quanto è ſtrano? Conoſcendo io i progreſſi di V. S. Illuſtriſſima in ogni parte delle più belle cognizioni naturali, ed ancora la facilità, con la quale è ſolita benignamente impartire ad altri i ſuoi lumi, non ho avuta difficoltà a dimandarle ſopra tal materia il ſuo ſentimento; nè dubiterò a rettificar ſopra di eſſo i miei penſieri, o a cangiar qualunque Ipoteſi io poteſſi aver conceputa. Attenderò con tutto il ſuo comodo le ſue grazie, e con tutto il poſſibile riſpetto mi dico.

Padova 6. Luglio 1736.

LETTERA II.

Dell' Autore al Padre D. Gio. Bernardo Piſenti.

Dopo un lungo ſoggiorno in Friuli reſtituitomi finalmente a Caſa trovo un gentiliſſimo foglio di V. S. Reverendiſſima, in cui varj particolari ſi comprendono, ai quali non ſi vuole riſpondere, come dir ſogliamo, ſu due piedi: tanto più che biſognerebbe entrare in una delicata quiſtione intorno i metodi di filoſofare in Fiſica, e ſpiegare alcuni de' più aſtruſi, e complicati Fenomeni dell' Ottica Nevvtoniana.

Nella preſente lettera dirò qualche coſa concernente l'analogiſmo tra il ſuono, e la luce, ſopra la quale in altro tempo ho io ſeriamente penſato, ſenza poter mai ſatisfare a me medeſimo.

Nei ſuoni tre proprietà io conſidero, cioè a dire primieramente il tuono, che ſi varia in paſſando dal grave all'acuto, o al roveſcio: ſecondariamente il piano, ed il forte, ſecondo che l'impreſſione nel noſtro orecchio, perſiſtendo lo ſteſſo tuono, ſi fa più riſentita, o più lan-

guida; in terzo luogo la diverſità, che paſſa fra ſuono, e ſuono, come per eſempio quella, che ſi ravviſa fra la tromba, ed il violino.

Ognuno ſa, che la prima affezione dipende dai tempi, e la ſeconda dalla maggiore, o minore eſpanſione dell'onde aeree, alla quale corriſponde il maggiore, o minore ſtiramento delle fibre del ſenſorio. Su queſto punto ho io data fuori una diſſertazione inſerita nei ſupplementi al Giornale d'Italia, inveſtigando, qualmente la forza degli obbietti venga modificata dalla reazione degli Organi. La terza affezione è più malagevole da concepirſi; concioſſiachè dannoſi ſuoni totalmente differenti, i quali fra loro convengono, e nel tempo delle oſcillazioni, e per la forza, che obbliga le noſtre fibrille a piegarſi egualmente. Con tutto ciò eſſendo facile a capire, che le onde dell'aria poſſono in maniere innumerabili increſparſi, a miſura che vengono meſſe in moto dai corpi ſonori diverſamente tremanti, così che oltre il reciprocare del fluido elaſtico, ed oltre il dilatarſi in cerchio, ad ogni ſua particella s'imprima un tremito, ed una ſubſultazione diverſa, formeremo almeno in confuſo una qualche idea della varietà de' ſuoni, che ci feriſcono le orecchie.

Non occorre però luſingarſi, che poſſiamo particolarmente ſapere in quale preciſa diſpoſizione ſi diſponga l'increſpamento dell'aria, ogni qual volta per noi ſi ſente il ſuono d'una trombetta, o di un violino: aggiugnerò ſolamente, che ci ſi apre la ſtrada di ſpiegare per qual cagione alcuni ſuoni ſi giudichino dolci, e ſoavi, ed altri aſpri, ed inconditi. Una corda d'inteſtini ſi chiama falſa, quando diviſa, per cagion d'eſempio, in due parti eguali, una metà rende un ſuono, e l'altra un'altro; di modo che non eſſendo la funicella per tutta la ſua lunghezza uniforme, in toccandola tutta intiera riſponde con due differenti ſuoni, che in un ſolo nojoſo, ed ingrato ſi confondono. Similmente ſe movendo lentamente il cavicchio d'un Violino andiamo fregando con l'arco la corda corriſpondente, s'ode uno ſtridore aſpro, ed inſoffribile, il quale altro non è, che una miſtura, e conſuſione di tutti que' tuoni, che alla fune ſucceſſivamente ſtirata convengono. Per la diverſità de' ſuoni poi ſi oſſervi, che un violino toccato col dito fa un ſuono, e con l'arco un altro tanto differente, quanto lo rendono due differenti ſtromenti: lo che ſuccede per la varia impreſſione, che alla corda reſta comunicata ſpecialmente dall'archetto, che è una ſpezie di ſega.

Paſſo ora a conſiderare la luce: e ſiccome non ci arrecano difficoltà le impreſſioni più ſorti, o più fiacche dello ſteſſo genere dipendenti dalla energia più grande, o più picciola degli oggetti; così paſſando ſecondo il ſentimento di V. S. Reverendiſſima una qualche analogia fra i ſuoni differenti, e le varie modificazioni del lume, o vogliam dire i colori, ſe queſti con i diverſi increſpamenti dell'etere ſpiegar ſi debbono, ricadiamo nelle ipoteſi del Carteſio, o ſimili. In queſto mentre ella battendo una nuova ſtrada, ſuppone eſſere eterogenei i fluidi naturali, e fra eſſi la luce, le cui parti variano in groſſezza, e forza, o vibrazione.

Se

Se noi vogliam procedere per idee chiare, e distinte, diremo, che la forza di due atomi di luce sta in ragione composta delle masse, e delle velocità o semplici, o dupplicate (non essendo questo nè il tempo, nè il luogo di decidere la famosa controversia), dunque sarà dotata di forza maggiore una particella di luce, che cammina sotto masse pari con maggiore celerità, e conseguentemente se noi prenderemo quella, in cui risiede la velocità massima, patirà essa la massima refrazione, e sveglierà nel nostro occhio il sentimento del colore violetto più scuro, e più vicino al negro, o sia alla privazione del lume. Temo forte, che l'ipotesi mal s'adatti agli sperimenti ; e per darne un saggio, se noi con l'occhio armato d'un Telescopio stiamo aspettando l'emersione d'un Satellite dall'ombra, e dal corpo di Giove, la luce, che si parte dal Satellite per giugnere a noi c'impiega, mentre si propaghi in tempo, lo spazio di alquanti secondi, e la prima ad arrivare alla nostra pupilla sarà certamente quella, le di cui particelle sono dotate della massima velocità, o della massima forza: per la qual causa si dovrebbe vedere il disco della Lunula gioviale tinto di violetto, indi di turchino, poi di verde, aureo, giallo, e rosso secondo la serie de'colori, e finalmente bianco, qualora la retina è ferita nel tempo medesimo dalle particole luminose di tutti i generi, e si fa un impressione media fra le più gagliarde, e le più languide. Ora io so, che così in fatto non interviene.

Nè mi si dica, che tutti gli atomi del lume procedono con pari celerità, e che la diversità della forza dee desumersi dalle masse, cioè dalla maggior quantità di materia, che una particella luminosa rispetto all'altra contiene sotto pari volume; perche io bramerei capire come le più dense siano soggette ad una maggior refrazione, ed a molti altri giuochi, che giusta la Teorica del Cav. Newton fa di mestieri ammettere nella luce. Aggiungo, che la maggior forza degli obbietti lucidi consiste nella quantità delle particelle, che di conserva piegano, ed incurvano le fibrille dell'occhio, e cento di esse, che fossero più dense, saranno lo stesso effetto, come un maggior numero di più rare, senza che si capisca il motivo, per cui le più dense abbiano a produrre il color violetto, e le più rare il rosso, non ostante che la fibra medesima sia sollecitata da una pari forza.

Bisogna per tanto ricorrere, per ispiegare la diversità dei colori, a qualche altra modificazione degli atomi luminosi, adattando cioè a dire le speculazioni Cartesiane, ovvero contentandosi di ricevere il principio Newtoniano, che i raggi sono tali di lor natura.

Io per dirle il vero sono da lungo tempo persuaso, che i colori altro non sieno, che un velamento di chiaro, ed oscuro, e ne ho sperimenti, che non mi lasciano dubitare di tal verità, ch'è un principio d'esperienza, vale a dire una ipotesi d'occhi, e non di cervello. Con questo principio alle mani mi riesce di spiegare ugualmente i fenomeni e più semplici, e più complicati. D'un solo voglio fare ora parola. Se mentre il Sole è prossimo all'orizzonte, io ci tengo fermo per qual-

che tempo lo ſguardo, indi chiudo le palpebre, mi ſi preſenta un gentiliſſimo color roſato: ma ſe io mi metto avanti gli occhi un oggetto nero, per eſemplo il mio Cappello, mi compariſce il violetto. Rimoſſo il Cappello torna in campo il color di roſa, e così ſuccede tante volte, quante mi piace di ripetere l'oſſervazione, ſinattantochè dura ſenſibilmente la impreſſione fatta dallo sfrenato lume Solare nel fondo del mio occhio. Deſidererei, che qualche Filoſoſo Nevvtoniano mi rendeſſe ragione di sì fatta apparenza.

Ma per proſeguire l'analogia della luce, e del ſuono, io nulla trovo nel lume, e nei colori, che corriſponda ai tuoni, ed alle muſiche conſonanze. Sono queſte regolate ſu i tempi, ſi quali ſecondo me o non trovano luogo nell'Organo della viſta, come in quello dell'udito, o almeno non abbiamo Criterio. Egli è vero, che ſi nota un qualche accordo, e ſe vogliam dirla armonia fra i colori, ma pare a me, che ſi appoggi ad una cagione affatto diverſa. La Natura ha una ſcala di colori principiando dal chiaro, e procedendo allo ſcuro, della quale il Sig. Nevvton ha fatto menzione. Ora io penſo, che bene s'accordino inſieme i colori vicini ad eſſa ſcala, e malamente i lontani. Mal s'accoppia il roſſo col turchino, ed ottimamente il verde col giallo, e così vadaſi diſcorrendo de' colori principali, ed anche de' ſecondarj.

La lettera ſi fa ormai troppo proliſſa, e mi riſerbo di ſcrivere un' altra volta ſopra gli altri particolari. Intanto ho l'onore di raſſegnarmi.

Caſtelfranco 6. Agoſto 1736.

LETTERA III.

Del Padre D. Giovan Bernardo Piſenti all'Autore.

Io non porto così lungi, che forſe V. S. Illuſtriſſima ha penſato; l'analogia fra i colori, ed i ſuoni, ma ſolamente riſtringomi al parallelo dell'azione dell'Aria ſopra i Nervi Acuſtici, e di quella della Luce ſu 'l Nervo Ottico. Credo, che ſe oſcillazioni di queſto più, e meno pronte, più, e men dilatate poſſano eccitar l'idee di differenti ſuoni. Ma io concepiſco inſieme, che nella Luce (la quale inchino a credere una emanazione) ſianvi particelle eterogenee, che ſolamente per una differente groſſezza poſſano contribuire alla differenza delle ſuddette vibrazioni del Nervo Ottico; le quali tutte inſieme il bianco, e ſeparate, o diverſamente fra di loro compoſte varj colori primigenj, o varie compoſizioni di colori ci faeciano ſentire. Io credo in oltre, che la ſola groſſezza nelle particelle della lucida emanazione le renda diverſamente refrangibili, nè le parti dei corpi colorati (intendo parti menome) ſieno tutte atte a concepir i tremoti di tutte le parti lucide, ma quali più, quali meno, ed altre sì, altre no; e quindi non tutte ſieno idonee a rifletter ogni lume, nè pertanto a rappreſentar ogni co-

lo-

lore: in quella maniera, che non ogni vibrazione di Aria mette in moto ogni corda.

Non ſo come V. S. Illuſtriſſima ſpieghi la Riſrazione: ma non convengo con Lei, che i raggi compoſti di particelle più groſſe debban eſſere i più riſrangibili; io dico, che queſti ſono i più deboli, ed aſſumo per li più deboli, i compoſti di particelle più ſottili, e delicate. Nevvton direbbe, che queſti ſon più ſoggetti all' attrazione del mezzo reſrangente, e pertanto più ſi riſrangono; ma io non ho mai amato di ſervirmi di un termine così vago, e così poco ſignificante in bocca di un Filoſoſo, com'è quello di *Attrazione*.

Mi piace moltiſſimo la idea di V. S. Illuſtriſſima ſu l' accordo di que' colori, che ſon proſſimi nella ſcala de' ſette primarj; per accordo intendo un accoppiamento di colori grato alla viſta. E quì trovo un' altra analogia coi ſuoni. Vi è un numero determinato di tuoni, il cui vario accoppiamento fa diverſe conſonanze; quelli io chiamo ſuoni eſementari, o Primogenj: i Pratici li ſanno otto. La natura ha pure un numero determinato di colori, e talvolta la union delle vibrazioni, che può riſultare nel Nervo Ottico, può cagionare una grata ſenſazione per mezzo della viſta.

Il Fenomeno dei colori immaginarj, Roſeo, e Violetto, propoſtomi da V. S. Illuſtriſſima non mi ſuccede ſempre in un modo; ma nel ſiſtema dei varj tremori, e della lor forza, e languidezza nelle fibrille dell' occhio la ſpiegazione non credo, che ſia impoſſibile, nè molto difficile. Le impreſſioni dal lume Solare ſi fanno tutte inſieme per tutti i colori, ma chiuſe le palpebre, toglieſi alle impreſſioni già fatte la comunicazione col lume eſterno, ond' è, che ſi dovrebbero perder tutte, non venendo ſempre avvivate dalla fonte del Lume. Ma come le impreſſioni non ſono tutte ugualmente forti, così non tutte inſieme ſi eſtinguono, e ſi vede quel color, che riſulta dalle reſtanti, e dalle ultime a eſtinguerſi. Ma perchè frappoſto il cappello tra me, ed il Sole, veggo toſto un altro colore, e rimoſſo, torna in campo quel di prima? Io oſſervo, che il cappello non può agire certamente ſu 'l fondo del mio occhio tra per eſſer nero, e perchè io tengo chiuſe le palpebre; ma ſolamente egli può ſoſpender l'azion del lume Solare, che opra ſu 'l mio occhio, anche eſſendo chiuſe le palpebre. Quando dunque ceſſa queſto di agire per la frappoſizione di un oggetto opaco, le fibrille ſi riducono a poco a poco a quella languida vibrazione, da cui dipende la percezion di un colore più debole, come l'azzurro, ed il violetto; la qual iſteſſa languida vibrazione ceſſando infine del tutto, ſvaniſce ogni apparenza di colore. Rinnovaſi poi di tratto in tratto, rimovendo il cappello, quel colore roſſo, perchè, anche chiuſe reſtando le palpebre, il lume Solare anima, e avviva di nuovo la forza delle vibrazioni impreſſe la prima volta; ma non le anima, nè avviva tutte, perchè altrimenti dovrebbeſi ſcorger il bianco, o il puro chiaro, che da tutte riſulta. Io non ſo vedere, che in altra maniera poſſa mutar le impreſſioni, o le diſpoſizioni dell' occhio la interpoſizion di un cappello. Se qualche parte del lume Solare non

agi-

agiſce ſu'l ſondo dell' occhio, malgrado l'oſtacolo delle palpebre chiuſe, non vi potrà giugner nè meno l'ombra del cappello, per far una ſpezie di velamento al chiaro, come V. S. Illuſtriſſima per avventura ha ſuppoſto. E ſe qualche parte del lume Solare, che ho dirimpetto, ancor agiſce ſul ſondo del mio occhio chiuſo, perchè non potrà queſto turbare, o cangiarvi le diſpoſizioni prima introdotte, e in conſeguenza la ſenſazione, che lor corriſponde? Io non ho oſſervato farſi ſempre queſto cangiamento di roſeo alla ſcoperta, in violetto dietro il cappello; ma talvolta di roſſo in giallo, e di giallo in varj colori incerti fino al nero totale; e pure ho ſempre uſato dello ſteſſo cappello. Ma io voglio attribuir queſto all'aver aperti, e chiuſi gli occhi troppo ſpeſſo in poco tempo; e troppe impreſſioni in conſeguenza anno potuto concorrere a queſto effetto; nè perciò ſaria facile eſaminar un ſoggetto divenuto per queſta via troppo compoſto.

Quanto all'ipoteſi dei velamenti di chiaro, ed oſcuro, realmente non comprendo, che ſiano altra coſa, che mezzi, o ſtrati pellucidi di differente denſità, e teſſitura. E queſti non poſſono colorire il lume, che li trapaſſa, ſe non rifrangendolo. Che altro è un velo nero, per cagione di eſempio, a traverſo di cui ſi riguarda la neve, o qualche altro oggetto? Ed eccoci all'altra ipoteſi dei raggi di differente diſpoſizione a rifrangerſi, o a paſſare per mezzi traſparenti. Per uno di queſti mezzi alcuni raggi avranno più facile traſmiſſione, che rifleſſione, e vice verſa per un altro.

Ho ſcritto in fretta, e ſenza ſtudiar tutta la chiarezza, ſcrivendo a V.S. Illuſtriſſima, la quale è ottimamente informata di tutti i Siſtemi, e può in ogni caſo ſupplire al mio difetto di eſpreſſione. Ma ſoprattutto le laſcio un'intera libertà ſu li miei penſieri, non cercando io, che di rettificarli ſopra la norma, che le piacerà di preſcrivermi. Sono frattanto con un pieniſſimo riſpetto.

Padova 11. Agoſto 1736.

LETTERA IV.

Dell' Autore al Padre D. Giovan Bernardo Piſenti.

Comunque ſi ſpieghi la refrazione, io ſo, che le particelle componenti la luce in aprirſi la ſtrada attraverſo d'un corpo diafano, parte continuano il loro viaggio giuſta la direzione dell'angolo dell'incidenza, parte ſi riflettono, parte ſi rifrangono, e nell'atto di rifrangerſi ſi diſpergono, piegandoſi alcune più, ed alcune meno verſo la perpendicolare.

Vorrebbe V. S. Reverendiſſima, che tutti queſti effetti da una ſola cagione dipendeſſero, e che la diverſa grandezza delle ſuddette particelle foſſe baſtante a ſatisfare a tutti i fenomeni. Non ſi muovono eſſe certamente con varia celerità, conforme ho dedotto io dalle apparenze delle Lune di Giove. Ella non ſi moſtra inclinata a credere, che ſiano dotate di dif-

differente denſità, ma piuttoſto, che la loro diverſa forza conſiſta nel maggiore, o minor volume. Conforme che le ſuppoſizioni ſogliono aſſumerſi ad arbitrio, nè ſi prende mai la briga di dimoſtrarle; così ſarebbe una diſcortesìa il negare a Lei la ſua ipoteſi. Io non ſono per ſar ciò, ma potrebb' eſſere, che lo facciano altri più delicati in via di metodo.

Almeno fà di meſtieri eſaminare le conſeguenze. E quì naſce una Quiſtione, ſe le più groſſe, o le più minute particole luminoſe ſieno le più refrangibili. Io non ſono per deciderla così facilmente. Se ho detto, per dir qualche coſa, che quelle di maggior mole patiſcono una più grande refrazione, ne ſono ſtato indotto non già da una dimoſtrazione, ma da una ſecondo me plauſibile conghiettura. E' pregata ad avvertire, che quanto il mezzo è più tenue, o meno tenue, altrettanto la luce ſoffre minor refrazione; coſicchè i raggi, che maggiormente ſi piegano, ſono quelli, che ad una maggior reſiſtenza ſi trovano ſoggetti. Perchè dunque la ſua ſentenza foſſe vera, biſognerebbe provare, che lo ſteſſo mezzo ſa minor contraſto, e meno s'oppone al paſſaggio degli atomi lucidi, a proporzione che queſti ſotto un maggior volume contengono più di materia.

Aſſumendo poi Ella, che i raggi diverſamente refrangibili acquiſtano nell'atto dell'infletterſi una differente diſpoſizione, la quale in altro certamente non può conſiſtere, ſalvo che nel vario moto, e tremito delle particole luminoſe; avanza cammino, e profeſſa di ſpiegare con ciò la ſcala dei colori.

A buon conto la ſola varia groſſezza non baſta: e ſiccome nell'aere non diremo mai, che le parti più maſſiccie di queſto fluido imprimano nel noſtro orecchio il ſuono, per eſempio d'una trombetta, e le più minute quello d'un gravecembalo, ricercandoſi un non ſo che di più, cioè la differente modificazione, ed increſpamento delle onde aeree; così nella luce ci vuole una qualche coſa analoga conſiſtente nel diverſo moto, e tremore delle ſue particelle, per render ragione della varietà dei colori. Con ciò nulla ſi dice di nuovo, e ſi tenta di conciliare due Sette, adattando agli eſperimenti Newtoniani le ſpiegazioni Carteſiane.

Il Cavalier Newton perſuaſo dalle ſue oſſervazioni, che i raggi non ſiano tutti egualmente refrangibili, e che per queſto capo naſcano i diverſi colori, ſi è meſſo ad indagare quali fra eſſi raggi ſiano capaci d'una maggior, o minor rifleſſione, quali ad un maggior, o minor incurvamento, e quali ſi traſmettano, o non ſi traſmettano per i fluidi, e per le laminette traſparenti. Con tali fenomeni alla mano da lui giudicati fondamentali è paſſato a dilucidare gli altri più compoſti, appoggiandoſi ſempre ai principj d'eſperienza, ſenza prenderſi la briga di più oltre filoſofare, e cercare inutilmente in che preciſamente conſiſta la natura delle particelle luminoſe dotate delle menzionate differenti proprietà.

Ed in vero procede Egli ottimamente per quello riſguarda al metodo; concioſſiachè l'inſinuarſi più addentro, e farſi ad indovinare le intime configurazioni, grandezze, e moti delle particelle coſtituenti li

cor-

corpi fiſici, altro non è, che luſingarſi di ſaper ciò, che non può mai ſaperſi. Ai giorni noſtri dai Dotti di miglior ſapore ſi laſciano sì fatte ſpeculazioni minute ai Franceſi, che ſe ne moſtrano oltre ogni credere invaghiti, e ſi compiacciono più di Romanzi filoſofici, che d'una ſoda Filoſofia.

Diceva in una ſua lettera il celebre Leibnizio, che ogni qual volta in certi incontri non ponno ridurſi le coſe ai primi elementi Geometrici, e Meccanici, egli è d'uopo prender per baſe de' noſtri raziocinj un qualche principio fiſico, vale a dire o uno ſperimento ben circoſtanziato, o un'effetto, di cui ſi abbia una ſufficiente notizia. Così Egli, conſiderate le proprietà de'feltri, che imbevuti d'un liquore lo ſeparano da un altro eterogeneo, ſi è fatto ſtrada a ſpiegare le ſecrezioni animali, fondandoſi ſulla legge dell'uniformità, con cui in caſi ſimili ſuole operar la Natura. Similmente il Sig. Nevvton nei due paſſi da V. S. Reverendiſſima nella ſua prima lettera allegati, per dare una qualche idea delle vicende della più facile rifleſſione, e della più facile traſmiſſione, è ricorſo alle vibrazioni del mezzo o coſpiranti, o contrarie a quelle del lume.

Quanto a me s'io non adotto le ſpeculazioni Nevvtoniane, ciò naſce, perchè parmi di avere alle mani alcuni principj d'eſperienza e più ſemplici, e più generali, e più ſecondi in tale materia. Forſe io m'inganno, ma ſin ora rendo facilmente ragione di certi fenomeni alla mia maniera, ai quali il mio corto intendimento non ſa applicare le maſſime Nevvtoniane.

Se guardo un'obbietto bianco, e ben illuminato attraverſo d'un fumo, d'una nebbia, o d'una lamina di quel vetro, che ſi chiama giraſole, mi compariſce tinto di giallo, o di roſſo. L'eſperienza è certa, e chiara, e mi ſi preſenta ſempre la ſteſſa, ogni qual volta mi cade in umore di ripeterla. Comprendo agevolmente, che i raggi rifleſſi dall'obbietto bianco, in paſſando a cagion d'eſempio per il fumo o più denſo, o più raro, non ponno conſervar intatto il loro candore; ma debbono in qualche modo alterarſi, e farſi vedere diverſamente. In queſto mentre non vo io in traccia della loro varia modificazione, non avendo dati, per rinvenire in che conſiſta fuori di me, e molto meno dentro di me, come cioè per l'interpoſizione del fumo ſi cangi l'interna affezione della mia anima.

Quando poi leggo le oſſervazioni dell'Hallejo, il quale coſtituito nel fondo del Mare in giorno ſereno, vedea roſſa la ſuperficie ſuperiore della ſua mano; ſenz'altri raggiri capiſco, che così aveva a ſuccedere; perchè dovea generare il roſſo, in guardando il chiaro del Sole attraverſo dell'acqua più opaca, e ſcura. Io non dirò, che l'acqua traſmette i raggi roſſi, e rifletta i verdi; concioſſiachè vi ſi oppone la ſeconda parte della ſperienza, per cui l'Ingleſe vedeva la parte inferior della mano di color verde. Se l'acqua, che giace al diſotto tingea la mano, riflettendo la luce verde; egli è neceſſario, che la luce ſteſſa paſſaſſe prima liberamente per il corpo dell'acqua ſuperiore, altrimenti non avrebbe-

be mai potuto rifletterſi dall'inferiore. E ſe così è, non doveva la mano mirarſi in virtù de' raggi trafmeſſi o roſſa, o verde, ma d'una tinta di mezzo infra due. Per la ſteſſa ſtrada ſpiego i colori immaginarj, e laſcio a V. S. Reverendiſſima il dilucidare più minutamente il fenomeno.

Raccordo a V. S. Reverendiſſima la mia divozione, e mi dico:

Caſtelfranco li 28. Agoſto 1736.

LETTERA V.

Del Padre D. Gio. Bernardo Piſenti all' Autore.

Per riſpondere qualche coſa alla ſtimatiſſima lettera di V. S. Illuſtriſſima, farollo brevemente in tre capi, che ſono il mio modo di concepir per ora la rifrazione in quella parte, che le faceva difficoltà, ſecondo il fenomeno di Hallejo mentovato nella ſua, e terzo il metodo, che io credo diſtinguer la Filoſofia dalla Storia, e dalla Geometria.

Dove i raggi ſi accoſtano alla perpendicolare nel rifrangerſi, trovano minore reſiſtenza, e ciò, quanto più ſono compoſti di particelle minori. Ciò, che io provo così. E' di fatto, che il lume paſſando dall' aria nell' acqua, ſi frange, accoſtandoſi alla perpendicolare. Dunque ci trova meno di reſiſtenza, che nell'aria. Ma l'oppoſto accadendo a' corpi ſenſibili, ciò non potrà avvenir al lume, che per la ſua eſterna piccolezza, come già ſe n'appoſe il Carteſio. Dunque ſe queſto lume non è omogeneo, come ſi ſtabiliſce dal Nevvton, quello, ch'è più ſottile, ſoffrirà ancora minore reſiſtenza nell'acqua, cioè quanto più ſi ſcoſta dalla natura de' corpi ſenſibili, tanto più ſe ne allontanerà dalla legge. Onde potrà farſi queſta legge in Ottica: quanto più denſo è il mezzo, in cui paſſano i raggi, tanto meno loro reſiſte, e quanto ſon eſſi più ſottili, ancora meno. E' dunque la reſiſtenza nel paſſar dal raro nel denſo in ragion compoſta reciproca della ſottigliezza del lume, e della riſpettiva denſità del mezzo.

Venendo al fenomeno d'Hallejo (intendo i colori della ſua mano ſott'acqua) poco veramente egli è circoſtanziato, almeno ſecondo, che lo riferiſce il Nevvton nella ſua Ottica. E certamente V. S. Illuſtriſſima ſpiega così queſto, come altri, abbaſtanza felicemente co' ſuoi principj; ma della ſolidità loro converrebbe giudicare non dipendentemente da alcuni, ma da quanti fenomeni è poſſibile unir inſieme. Ne' colori priſmatici ho trovata non piccola difficoltà a farvi l'applicazione dei mezzi più, e meno illuminati, quando ſi velano l'un l'altro; ma in cambio di queſto, ritrovo degli altri fenomeni, che non ſi conciliano agevolmente colla Teorìa Nevvtoniana. Sia un di queſti, ſe così vuole, il mentovato nella ſua lettera. Nondimeno, non potrebbe egli dirſi, che i raggi roſſi, e i loro vicini doretti, e gialli paſſano liberamente per

l'acqua del mare fino ad una grande profondità, e fin che qualche corpo differente dall'acqua riflettali? La mano dell'Hallejo dalla ſua parte ſuperiore doveva dunque rifletter queſti, e tingerſi di un roſſo carico, quanto più ella era profondamente ſott'acqua; ma roſeo gli appariva, com'ei riferì al Nevvton, perchè col lume roſſo una parte del violetto, e dell'azzurro fin là giungeva, che forſe più oltre in minor copia ſarebbe giunta fino a quell'altezza, a cui ſolamente li raggi roſſi potrebbero penetrare. Queſto roſeo non era per avventura così bello, che una qualche piccola porzione di verde non ſi frammiſchiaſſe, ma il roſſo predominante faceſſe col blò, che tinta foſſe di roſeo più, che d'altro color compoſto. Io dico, che la porzion di verde, la quale arrivava alla mano ſuperiore, doveva eſſer piccola, e debole; imperciocchè ogni ſtrato di acqua dalla ſuperfizie fino a quello, in cui la mano dell'Ingleſe ſi ritrovava, doveva riflettere del verde, ma inſieme con qualche copia di azzurro, e violetto proporzionale alla profondità degli ſtrati ſotto la prima ſuperfizie (ciò, che fa il verdemare). E perciò a miſura, che c'inoltriamo ſott'acqua, dovremo ritrovare un verde meno impuro, che ſi riflette abbaſtanza copioſamente dai molti ſtrati inferiori, com'era quello, che dall'acqua più profonda dava nella parte inferior della mano del noſtro Oſſervatore, nè il roſſo, doretto, e giallo, che ſi traſmettevan col roſſo; o il violetto, e l'azzurro, che per la più gran parte eranſi riflettuti, dovevan confonder la tinta verde della ſua palma.

Quanto al metodo di filoſofare in Fiſica, io credo, che i principj di fatto, come ſi chiamano, od i fenomeni più generali, non ſiano quelli, in cui debba finire la fiſica riſoluzione, ma per eſſer paghi, ſi debba procedere ad una ulteriore ſpiegazione di queſti ſteſſi, che ſia appoggiata non ad idee matematiche, ma fiſiche, io voglio dire, alle nozioni naturali, e ſemplici dell'eſtenſione, e de' ſuoi modi. Se ſopra di queſte poſſa ſtabilirſi un'ipoteſi, che il tempo, e le oſſervazioni confermino, o non diſtruggano, io non veggo, perchè ella debbaſi eſcludere dai Siſtemi Filoſofici, che non ſono finalmente un trattato di Geometria. Il male ſarebbe oſtinarſi a difendere l'Ipoteſi *invita Minerva*, e far valere per una coſa di fatto ciò, che non è, ſe non un penſier filoſofico. Le cauſe fiſiche non poſſono, che ſpiarſi per via d'ingegno, e di ragionamenti probabili ſu le traccie dei Fenomeni raccolti in una quantità ſufficiente. La Storia della Natura, e la Geometria ſi eſercitano benſì, l'una ſu le oſſervazioni naturali circoſtanziate colla maggior eſattezza, e l'altra ſopra tutto quello, che ne' Fenomeni ha rapporto colla quantità; e quindi potranno certamente l'una, e l'altra ſomminiſtrare un grande ajuto alla Fiſica: ma dopo tutto l'officio di queſta ſarà ſempre lo ſpecolar ſu le cauſe, ed il Fiſico avrà dritto di eſtender le ſue ſpecolazioni, e ricerche fin dove lo può portare la curioſità d'intendere la Natura, ed in conſeguenza oltre i limiti delle pure notizie ſtoriche, e delle geometriche cognizioni.

Io metto tutto queſto ſotto i rifleſſi di V. S. Illuſtriſſima prontiſſimo a riformarlo, s'Ella penſerà altrimenti, non eſſendo queſti miei, che

che penſamenti proviſionali, ed ancora non ben digeriti. Frattanto mi dico con tutto il riſpetto

Padova 18. Settembre 1736.

LETTERA VI.

Dell' Autore al Padre D. Gio. Bernardo Piſenti.

Mi permetta V. S. Reverendiſſima, che per me ſi dia cominciamento dall'ultimo capo della ſua lettera, in cui ſi parla del modo di filoſofare in Fiſica. Io ſeguitando le veſtigia del noſtro Galileo ſono pochiſſimo amico delle ipoteſi, le quali, ſiccome parti della immaginazione, introducono una Filoſofia fantaſtica. Mi ſono preſo la briga d' eſaminare parecchie ſuppoſizioni di molti Valentuomini, ed avendole ſcoperte o mancanti, ed imperfette, o ripugnanti ai fenomeni, o fra loro contrarie, ho avuto finalmente la buona ſorta di liberarmi una volta dal comune pregiudicio.

Ma per non uſcire dalla materia, ch'abbiam per le mani, Ella è pregata ad avvertire, che il Cav. Nevvton, il quale da ogni ipoteſi ſi moſtra affatto alieno, dando corſo a' ſuoi penſamenti, non ha ſaputo ſcanſare l'inconveniente. Egli per una parte facendoſi a ſpiegare la rifrazione per via delle ſue attrazioni, ha dovuto ammettere, che il lume tanto minor reſiſtenza incontri, quanto penetra un mezzo traſparente più denſo, ſtando tutte le altre coſe pari: ſentenza abbracciata anche da V. S. Reverendiſs., che pone la reſiſtenza nel paſſare dal raro al denſo in ragion reciproca compoſta della ſottigliezza della luce, e della reſpettiva denſità del mezzo.

Per un altro verſo poi volendo l'Ingleſe ſalvare il moto dei corpi celeſti, i quali deſcrivono intorno i loro centri orbite, che in ſe ſteſſe ritornano, laonde nelle loro rivoluzioni non incontrano reſiſtenza di ſorta alcuna; s'è trovato in neceſſità di ſupporre i Cieli vuoti d'ogni ſenſibil materia.

Se così è, venga il raggio ACB (Fig. 148.) dal Sole A, e paſſando per gli ſpazj vani, urti in C nella eſtima ſuperfizie della noſtra Atmoſfera. Sia DCE toccante del punto C, e normale ad eſſa ſia la retta CF, la quale va a terminare nel centro della Terra F.

Ora la denſità dell'aere in C, per quanto ſia picciola, ſarà infinitamente maggiore di quella di uno ſpazio inane; dunque ammeſſo il Canone da Lei ſtabilito, agevolmente ſi dimoſtra, che nella prima refrazione il raggio AC tanto alla perpendicolare s'accoſta, che forma con eſſa un angolo infiniteſimo: per la qual cauſa gli abitanti della Terra ſituati in I, ai quali giugne il raggio ſpezzato ACI, vedrebbono ſempre il Sole nel vertice, qualunque foſſe l'inclinazione del raggio incidente AC. Curioſo ſpettacolo ſarebbe il mirare il Sol naſcente comparire di ſalto ſul Meridiano, ed ivi fermarſi immobile tutta la giornata;

indi con un altro ſalto improviſamente, ed in un batter d'occhio trammontare.

Aggiungaſi, che dopo aver il raggio AC ſofferta la prima refrazione, camminerebbe ſempre per la normale CIF, ed incontrandoſi negli ſtrati d'aria più denſa, o nella ſuperfizie d'un'acqua ſtagnante, continuerebbe ſenza mai più romperſi per la medeſima perpendicolare il ſuo viaggio.

Già V. S. Reverendiſs. s'accorge in quali aſſurdi vadano a terminare le due poſizioni Newtoniane accoppiate inſieme, e quanto delle ipoteſi poſſiamo fidarci. Per dire frattanto qualche coſa intorno il ſuo Canone, a me pare, che con ammetterlo s'incontra nel medeſimo inganno, in cui, trattando d'altra materia, è caduto Ariſtotile.

Oſſerva coſtui, che quanto il mezzo era più raro, altrettanto i gravi diſcendevano con maggiore velocità, e percorrevano in minor tempo uno ſpazio dato: e perciò inavvedutamente ha conchiuſo, che in un mezzo infinitamente tenue, o ſia nel vano il moto ſi farebbe in iſtante. Ma s'egli aveſſe avvertito eſſere limitata la forza della gravità; altro non avrebbe potuto inferire, ſe non che in un tempo qualunque dato s'acquiſta dal mobile una velocità finita, che nel vuoto è la più grande, che poſſa mai acquiſtarſi, e nel pieno ſempre minore, e minore, quanto è più grande la reſiſtenza, che dalla forza della gravità dee ſottrarſi.

Applicando al caſo noſtro la rifleſſione fatta, mi ſembra manifeſto, che la forza, per cui il lume ſi propaga nel vacuo, è nel ſuo genere determinata. Mi eſprimo così, perche non intendo di decidere la quiſtione, ſe la luce ſi propaghi in un iſtante, ovvero in tempo; ſapendo che le quantità tanto finite, quanto infinite poſſono eſſere fra loro nella medeſima data ragione. Ora mentre il lume cammina per un diafano di denſità inaſſegnabile, la ſua forza, qualunque eſſa ſia, non trova intoppo, e perciò impiega tutta ſe ſteſſa ſenz'alcuna diminuzione. Ma quando la menzionata forza ha da ſpingere le particelle luminoſe per un diafano denſo, io dimando come poſſa eſſa aumentarſi, ed acquiſtare nuovo vigore. Il mezzo traſparente è bensì diſpoſto a ricevere l'impreſſione del lume, e ad opporviſi colla ſua reazione, ma non mai ad avvalorar la ſua forza, purchè non ſi voglia cancellare l'aſſioma, che l'azione è ſempre uguale, e contraria alla reazione.

Biſogna per tanto confeſſare, che una porzione della forza del lume debba impiegarſi a vincere la reſiſtenza del mezzo, e l'altra, che rimane, a penetrarlo; laonde anche in queſto incontro abbia dalla forza totale a ſottrarſi la reſiſtenza.

Nè vedo coſa ci abbiano da fare le attrazioni Newtoniane; concioſſiachè un corpo qualunque B (Fig. 149.) cammini giuſta la direzione AC determinante l'aſſe del moto, che paſſa per il centro di gravità B, ed urti obbliquamente nel punto E d'un fluido più denſo EF, indi a poco a poco ſi vada inſinuando, e lo penetri: io dico, che ſe l'aggregato di tutte le reſiſtenze, le quali nella immerſione ſi oppongono alla parte AEC, è maggiore dell'aggregato di tutte le reſiſtenze, le quali

fan-

fannó contraſto all'altra parte ADC, l'aſſe AC ſi ripiegherà dal canto della perpendicolare EF; coſicchè inclinandoſi paſſo paſſo, cambierà direzione, e continuando finalmente il viaggio per linea retta, ſarà ſoggetto ad una ſpezie di refrazione.

Ma ſe le ſomme delle reſiſtenze delle due porzioni AEC, ADC foſſero pari, ovvero le prime dalle ſeconde veniſſero ſuperate, in sì fatti incontri o il mobile non ſi ſvierebbe dal ſuo cammino, o ſi ſpezzerebbe diſcoſtandoſi dalla normale EF. Il primo caſo per lo più ha luogo ne' corpi regolari, ed omogenei, e negl' irregolari frequentemente gli altri due: e perchè la refrazione ſia più grande, o più piccola, e ſi faccia più da un lato, che dall'altro, ci contribuiſce la grandezza dei corpi, e molto più la figura, e la poſizione.

Queſt' avvertenza ci ſomminiſtra il modo ſemplice di ſpiegare la refrazione, e la diſrazione del lume. Alcuni atomi lucidi (laſciando da parte quelli, che ſi riflettono) ſeguitano la loro ſtrada dal raro al denſo ſenza romperſi, e chiamanſi traſmeſſi; altri poi più, o meno ſi frangono: e per renderne la ragione, baſta il ſupporre, che tutte le particelle della luce non ſiano lavorate ſu un torno, e che ſiano fra loro diverſe di grandezza, di figura, e di poſizione. Con ciò poſſiamo ſatisfare agli accennati ſenomeni, ſenza ricorrere a cagioni miſterioſe, ed ignote, dagli Ingleſi ſecondo me ſuor di biſogno introdotte.

Per quello appartiene al Carteſio, quantunque egli nella concluſione convenga col Newton, e con V. S. Reverendiſs., diſcorda però nei principj. Si diede il Franceſe a credere, che l'aria, in quanto è villoſa, faceſſe alla luce maggior reſiſtenza dell'acqua, e degli altri corpi traſparenti, i quali ſebbene più denſi aſſai, non anno però i minimi componenti tanto fleſſibili, e tanto fra loro intralciati. Forſe ſe ne potrebbe prender conghiettura da' miſti viſcoſi, e tenaci, ſiccome l'olio, il quale benchè più leggiere in iſpezie dell'acqua, niente di meno a cauſa della ſua tenacità più fortemente rifrange il lume. In queſto mentre eſſendo coſa notiſſima agli Aſtronomi, che paſſando un raggio dall'etere all'aria, piega verſo la perpendicolare; mi farei volentieri ad interrogare i Carteſiani, s'eglino penſano, che la materia ſottile ſia più villoſa, e tegnente della noſtr'aria.

Ho propoſto l'eſperimento dell'Hallejo, e l'altro dei colori immaginarj per metter in chiaro, che chi ſi mette a ſpiegare i due ſenomeni coi principj Ingleſi, ſe pure nettamente eſplicar ſi poſſono, dee ſervirſi di parecchie ſuppoſizioni, che danno indizio della mancanza del ſiſtema, il quale s'imbroglia anche nelle coſe più ſemplici. Ella però nell'altro ſiſtema del chiaro, e dell'oſcuro non crede, che ſi renda ragione quanto baſta dei colori priſmatici: ma ſe ſi prende a conſiderare la loro geneſi nei caſi più ſemplici; ſi ſcopre con facilità il meccaniſmo della Natura.

Caſtelfranco 7. Ottobre 1736.

LETTERA VII.

Del Padre D. Gio. Bernardo Piſenti all' Autore.

Convengo con V. S. Illuſtriſſima, che non biſogna facilmente fidarſi dell' Ipoteſi; ma quanto dovremmo noi rigettare d' ingegnoſe ſpecolazioni, e che anno tutta la veriſimiglianza in Fiſica, ſe vogliamo riſtrignerci al fatto ſolo, e al dimoſtrativo? In oltre l'ipoteſi non mettendo nulla in fatto, ne mai eſſendo una propoſizione aſſoluta, ma relativa ai ſoli fenomeni, che ſappiamo, ſi potrà ſempre abbandonarla, quando ne vengano alla luce de' nuovi, che non ſiano con quella compatibili. Che ſe alcuni anno voluto più toſto tirar la Natura per forza alla loro ipoteſi, che riformarla, o abbandonarla del tutto, tal ſia di loro: e queſta ſarà colpa dell' artefice, come ſi ſuol dire, non dell'arte. Quando nella riſoluzione analitica di un Problema io mi ſo a ricercare, ſe quel, che ho ſuppoſto, ſia ~~quel punto~~, o quella linea, che ſi dimandava, non ſo altro, ch'eſaminare, ſe a quel punto, o a quella linea convengano le condizioni del Problema. Così a pari, ſe in una Queſtion Fiſica io trovaſſi, che quello ho ſuppoſto, ſi adatta alle condizioni, che ne conoſco: perchè avrei io torto ad adottare, come ſi fa, proviſionalmente la mia ſuppoſizione?

Io aveva ſtabilito queſto Canone, che la reſiſtenza trovata dal lume nel paſſaggio per differenti mezzi è in ragion compoſta, reciproca della loro denſità, e diretta della ſottigliezza dei raggi; imperciocchè quanto il mezzo è denſo, o di maggiore ſpecifica gravità, *caeteris paribus*, e quanto minori ſono le particelle lucide, di cui è compoſto il raggio (ſecondo la ipoteſi, che ora ho in viſta) tanto più i raggi ſi accoſtano alla perpendicolare, paſſando da un mezzo non denſo in un più denſo; e ciò coſtantemente in reiterate ſperienze, non a caſo, nè per diſrazione di raggi, o coſtituzione di ſuperficie refrangenti. Ella ſa la celebre diſputa, che fu tra il Signor De Fermat, e Deſcartes, e che finalmente i dotti ſi dichiararono per queſt'ultimo, reſtando la maggior parte perſuaſi dal ragionamento meccanico del Sig. Deſcartes, il quale dall'accoſtamento alla perpendicolare argomentava la minore reſiſtenza del mezzo, in cui quello facevaſi; imperciocchè ogni corpo dee a quella parte accoſtarſi, da cui meno ſe gli reſiſte, in quella maniera, che una ſfera ſenſibile ſi ſcoſta dalla perpendicolare in quel mezzo, ch'ella trova maggior difficoltà a penetrare. Nulla valſero contro di queſta evidenza le ſottigliezze del Signor di Fermat, che metteva in campo le cagioni finali, volendo, che i ſeni d'incidenza, e di refrazione ſeguitaſſero la ragione inverſa delle reſiſtenze ne' due mezzi, per cui la luce viaggia, acciò v'impiegaſſe il men di tempo, che foſſe poſſibile.

Le difficoltà, che ha queſta Teoria, ed al mio Canone oppone V. S. Illuſtriſsima, o non ſono direttamente contro di me, che non determino nulla intorno al vacuo, o non mi pajono inſolubili. Io aveva det-

detto, che il lume va più veloce ove trova minore reſiſtenza, e perciò più veloce nell'acqua, che nell'aria, e più ancora nel vetro, che nell' acqua; e in effetto ſi è queſta una conſeguenza dell' accoſtarſi più alla perpendicolare, mentre il ſeno refratto eſſendo minor dell'incidente, la velocità verticale ſi dee aumentar dopo la refrazione, com'è facile dimoſtrare: effetto da Nevvtoniani attribuito alla maggior attrazione del più denſo, la qual agiſce per direzioni verticali. Ella mi domandava, d'onde naſce queſt'aumento di velocità del lume in un mezzo, che non può ſe non colla oppoſizione delle ſue parti ritardare il mobile, che vi entra: dico, che quì la minor perdita tien luogo di guadagno, ſe ſi conſidera, che la luce è ſpinta inceſſantemente da nuovi, e nuovi, gradi di forza, che riſiede nella ſua ſorgente, e che la perdita di moto, la quale ſi fa, per eſempio, nell' aria dalla luce riſpetto a quello, ch' ella vi ha, ed acquiſta, è maggiore di quella perdita, che da eſſa luce ſi fa nell'acqua riſpetto al moto, con cui vi entra, e che le ſi continua ad aggiugnere. Non iſpiegherò per ora fiſicamente il modo, in cui queſta faccenda può andare, ma non credo ſia difficile ritrovarne qualche cagione meccanica nella diverſa fermezza delle parti, e ſtruttura de pori, che ſono ne' due mezzi differenti. Il P. Malebranche aveva penſato, che un mezzo fluido, e ſottile, ch' è propriamente quello, per cui paſſa il lume, ſi trovaſſe ſparſo in tutti li corpi diafani in una quantità reciprocamente proporzionale alla denſità loro; e che il lume perciò premuto di vantaggio da queſto fluido nel diafano raro, in cui più abbonda, foſſe obbligato a cedere verſo la perpendicolare nel diafano più denſo, ove la reſiſtenza del ſuddetto fluido men abbondante foſſe ancora minore. Ma io ritrovo in tutto queſto troppo di libertà Gallicana, e poco di meccanica preciſione. Non ſarebb'egli più ſemplice il dire, che le parti di un fluido meno denſo ſono più agitate, o più capaci di ricever agitazione, che quelle di un fluido più denſo, ma che può permearſi con tutte le direzioni in tempo, che le piccole particelle di lume non gl' imprimono alcun moto, o ne ſono meno diſtratte dal ſuo cammino, e meno della ſua forza ſpogliate?

Ha in oltre oppoſto aſſai acutamente V. S. Illuſtriſs. l'aſſurdo, che ſeguirebbe nelle apparenze del Sole, dal combinare inſieme il vuoto Nevvtoniano con l'accoſtamento de'raggi alla perpendicolare, ove queſti entrano in un mezzo più denſo; imperciocchè, dic'Ella, il vuoto nulla avendo di denſità, e l'atmoſfera terreſtre avendone una infinita per rapporto al vuoto, ſe la rifrazione porta tanto più il raggio verſo la perpendicolare, quanto più grande è la differenza tra la denſità del primo, e ſecondo mezzo, ne ſeguirà, che la rifrazione dal vuoto nell'atmoſfera ſarà maſſima, o l'angolo rifratto infinitamente piccolo, e perciò coincidente colla ſteſſa perpendicolare. Per verità ciò ſeguirebbe ancora dal mio Canone, che porta l' angolo rifratto tanto minore nel mezzo più denſo, quanto maggior è la differenza fra la denſità de'due mezzi; ma come queſto Canone eſprime la facilità del paſſaggio reciprocamente proporzionale alla denſità dei mezzi corporei, e reſiſtenti al lume, ed il

vuo-

vuoto non è mezzo corporeo, nè reſiſtente; (della qual natura io non riconoſco alcun mezzo) così tal aſſurdo non può ſeguitar dal mio Canone, che ſa una comparazione di due mezzi corporei, e per il rapporto della lor teſſitura alle particole lucide più, e men reſiſtente. Per altro ſuppoſto il vacuo, che non può toglier nulla al moto del lume, io dico, che quando da quello in un mezzo corporeo paſſaſſe il lume, ſi rifrangerebbe *a perpendiculo* contro l'oſſervazione Aſtronomica; perocchè la nuova reſiſtenza ſarebbe ſempre maggior di una, ch'è nulla. Ma di ciò veggano quelli, cui ſta a cuore difender queſto mezzo incorporeo.

Diranno forſe coſtoro, che l'aſſurdo dedotto da V. S. Illuſtriſſima ſuſſiſterebbe, quando la cagion della rifrazione *ad perpendiculum* foſſe ſemplicemente l'aumento di denſità in un mezzo ſopra quella dell'altro, onde il lume fortiſce; ma poichè la cagione n'è ſolamente l'attrazione del mezzo, in cui entra, e queſta è limitata, non può, che produrre un effetto finito, facendo accoſtar il lume alla perpendicolare proporzionalmente a quella forza attrattiva, che va creſcendo a miſura della vicinanza dell'atmoſfera alla terra, e non facendolo coincider con eſſa perpendicolare, perchè in queſto caſo la detta forza dovrebb'eſſere un maſſimo, o infinita: in quella maniera, che dal farſi la diſceſa de' gravi più preſto ne' mezzi più rari, non ne ſegue, che il moto de' gravi debba farſi in iſtante ne' mezzi infinitamente tenui, o nel vano; imperciocchè la forza della gravità non è infinita, ma limitata.

Quello, che ho accennato della più difficil diſpoſizione al moto nelle parti di un mezzo più denſo, onde il lume abbia a perdervi men del ſuo moto, può confermarſi con quello Ella oſſerva dell'olio, che ſebbene meno grave in iſpezie dell'acqua, rifrange nondimeno più fortemente; la tenacità di quel fluido fa, che ſi tengano più unite le ſue parti, e quindi fa una ſtilla, o un filo più ſeguente, che l'acqua; ne naſcerà dunque in ciaſcuna parte una minor diſpoſizione al moto, per eſſere ciaſcuna raccomandata a molte altre; e perciò meno reſiſterà al paſſaggio di un corpo dilicatiſſimo, come il lume, che non ſa preſa ſopra di loro, e da cui ſon eſſe meno mobili, che le parti più ſciolte di un altro fluido. L'etere, che ſi diffonde per il gran cammino della luce dal Sole a noi, ha più di ogni altro fluido noto queſta diſpoſizione nelle ſue parti ad eſſer moſſe, e quindi potrà far più di diverſione di forza, o ritardo al paſſaggio della luce, col traſferire in ſe parte del di lei moto, più di quello poſſa far l'aria, o l'atmosfera, in cui li raggi ſi rifrangono perciò *ad perpendiculum*.

Tutto ciò ho ſcritto fin ora più per riſpondere qualche coſa a V. S. Illuſtriſſima, da cui ſo, che molto poſſo imparare, che per eſſer in effetto perſuaſo di alcuna ſpiegazione; il meccaniſmo mi è ſempre piaciuto in Fiſica, perchè appaga più delle Qualità occulte; ed i principj di ſperienza aſſunti ſenza ſpiegazione non mi pajono eſſer tutto quello, che ſi può deſiderare, quando non ſono ſempliciſſimi. Le raſſegno il mio più ſincero oſſequio, e ſono

Padova 30. Novembre 1736.

LET-

LETTERA VIII.

Dell' Autore al Padre D. Giovan Bernardo Piſenti.

Soggiungo un' altra avvertenza intorno il metodo di ben filoſofare in Fiſica. Salva ſempre la miglior opinione, ſecondo me, incombenza principale d' un Fiſico ſi è l'andar in traccia delle leggi della Natura, collo ſcoprimento delle quali, oltre che ſi ſparge un lume ſopra le materie particolari, s'acquiſtano anche delle cognizioni per un ſiſtema generale, e ſi promovono le Arti a benefizio dell'umana ſocietà. Le leggi della Natura ſi deducono o da' primitivi originali principj, o dai fenomeni ben accoppiati; o finalmente dalle leggi già dimoſtrate, colla di cui ſcorta ci facciamo ſtrada ad altre ignote, con l'ajuto però di certi metodi, de' quali troppo lunga coſa ſarebbe il farne parola.

Ora con tali mezzi meſſe in chiaro le regole, di cui nelle ſue operazioni la Natura ſi ſerve, quando di conſeguenza, e per via di corollario ci ſi manifeſtaſſe anche il Meccaniſmo; confeſſo, che s'avrebbe tutto ciò, che può deſiderarſi: ma di rado ci riuſcirà lo ſvelarlo; perchè non abbiamo nè ſenſi così perſpicaci, nè dati ſufficienti per internarci nell' intima ſtruttnra dei corpi, e nella figura, diſpoſizione, e moti delle particelle componenti. Nè biſogna farla da indovini; concioſſiachè c' è un grado minimo di probabilità, che fra le innumerabili ipoteſi fin ora finte, e che finger ſi poſſono, la buona ſorte ci guidi a quell' unica, che tra tutte è la germana, e la vera.

Aggiungaſi, che non ho mai veduto a cavarſi dalle ipoteſi le leggi della Natura; ho veduto bensì colle leggi della Natura alla mano reſtar le ipoteſi convinte frequentemente di falſità. Chi mai ha ſaputo inventarne una, per cui ſi ſpieghino con chiarezza le forze centrali, le elaſtiche, ec.? e pure ne ſono pieni i libri, ed intorno la gravità, ch' è un fenomeno a prima viſta sì ſemplice, io più di dodici potrei contarne. La ſimilitudine da Lei addotta d' un Problema geometrico mi ſembra alquanto lontana. In Geometria abbiamo i dati fermi, coi quali ſi procede al quiſito; ed ogni qual volta la ſteſſa condizione s'adempie in Fiſica, camminiamo con piede ſicuro. Ma eſſendo i fenomeni que' dati, che ſi adoprano nella inveſtigazione delle leggi naturali, con eſſi rare fiate ſi perviene alla ſcoperta del meccaniſmo: laonde fa di meſtieri contentarſi di quello, che ſi può ſapere, ed abbiam tanto che fare in tal' propoſito, che non ci avanza tempo da perdere in architettare ipoteſi che giuſta il detto del Galileo ſono belle, ed ingegnoſe, ma non dimoſtrate, nè dimoſtrabili.

Ben è vero, che ſiccome la Geometria ſi vale de' ſuoi Poſtulati; così la Fiſica ſpeſſo premette alle ſue ricerche alcune poſizioni ſempliciſſime, ed evidenti, che ſi aſſumono ſe non in qualità di aſſiomi, almeno in quella di petizioni, le quali ragionevolmente non ponno eſſere contraſtate. Tale ſi è la da me adottata nella precedente lettera, con cui mi ſono ingegnato

di

di render ragione della trasmissione, della refrazione, e della diffrazione del lume, vale a dire che le minime particelle lucide non sieno tutte nè d'una grandezza, nè d'una figura. Credo poi, che debba annoverarsi fra primi principj, o almeno fra le verità dimostrate, che tanto più resistono i mezzi fluidi, quanto sono più densi, e più tenaci; dipendendo la loro reazione dalle regole della comunicazione del moto. Mettendo in conto la sola inerzia, trovo, che la resistenza serba la ragione composta della massa del fluido, e d'una quantità, che sta di mezzo fra il quadrato, ed il cubo della celerità di quel corpo, che a traverso del liquido s'apre il passaggio. Nè vedo per qual motivo abbia ad eccettuarsene la luce, quasi che la Natura per essa abbia stabilito un canone a parte: e ciò tanto meno dee credersi, quanto che i pori del diafano non sono maravigliosamente disposti in tutte le direzioni per dar transito alla luce in qualsivoglia positura, e sotto qualsisia angolo. Questa sentenza è già screditata, ed io penso, che gli atomi luminosi a guisa di tanti piccolissimi cunei s'insinuino nel diafano, disgiungano la contiguità delle sue particelle, e le mettano *in moto*, e in tremito con tanto maggiore difficoltà, quanto esse sono più massiccie, e tegnenti. Se ne ha un chiaro indizio dal calore, che nel passaggio della luce i mezzi contraggono, e dalla loro sensibile rarefazione. Quindi si scopre, che stando tutte le cose pari, i fluidi sono assai più trasparenti dei solidi; mentre per l'esperienza del Sig. Halley si sa, che la luce penetra l'acqua salsa ad una grande profondità, lo che non interviene nel vetro, che alla grossezza d'un palmo notabilmente s'insosca, per quanto sia limpido, e puro.

Ecco il metodo insegnato a Noi Italiani dal Galileo. Egli nelle sue Opere, e particolarmente nel Saggiatore ne ha sparso i semi. Oltre il passo citato intorno le ipotesi, afferma, che non è uffizio del Fisico l'indagare l'essenza delle cose, ma semplicemente render conto delle loro proprietà, ed affezioni: che la Natura è inesorabile, e non è disposta ad accomodarsi alle nostre fantasie: che il suo libro è scritto in cifra geometrica, e chi non è peritissimo in questa Scienza non isperi di penetrarne il misterio. Altrove dice, che la simplicità, ed il magistero intesi dalla Natura non sono quelli, che intendiam noi: che non si può fare un passo, quando l'esperienza non si congiunga colla ragione: che non bisogna affrettarsi in tirare conseguenze dai fenomeni; ma cavarne soltanto quelle, che spontaneamente ne fluiscono: che la Natura agevolmente si scopre nelle sue operazioni più semplici, e che con queste passo passo c'incamminiamo alle più composte, ed involute: che finalmente in Fisica si vuol procedere a posteriori, e per via d'Analisi, e che tanto più questa Scienza sarà perfetta, quanto meno verità insegnerà.

In questo mentre tornando alle refrazioni, per me non credo, che nella sentenza del Cartesio, e del Newton possa mai evitarsi l'assurdo, che io ho detto, delle refrazioni Astronomiche; conciossiachè per sua parte non era l'Inglese talmente cieco, che non vedesse essere i Cieli pieni di materia di luce, ed intanto ha posto in essi il vano per escludere la materia sottile. E per dire il vero, che bisogno c'è d'ammettere in quel

gran

gran tratto due ſoſtanze diverſe, cioè l'etere, ed il lume: anzi i Carteſiani ſteſſi vogliono, che la luce altro non ſia, che un moto, una preſſione, un ondeggiamento della materia ſottile. Non c'è dunque Setta Filoſofica, che collochi ne' Cieli due ſorti di materia, eſſendo o l'una, o l'altra ſoverchia, e tutta la gran quiſtione ſi riduce al puro nome. Per diſcorrere colla maggiore ſemplicità, io giudico, che la luce ſia la grande atmoſfera del Sole, in cui nuotano i Pianeti, e la quale viene interſecata dalle altre atmoſfere luminoſe delle Stelle fiſſe, che abbracciano, e ſtringono per così dire il noſtro Vortice, perchè il lume d'eſſe Stelle, che ſono tanti Soli, viene certamente ai noſtri occhi. Mi perſuado altresì, che dalla luce dipenda il moto de' Pianeti, e la loro forza centrale, e ne prendo la conghiettura da ciò, che la forza del lume, e le forze centrali decreſcono colla medeſima legge, vale a dire in ragione reciproca duplicata delle diſtanze. Se ci ſia poi, o no il vacuo diſſeminato, nulla rileva, quantunque a me paja aſſai più conforme ai ſenomeni la opinione Epicurea.

Se così è, in qualunque maniera ſi propaghi la luce, o per via d'emanazione, o per via dei tremori dell'Etere, ſecondo le varie ipoteſi, le quali io non approvo, nè condanno, quando i Cieli ſiano riempiuti d'una ſola materia, che o ſia lume, o veicolo del lume; è coſa chiara, che nel diffonderſi che fa la luce per quegli immenſi ſpazj non incontra alcun corpo, che le faccia intoppo, e conſeguentemente cammina liberamente, ſenza eſſere ſoggetta a veruna reſiſtenza.

Ma quando entra nella noſtr'aria, non può negarſi, ch'eſſa non urti in una materia diverſa fornita d'inerzia, e di tenacità, che vi ſi oppone, e le fa contraſto. Se dunque nella eſtenſione de' Cieli è nulla la reſiſtenza, ed è ſenſibile nell'aere, e pure non oſtante ciò per le oſſervazioni Aſtronomiche il raggio ſi torce verſo la perpendicolare; biſogna dire col Barovvio, ed altri ſuoi ſeguaci, che la faccenda vada al roveſcio di quello penſano i Carteſiani, ed i Nevvtoniani.

Nè mi ſi opponga il principio meccanico, che ogni corpo ſi piega da quella parte, dove trova minor reſiſtenza; atteſo che parmi d'aver provato abbaſtanza nell'antecedente mia lettera, che l'aſſioma non è generalmente vero, anzi che nel caſo noſtro ripugna alle nozioni della comunicazione del moto, e delle reſiſtenze. S'immagini V. S. Reverendiſs., che una nave ſpinta dal vento con uniforme celerità ſia obbligata a paſſare obbliquamente dall'acqua dolce alla ſalſa, io dimando verſo qual parte ſi muterà la ſua direzione. Per me ſono perſuaſo, che ſi piegherà verſo quel lato, in cui trova maggior reſiſtenza; perchè ivi più che dall'altro canto ſi minora la velocità. L'eſperimento della palla cacciata da un arcobugio dall'aria nell'acqua viene rapportato in tante maniere, e ci entrano tanti elementi, che nulla ſi può conchiudere. Noto ſemplicemente, che la luce paſſando dal raro al denſo ſotto qualunque angolo, almeno in parte ſi rifrange. Non così fa un corpo ſolido, che mentre l'angolo dell'incidenza ſia picciolo, in cambio d'immergerſi, ſi riflette: ſegno manifeſto, che quand'anche s'attuffa, vi ſi accoppia ſempre il ribalzo, e la rifleſſione.

Non

Non ſenza il ſuo perchè ho dimandato da qual cāgione vēga ac creſciuta la velocità della luce nel mezzo più denſo, mentr'eſſa ci paſſa da un mezzo più raro, per eſempio dal vetro al diamante. Ella ingegnoſamente riſponde, che la minor perdita ſta in luogo di guadagno, ed avrebbe tutte le ragioni del mondo, ogni qual volta due raggi veniſſero ambo dal vuoto, ed uno cadeſſe obbliquamente per modo di eſempio nell'aere, e l'altro nell'acqua. All' incontro quando un raggio ha già penetrata l'aria, e perduta quella porzione di velocità, qualunque ella ſia, che corriſponde alla reſiſtenza dell' aere, torno a dimandare come, o per qual motivo guadagni una nuova maggiore velocità, qualora paſſa nell'acqua. Una delle due dobbiam dire, o che la luce ha una propria innata celerità, che viene eſtenuata dagl' impedimenti, i quali totalmente rimoſſi, intiera di bel nuovo ſi acquiſta, e rimoſſi in parte, almanco s' accreſce: ovvero ſa d' uopo ricorrere alle attrazioni Newtoniane. Nella prima ipoteſi s' aſcrive alla luce quella proprietà, che a' ſuoi Atomi attribuiva Epicuro, e ſi cancella l'aſſioma, per cui ſi ſtabiliſce, che un corpo perſevera nello ſtato, in cui ſi trova, quando non ne viene rimoſſo da un agente eſtrinſeco. Nella ſeconda è evidente, che non ſi rende delle refrazioni quella ragione appoggiata ad idee di corpo, e di moto, ch'ella deſidera.

Comprende V. S. Reverendiſſima, che la maniera, con cui ſpiego le refrazioni, e le diffrazioni, cioè a dire per la maggiore, o minore reſiſtenza, che ſi oppone ad una parte più che all'altra del raggio luminoſo, la quale ſa che ſi ripieghi piuttoſto in un ſenſo, che nell' altro, non è ſoggetta a tale difficoltà, nulla importando, che nel paſſaggio da un mezzo all'altro la velocità, o la facilità del lume ſia alquanto più grande, o più picciola; perchè l'effetto, ſecondo me, ſegue in quel menomiſſimo ſtrato, che divide i due mezzi, ſinattantoche l'atomo lucido ſia totalmente immerſo, e non ſi trovi parte in un fluido, e parte in un altro.

E ricordandole gli atteſtati della mia ſervitù, mi proteſto.

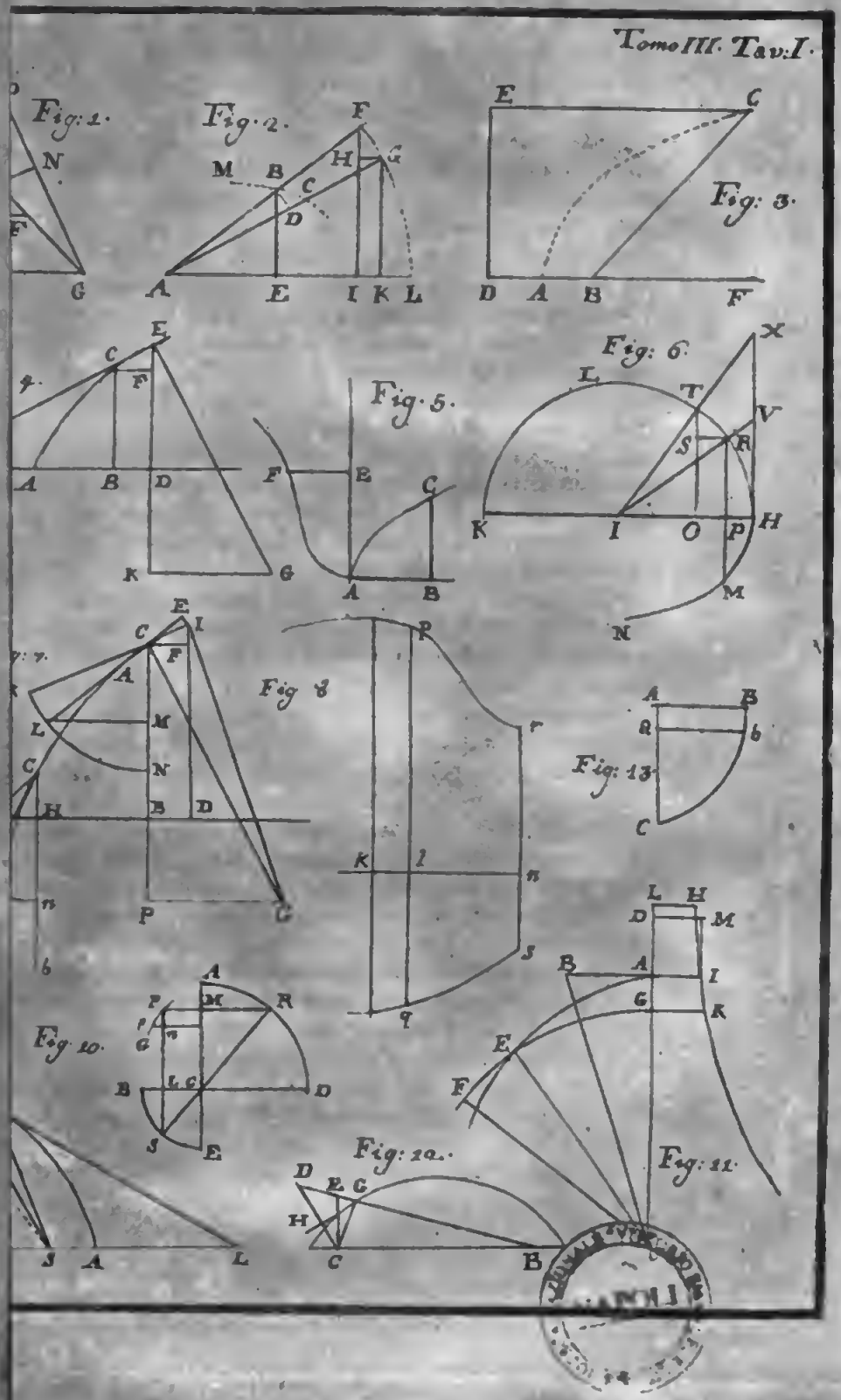
Caſtelfranco li 18. Decembre 1736.

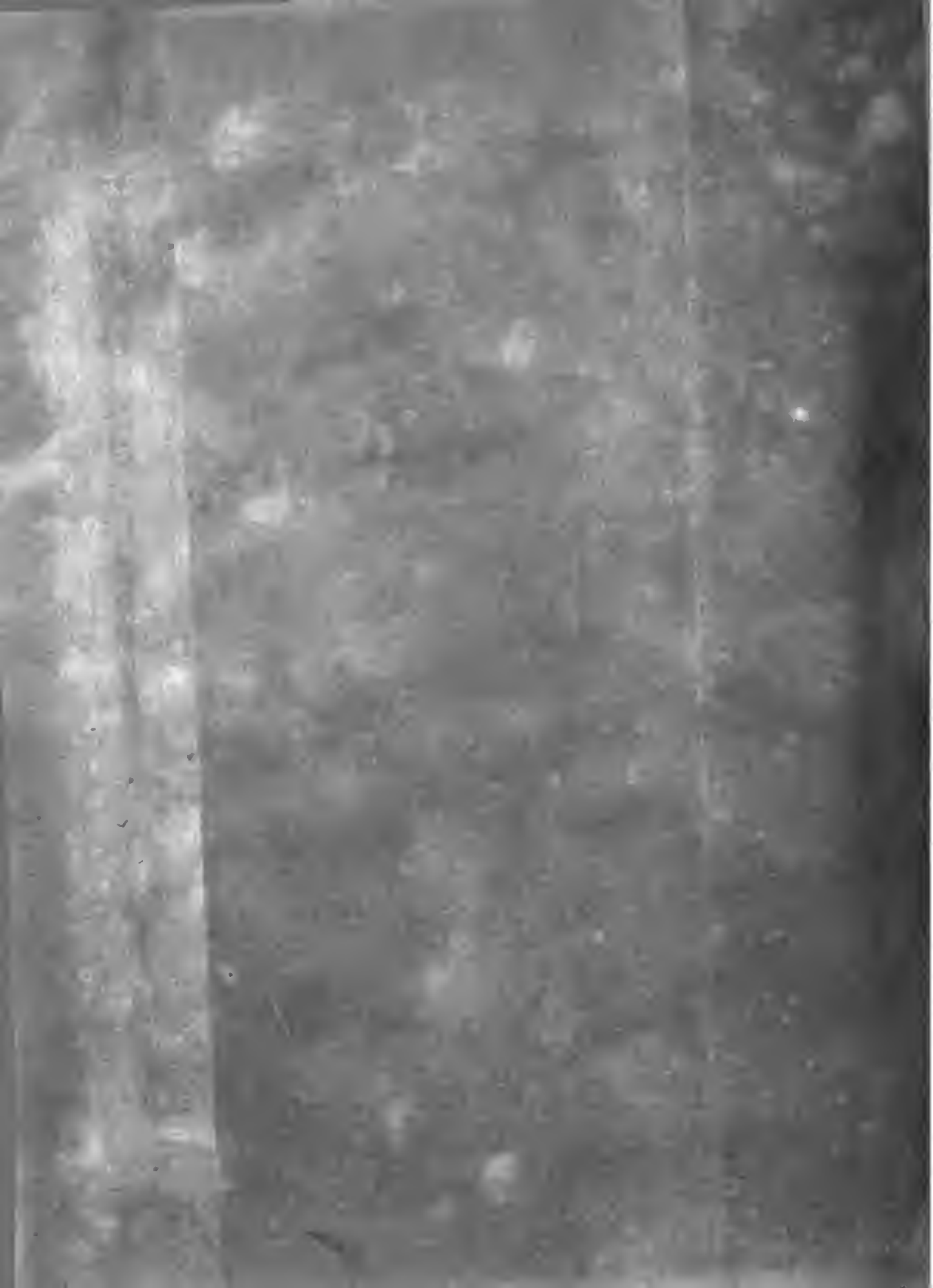
L' Autore in altre coſe occupato non finì mai di traſcrivere queſt' ultima lettera, nè la inviò al Padre Piſenti.

Fine del Tomo Terzo.

616070

Tomo III. Tav. I.





Tomo III Tav. II

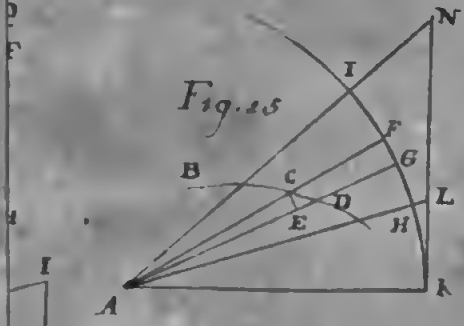


Fig. 15

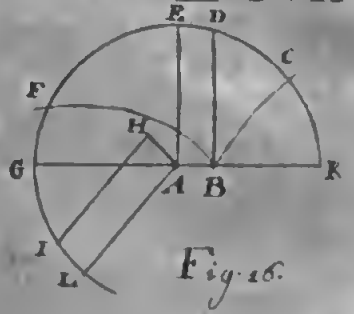
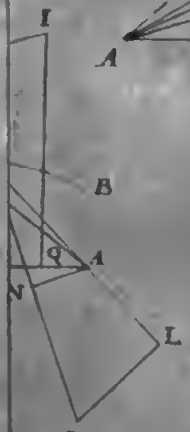


Fig. 16.



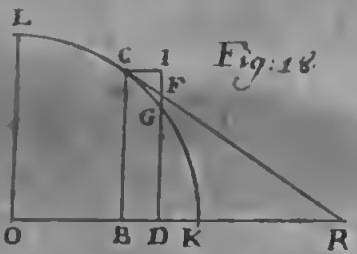


Fig. 18.

Fig. 20.

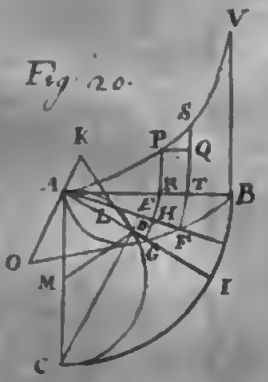
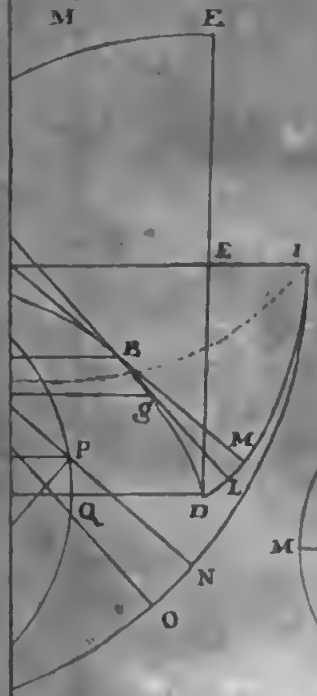
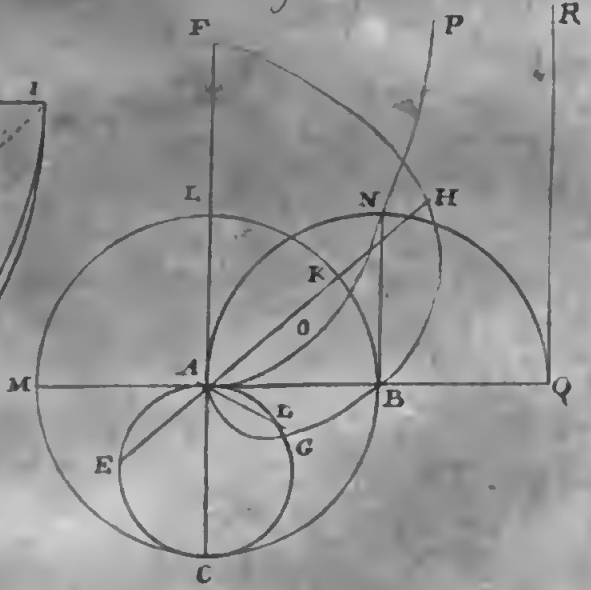


Fig. 21





Biblioteca Nazionale Napoli

Fig: 22.

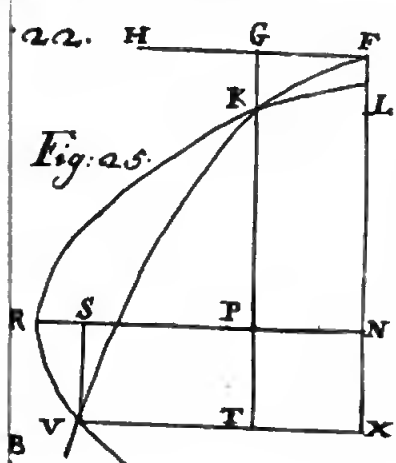


Fig: 23.

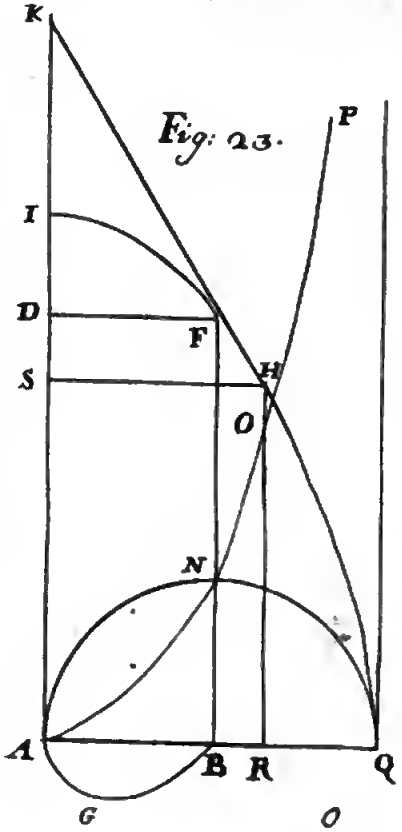


Fig: 24.

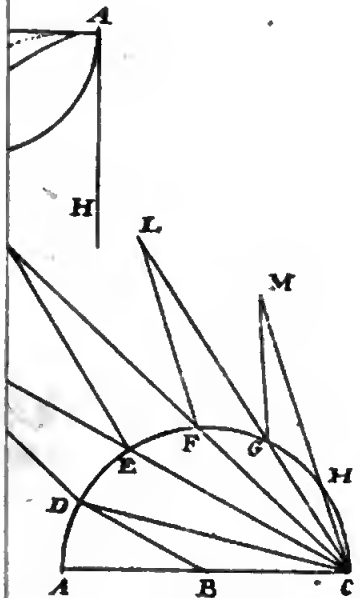
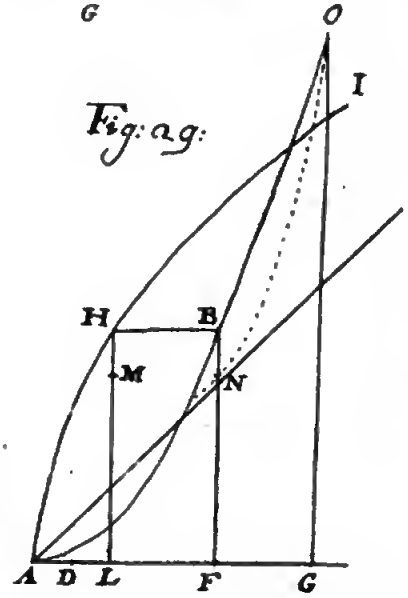


Fig: 25.



Biblioteca Nazionale V. E. III Napoli

Digitized by Google

Digitized by Google

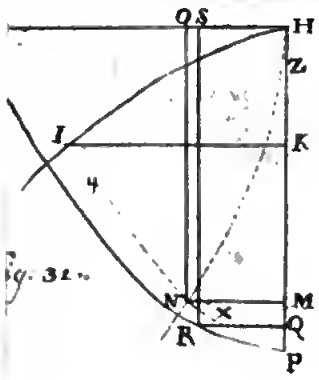


Fig. 31.

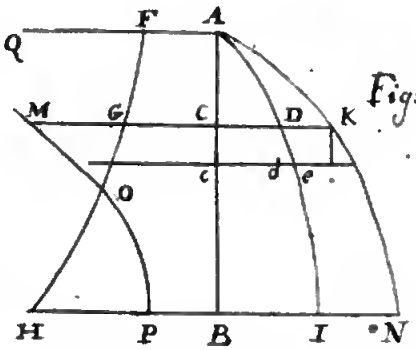
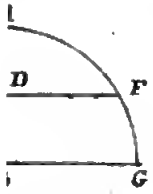


Fig. 32.



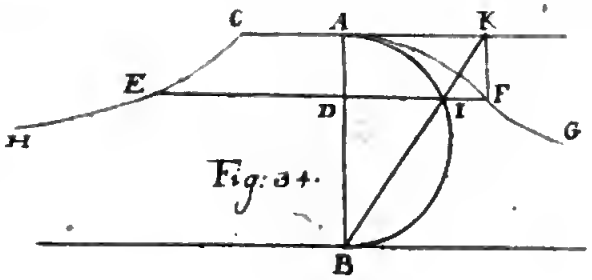
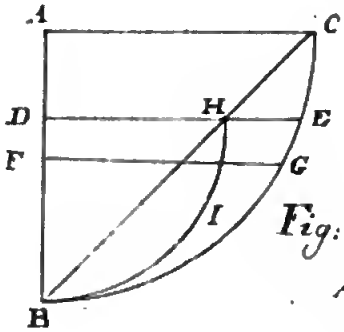


Fig. 34.



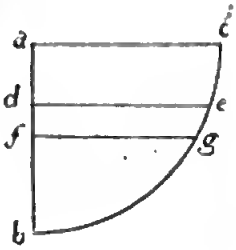


Fig. 36.

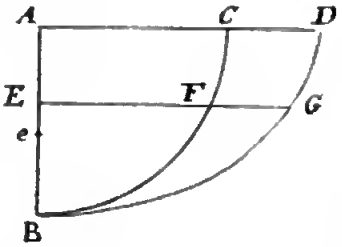
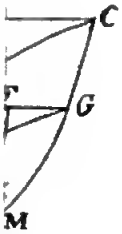


Fig. 37.



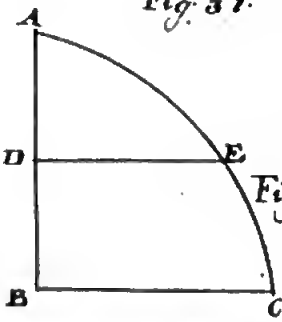
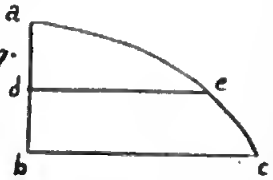


Fig. 39.



Digitized by Google

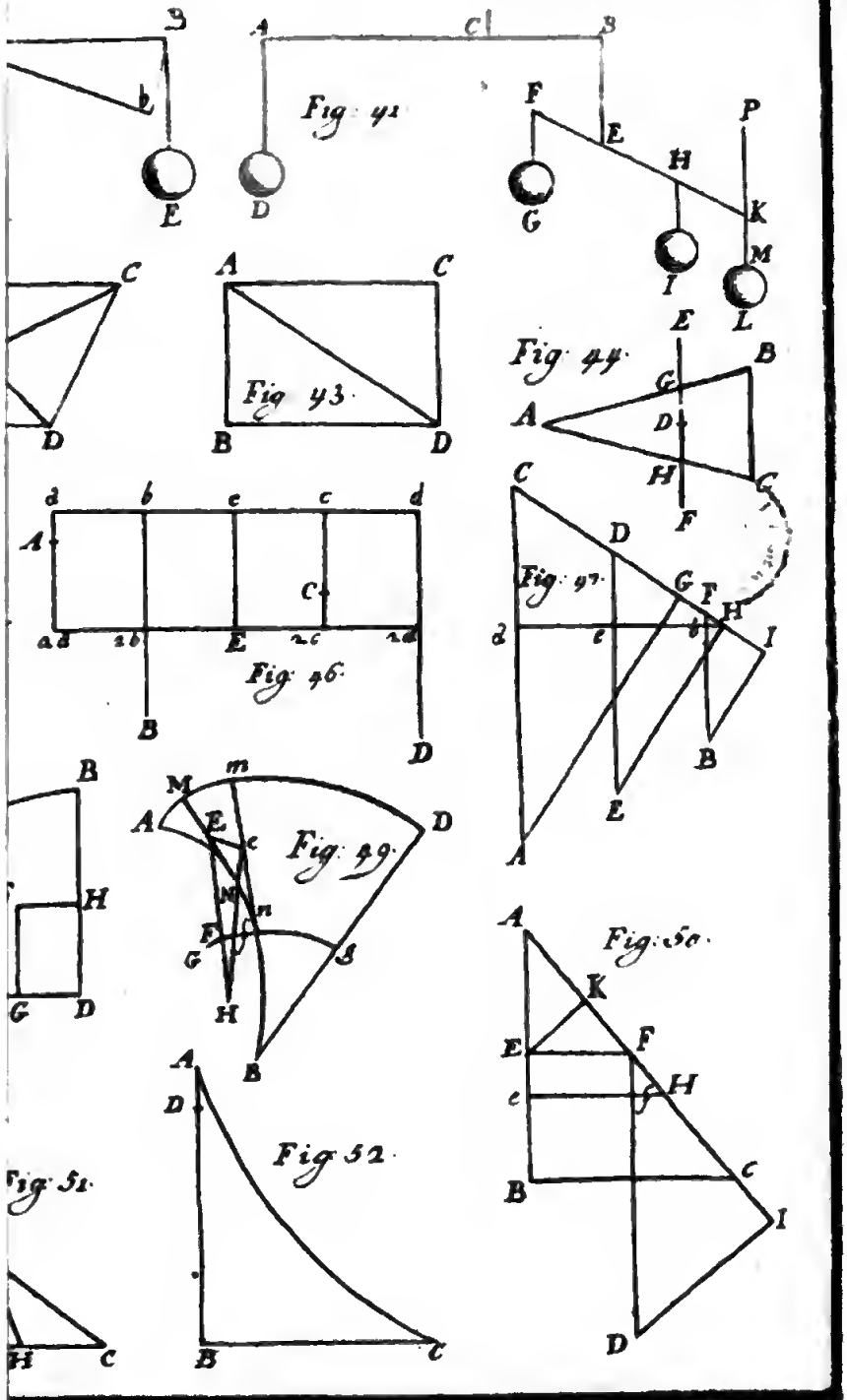


Fig. 41
Fig. 43
Fig. 44
Fig. 46
Fig. 47
Fig. 49
Fig. 50
Fig. 51
Fig. 52

Biblioteca Nazionale V. E. III
NAPOLI

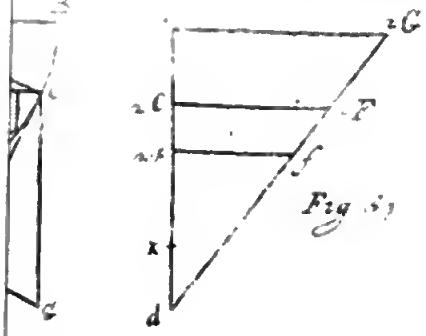


Fig. 53

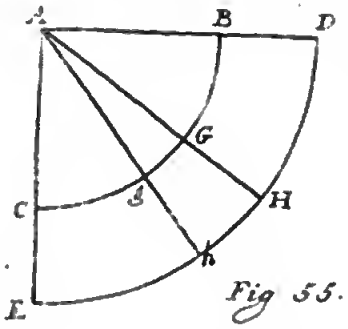
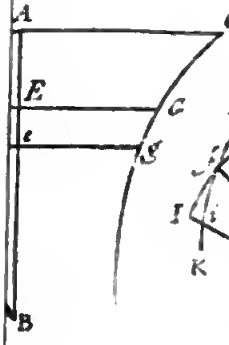


Fig. 55.



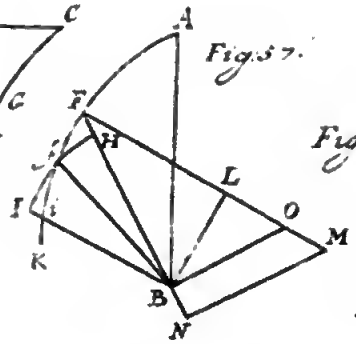
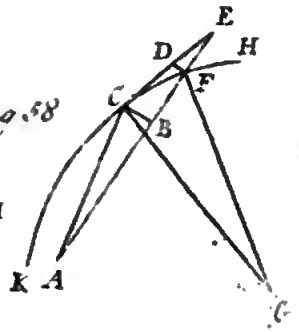


Fig. 57.

Fig. 58



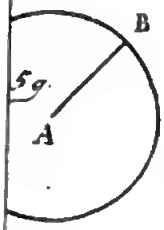


Fig. 59.

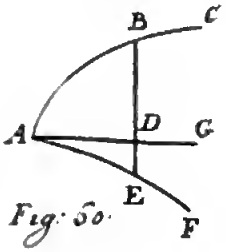


Fig. 60.

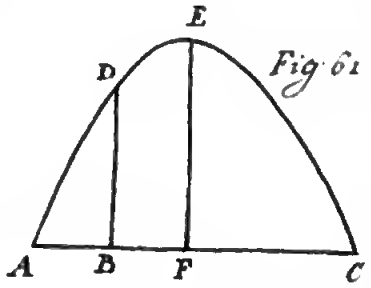
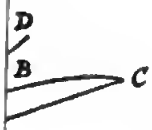


Fig. 61

Fig. 62.



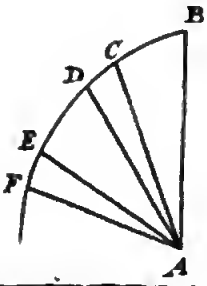
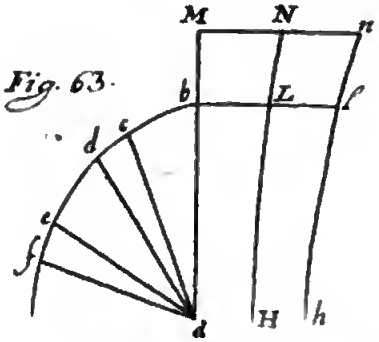


Fig. 63.



Biblioteca Nazionale V. E. III Napoli

Digitized by Google

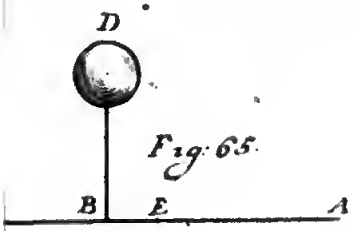


Fig. 65.

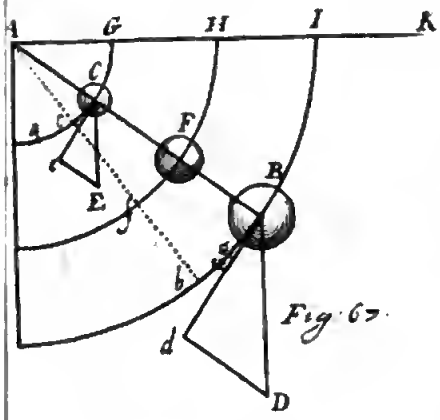


Fig. 67.

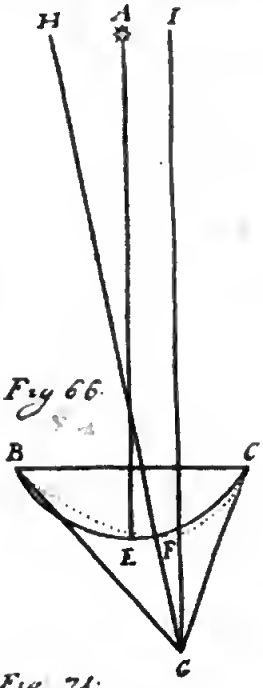
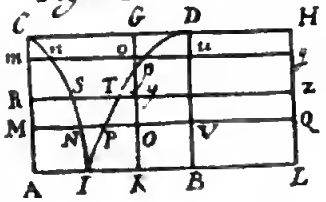


Fig. 66.

Fig. 71.



68

Fig. 69.

Fig. 70.

Fig. 73.

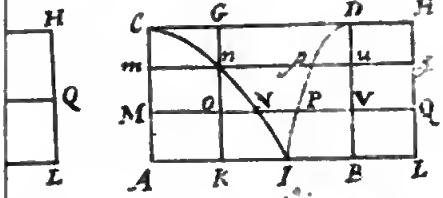
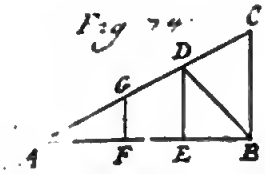
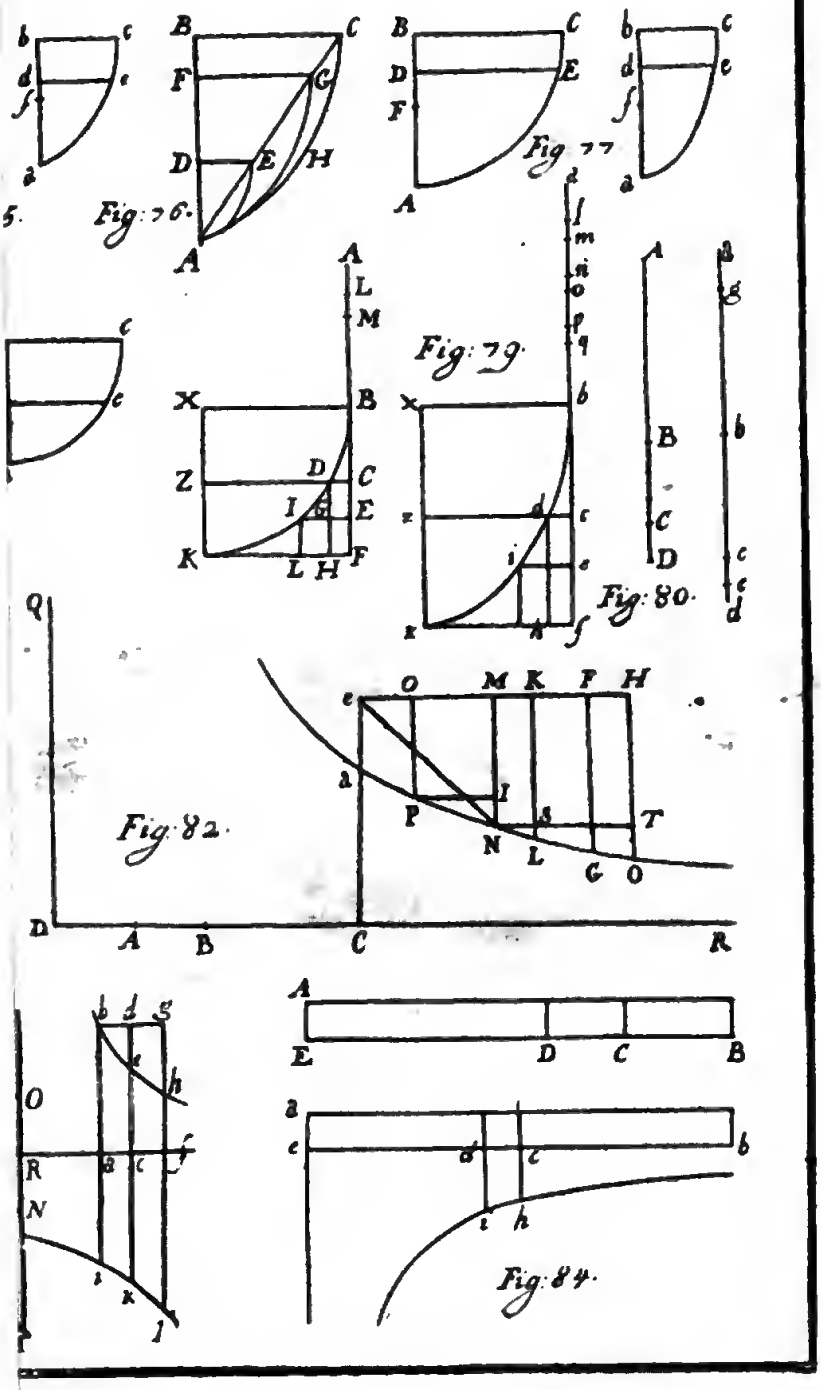


Fig. 74.



Digitized by Google



Digitized by Google

V. E. III
NAPOLI

Fig 87

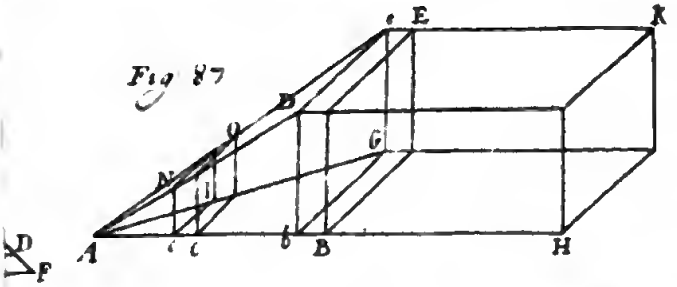
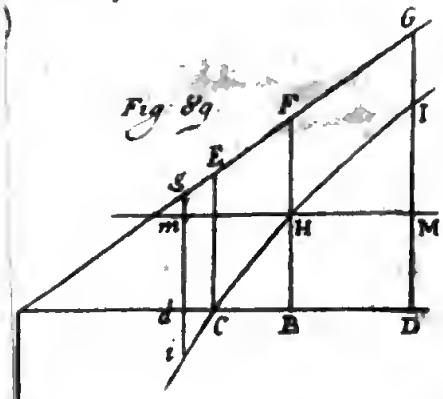


Fig 89



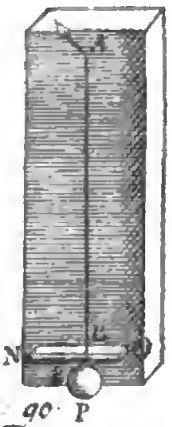


Fig 90

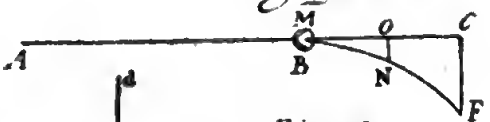


Fig 91.

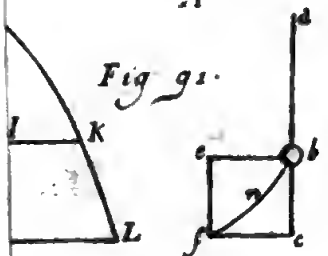


Fig 92.

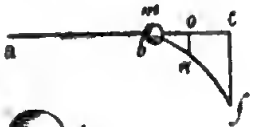
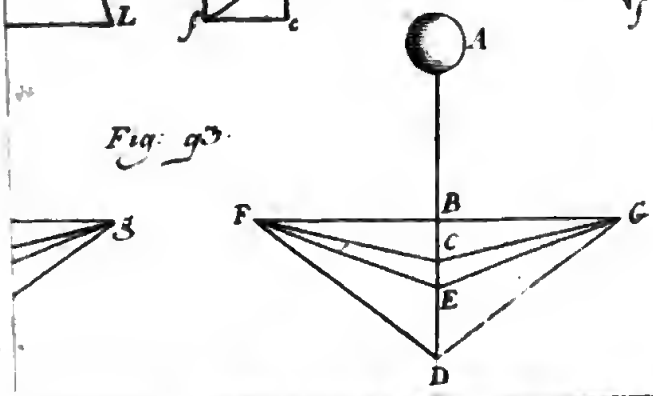
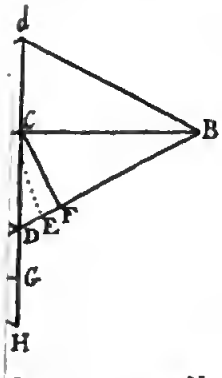


Fig 93.



Digitized by Google

Digitized by Google



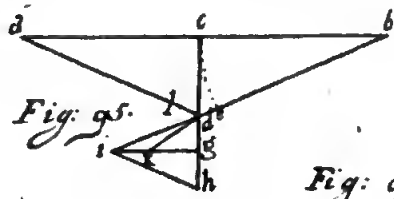
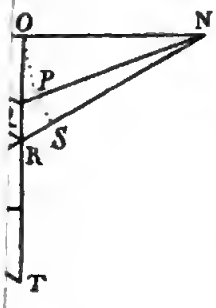


Fig: 95.

Fig: 96.

Fig. 98.



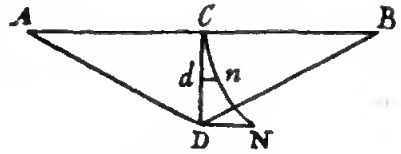


Fig: 99.

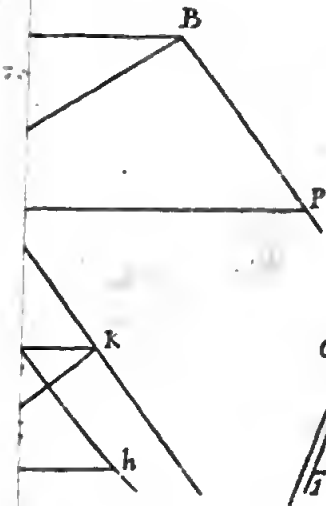


Fig. 100.

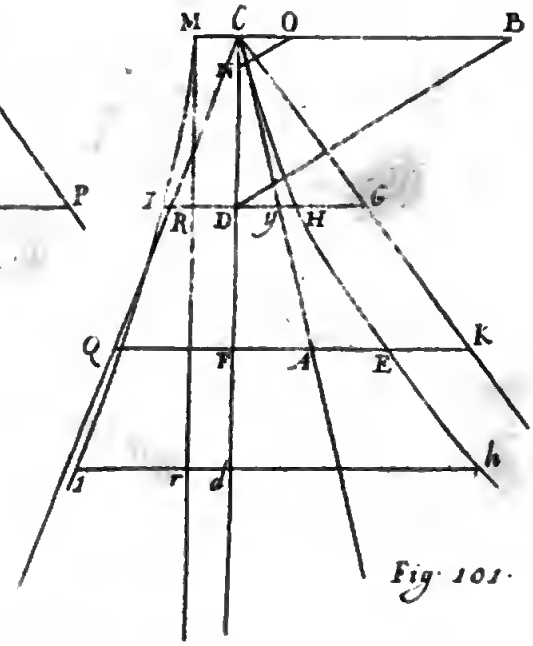
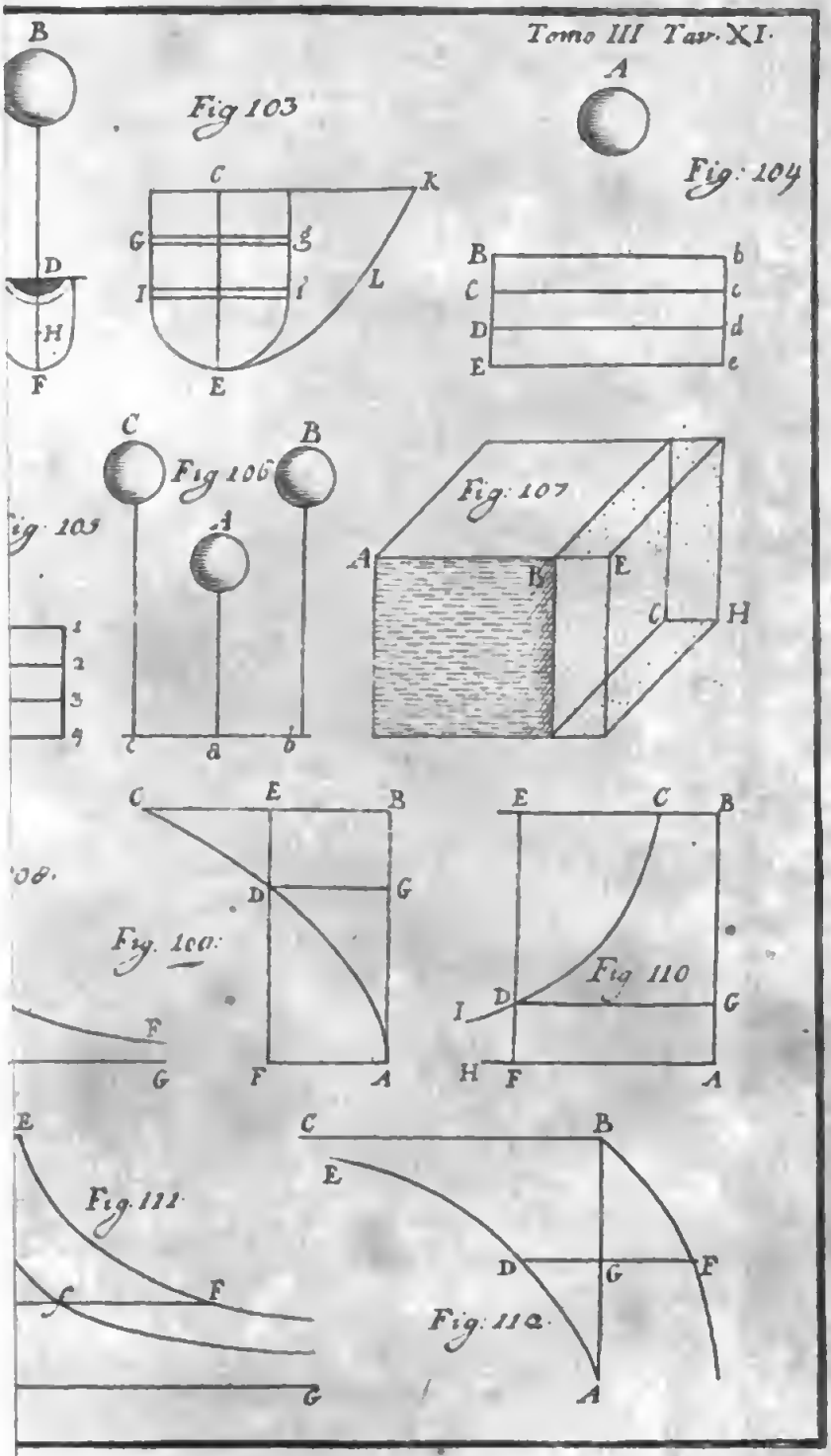


Fig. 101.

Digitized by Google

Biblioteca Nazionale
NAPOLI

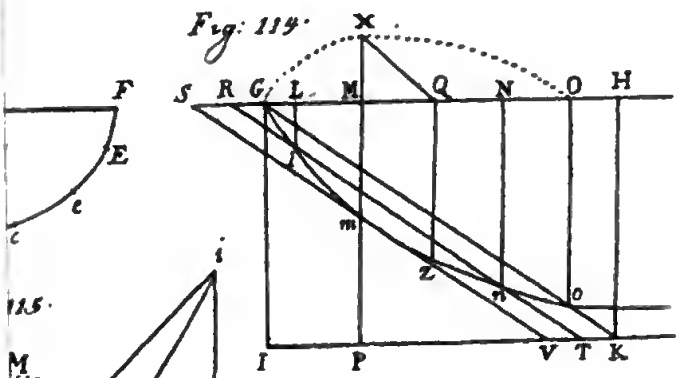
Digitized by Google



V. E. III
BIBLIOTECA NAZIONALE
ROMA

Digitized by Google

Fig: 114.



115.

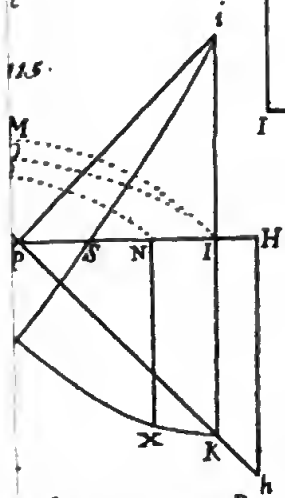
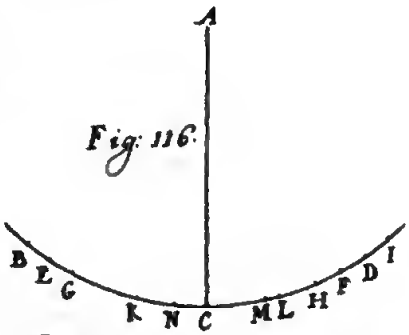


Fig: 116.



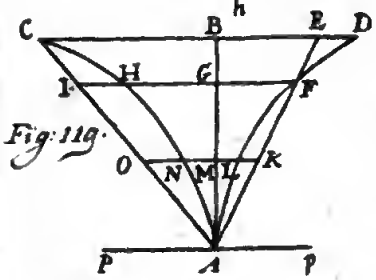


Fig: 119.

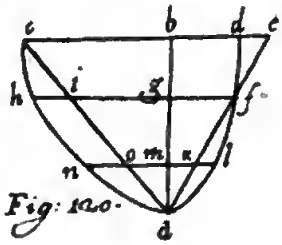


Fig: 120.

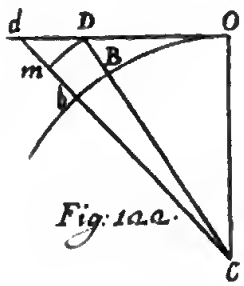
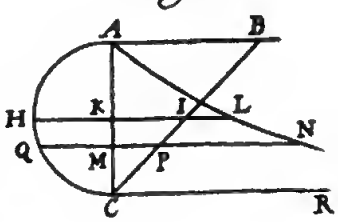


Fig: 122.

Fig: 123.



Digitized by Google

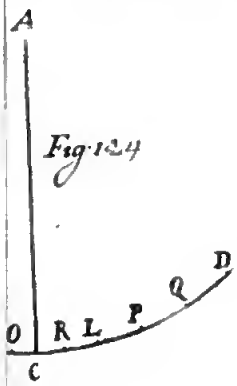


Fig. 124

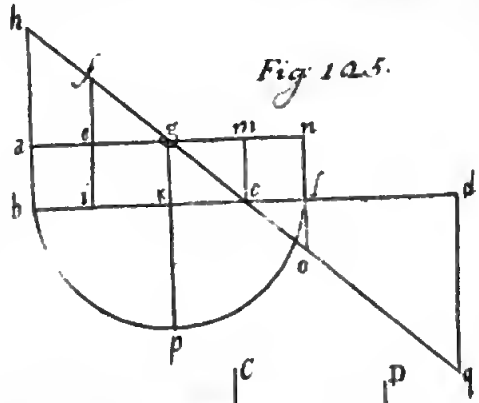


Fig. 125.

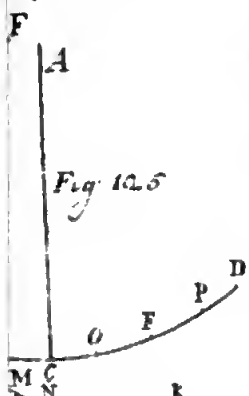


Fig. 126

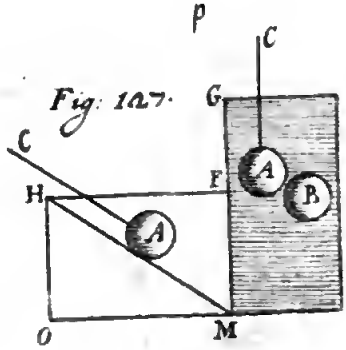


Fig. 127.

Fig. 128

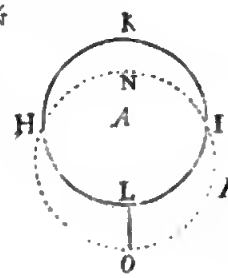


Fig. 129.

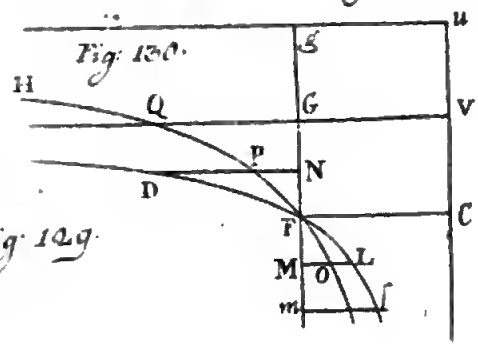


Fig. 130.

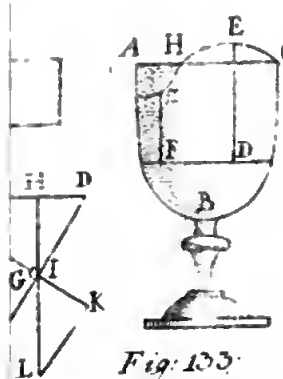


Fig. 133.

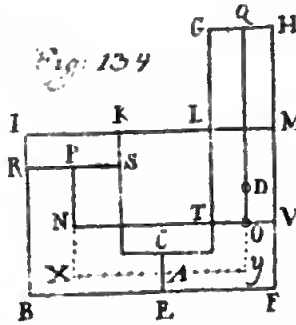


Fig. 134

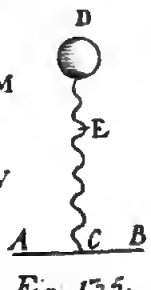
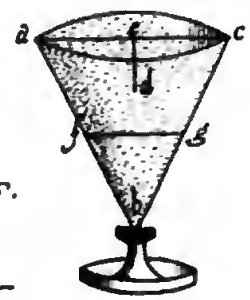


Fig. 135.

Biblioteca Nazionale Napoli

V. E. III
NAPOLI
Biblioteca Nazionale



:136.

z

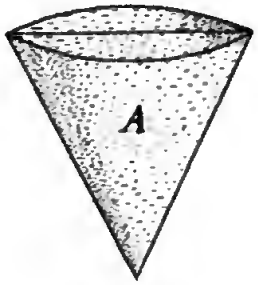
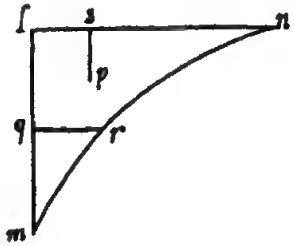
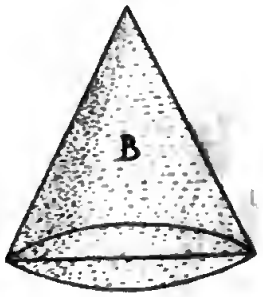


Fig: 137.





: 139.

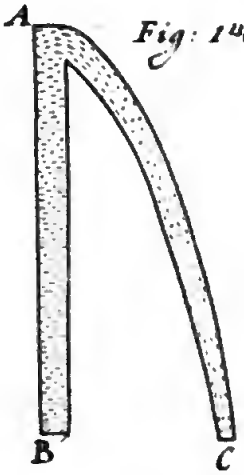


Fig: 140.

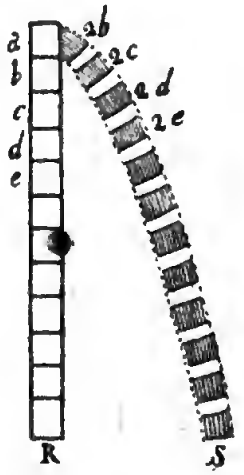


Fig: 141.

Digitized by Google

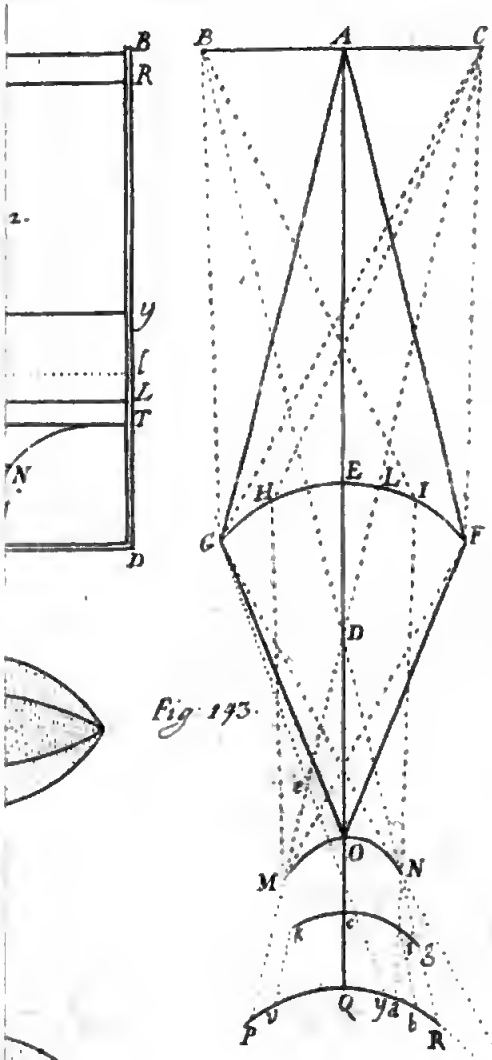
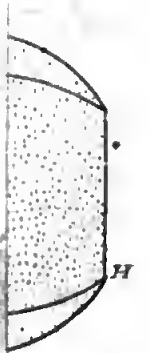


Fig. 143.



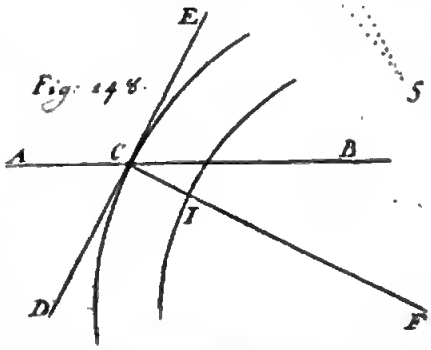


Fig. 148.

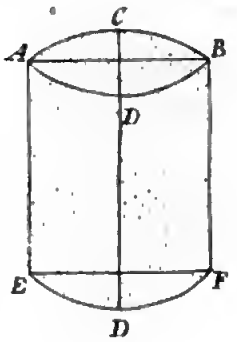


Fig. 144.

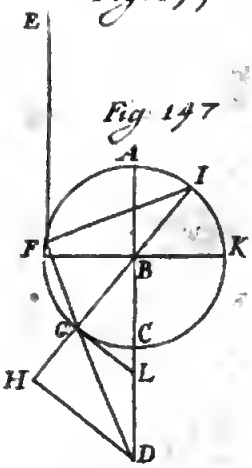


Fig. 147

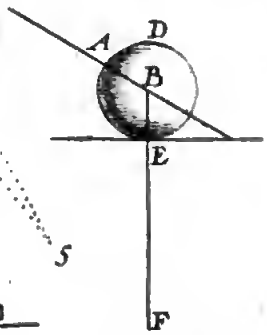


Fig. 149.

Abate Gio Canocchi sculpsit in L.

FONDO PIZZOFALCONE

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio

Palchetto

Num.° d' ordine